Samedi 15 mars 2025

Devoir surveillé n° 5

Ce devoir est constitué d'exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.
La qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, la présentation et l'orthographe font partie des critères de notation. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 **6 points** : **1.(a)** 1 **1.(b)** 1 **1.(c)** 1 **2.(a)** 1.5 **2.(b)** 1.5

On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et on pose $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k-1}}$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f, puis étudier sa continuité sur D.
   (b) Calculer $f'(x)$.
   (c) La fonction f est-elle dérivable en 1 ?
2. (a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $k \geq 2$,
$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} \leq -2\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) \leq \frac{1}{k\sqrt{k-1}}$$
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 2 **5 points** : **1.** 0.5 **2.** 1 **3.** 0.5 **4.** 1 **5.** 1 **6.** 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère le point A$(-2, 0)$, la droite D passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1, 1)$, le cercle C de centre $\Omega(2, 2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite D.
2. La droite D et le cercle C sont-ils sécants ?
3. Déterminer une équation cartésienne du cercle C.
4. Déterminer une équation cartésienne du cercle Γ de diamètre $[A\Omega]$.
5. Déterminer l'intersection des cercles C et Γ.
6. Quel est l'ensemble des points T du cercle C tels que la droite (AT) soit tangente au cercle C en T ?

Exercice 3 **4 points** : **1.** 1 **2. (a)** 0.5 **2. (b)** 1.5 **3.** 1

On cherche à déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient la relation

$$(E) : P(X^2) = (X^3+1)P(X).$$

On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

1. Démontrer que le polynôme nul ainsi que le polynôme X^3-1 sont solutions de (E).
2. Soit P un polynôme non nul qui vérifie la relation (E).
   (a) Déterminer le degré de P.
   (b) Démontrer que $P(1)=0$, puis que $P(\mathrm{j}) = P(\mathrm{j}^2) = 0$.
3. Conclure : quels sont les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ solutions de (E) ?

Exercice 4 **5 points** : **1.** 1.5 **2.** 2 **3.** 1.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(n\theta) \neq 0$.

On considère le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$

1. Justifier que $P = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left[\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}X\right)^n - \left(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}X\right)^n\right]$
2. En déduire les racines du polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que ces racines sont réelles.