

Correction du Devoir surveillé n° 5

Exercice 1 On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et on pose $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\sqrt{k-1}}$

1. (a) f est définie et continue ssi $x > 0$ et $-1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

l'ensemble de définition de la fonction f est $D = [1, +\infty[$ et f est continue sur D .

- (b) La fonction racine n'est pas dérivable en 0 et la fonction arcsinus n'est pas dérivable en 1 (la valeur -1 étant exclue), donc f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \text{ avec } u = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$u' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \text{ et } 1-u^2 = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$$

- (c) $\lim_{x \rightarrow 1+} \sqrt{x-1} = 0_+$ donc $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1+} -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}$

par produit $\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = -\infty$ et la fonction f n'est pas dérivable en 1 d'après le théorème de la limite de la dérivée.

2. (a) f est dérivable sur tout intervalle $[k, k+1], \forall k \geq 2$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in [k, k+1]$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(k+1) - f(k)}{c\sqrt{c-1}} = -2 \left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right)$$

$$\text{Or } 2 \leq k \leq c \leq k+1 \Rightarrow \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} \leq \frac{1}{c\sqrt{c-1}} \leq \frac{1}{k\sqrt{k-1}}$$

D'où $\forall k \geq 2$,

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} \leq -2 \left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right) \leq \frac{1}{k\sqrt{k-1}}$$

- (b) En sommant cet encadrement pour k allant de 2 à n et en utilisant un télescopage pour la somme du milieu on obtient

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} \leq -2 \left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) \leq u_n$$

$$\text{Or } \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k\sqrt{k-1}} = u_n - \frac{1}{2} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \text{ puis}$$

$$-2 \left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \frac{\pi}{4} \right) \leq u_n \leq -2 \left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \leq \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\text{car } \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall x \in [-1, 1] \text{ et } \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \geq 0$$

la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est alors croissante en tant que somme de termes positifs, et majorée, elle converge vers un réel ℓ et en passant à la limite dans l'encadrement on

obtient $\frac{\pi}{2} \leq \ell \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$

Exercice 2 On considère le point $A(-2, 0)$, la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1)$, le cercle C de centre $\Omega(2, 2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

1. $\vec{u}(1, 1)$ est un vecteur directeur de D donc $D : -x + y + c = 0$ avec $A \in D$ donc $c = -2$.

Une équation cartésienne de la droite D est $-x + y - 2 = 0$

2. $d(\Omega, D) = \frac{|-2 + 2 - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R$ donc

la droite D et le cercle C sont tangents en un point.

3. Une équation cartésienne du cercle C est $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$

4. $M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) + y(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 4$

Une équation cartésienne du cercle Γ de diamètre $[A\Omega]$ est $x^2 + y^2 - 2y = 4$

5.
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2 \\ x^2 + y^2 - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y = -6 \\ x^2 + y^2 - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ x^2 + y^2 - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ x^2 + (5 - 2x)^2 - 2(5 - 2x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ 5x^2 - 16x + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & y = 3 \\ x = \frac{11}{5} & y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

L'intersection des cercles C et Γ est constitué des deux points de coordonnées $(1, 3)$ et $\left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)$

6. La droite (AT) est tangente au cercle C en T ssi $\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{\Omega T} = 0$ et $T \in C$ ssi $T \in C \cap \Gamma$.

D'après la question précédente, l'ensemble des points T du cercle C tels que la droite (AT) soit tangente au cercle C en T est constitué des deux points de coordonnées

$(1, 3)$ et $\left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Exercice 3 On cherche à déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient la relation

$$(E) : P(X^2) = (X^3 + 1)P(X).$$

On note j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$

- Le polynôme nul vérifie simplement la relation et, pour $P(X) = X^3 - 1$, on a $P(X^2) = X^6 - 1$, puis $(X^3 + 1)P(X) = (X^3 + 1)(X^3 - 1) = X^6 - 1$. Ce polynôme est aussi solution.
- Soit P un polynôme non nul qui vérifie la relation (E) .
 - Soit $n = \deg(P)$, alors $P(X^2)$ est de degré $2n$ et $(X^3 + 1)P(X)$ est de degré $n + 3$.
On doit donc avoir $2n = n + 3$, soit $n = 3$.
 - En évaluant la relation en $X = 1$, on a $P(1^2) = 2P(1)$ d'où $P(1) = 0$.
Pour $X = j$ on a $P(j^2) = (j^3 + 1)P(j) = 2P(j)$ car $j^3 = 1$

Pour $X = j^2$ on a $P(j^4) = (j^6 + 1)P(j^2)$ d'où $P(j) = 2P(j^2)$ car $j^3 = 1$

Finalement $P(j^2) = 2P(j) = 4P(j^2)$ donc $\boxed{P(j^2) = P(j) = 0}$

3. On a donc montré que si un polynôme vérifie la relation (E), alors il est soit nul, soit s'écrit sous la forme $P(X) = \alpha(X-1)(X-j)(X-j^2) = \alpha(X^3-1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ car il est de degré 3 et admet 3 racines distinctes $1, j, j^2$.

Il reste à vérifier la réciproque, ce qui est fait dans la première question. On a donc montré que l'ensemble des solutions de la relation (E) est $\boxed{\{\alpha(X^3-1); \alpha \in \mathbb{R}\}}$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(n\theta) \neq 0$.

On considère le polynôme $P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$

1. D'après la formule d'Euler, $\sin(k\theta) = \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i}$ donc

$$P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} X^k - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{-ik\theta} X^k =$$

$$\boxed{\frac{1}{2i} [(1 + e^{i\theta} X)^n - (1 + e^{-i\theta} X)^n]} \text{ d'après la formule du binôme de Newton.}$$

2. $P(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2i} [(1 + e^{i\theta} X)^n - (1 + e^{-i\theta} X)^n] = 0 \Leftrightarrow (1 + e^{i\theta} X)^n = (1 + e^{-i\theta} X)^n \Leftrightarrow$

$$Z^n = 1 \text{ en posant } Z = \frac{1 + e^{i\theta} X}{1 + e^{-i\theta} X} \text{ pour } 1 + e^{-i\theta} X \neq 0 \text{ i.e. } X \neq -e^{i\theta}$$

On vérifie que $P(-e^{i\theta}) = \frac{(1 - e^{2i\theta})^n}{2i} \neq 0$ car $\theta \neq k\pi$ sinon on aurait $\sin(n\theta) = 0$ ce qui est impossible.

$$Z^n = 1 \Leftrightarrow Z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

$$\frac{1 + e^{i\theta} X}{1 + e^{-i\theta} X} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow 1 + e^{i\theta} X = e^{\frac{2ik\pi}{n}} (1 + e^{-i\theta} X) \Leftrightarrow X \left(e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} \right) = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1$$

Or $e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{k\pi}{n} + m\pi$ ce qui donnerait $\sin(n\theta) = 0$ ce qui est impossible.

De plus P est de degré n car $\sin(n\theta) \neq 0$.

Donc les n racines de P dans $\mathbb{C}[X]$ sont $\boxed{X_k = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$

$$3. X_k = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{-\frac{ik\pi}{n}} e^{i\theta} - e^{\frac{ik\pi}{n}} e^{-i\theta} \right)} = \frac{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n} - \theta\right)} = \boxed{-\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \theta\right)} \in \mathbb{R}}$$