Dénombrement

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les termes de S_n dans chacun des cas suivants :

$$\text{a) } S_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} a_{2k+1} \qquad \text{b) } S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} b_{i,j} \qquad \text{c) } S_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{i,j}$$

Exercice 2 L'immatriculation d'un véhicule porte sept caractères : deux lettres, trois chiffres et deux lettres. Les lettres I, O et U ne sont pas utilisées, du fait de leurs ressemblances avec 1, 0 et V. Les séries SS et WW ne sont pas utilisées dans le bloc de gauche et la série SS n'est pas utilisée dans le bloc de droite. Quant à la série de chiffres, elle commence à 001.

Quel est le nombre total d'immatriculations possibles selon ce système ?

Exercice 3 Un anagramme est une permutation des lettres d'un mot. On ne s'intéresse pas au fait de savoir si un anagramme a un sens, ni même s'il est prononçable.

Combien peut-on écrire d'anagrammes des mots MATHS, MOTO et DODO ?

Exercice 4

1. On range $n \geq 3$ balles dans trois paniers, chacun pouvant accueillir toutes les balles. Combien y a-t-il de façons de n'avoir aucun panier vide ?
2. On range 20 livres sur une étagère rectiligne. Parmi ces livres, 3 sont de l'auteur A, les autres étant d'auteurs différents. De combien de façons peut-on ranger les livres de A côte à côte ?

Exercice 5 Soient m, n, p trois entiers naturels tels que $p \leq n$ et $p \leq m$. Montrer que

$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$$

On pourra considérer les parties d'un ensemble $A \cup B$, où A et B sont disjoints, de cardinaux respectifs n et m.

Exercice 6 On dispose de n boules noires numérotées de 1 à n et de n boules rouges numérotées de 1 à n que l'on place dans une urne.

1. On note E l'ensemble des tirages simultanés de n boules dans l'urne. Déterminer $\operatorname{Card}(E)$.
2. Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On note A_k l'ensemble des tirages de E avec exactement k boules noires. Calculer $\operatorname{Card}(A_k)$
3. Calculer alors de deux façons différentes le nombre $\operatorname{Card}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$

Exercice 7 On lance trois dés à six faces, discernables (par exemple de trois couleurs différentes).

1. Quel est le nombre total de tirages ?
2. Quel est le nombre de tirages avec exactement trois numéros différents ?
3. Quel est le nombre de tirages avec au moins deux numéros identiques ?
4. Quel est le nombre de tirages contenant au moins un six ?
5. Quel est le nombre de tirages tels que la somme des trois numéros tirés soit paire ?

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère une urne contenant n boules rouges, n boules bleues et n boules vertes. On suppose toutes les boules discernables et numérotées de 1 à n pour chaque couleur. On effectue p tirages, avec $p \in [\![1, n]\!]$.

1. On effectue p tirages successifs avec remise.
   (a) Quel est le nombre total de résultats possibles ?
   (b) Quel est le nombre de résultats pour lesquels on n'a jamais pioché deux fois de suite deux boules de même couleur ?
2. On effectue p tirages successifs sans remise.
   (a) Quel est le nombre total de résultats possibles ?
   (b) Soit $k \in [\![0, p]\!]$. Calculer le nombre de résultats donnant exactement k boules rouges.
   (c) En comptant de deux manières différentes le nombre de résultats pour lesquels on a pioché au moins une fois une boule rouge, établir la formule :

$$\sum_{k=1}^{p} \binom{n}{k}\binom{2n}{p-k} = \binom{3n}{p} - \binom{2n}{p}$$

Exercice 9 Au poker classique, qui se joue avec un jeu de 52 cartes, une suite est une main où les cinq cartes se suivent, une couleur est une main où les cinq cartes sont de la même couleur, un full est une main avec un brelan et une paire, et une quinte flush est une suite où les cinq cartes sont de la même couleur.
On considèrera que l'as peut compter dans deux suites : as, deux, trois, quatre, cinq et dix, valet, dame, roi, as. Déterminer le nombre de mains de cinq cartes contenant exactement :
1. une suite 2. une couleur 3. un full 4. une quinte flush.

Exercice 10

1. Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, 3]\!]$ vers $[\![1, 2]\!]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n+1]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$.