Correction du Test n° 5

Sujet A

Exercice On considère la fonction $f : x \longmapsto \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x$.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}$. Si $x > 1$ alors $x - 1 > 0$ et $\dfrac{x}{x-1} > 0$.

   De plus, $u : x \longmapsto \dfrac{x}{x-1}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$, comme quotient de fonctions dérivables. Donc $x \longmapsto x\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

   Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur l'intervalle }]1, +\infty[}$ et $\forall x > 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[1 \times \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + x \times \frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}\right]\mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)} \\ &= \left[\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + x \times \frac{-1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x}\right] f(x). \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\forall x > 1, \quad f'(x) = \left[\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) - \dfrac{1}{x-1}\right] f(x)}$.

2. (a) φ est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont et $\forall x > 1$,

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{x(x-1)} - \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1)+x}{x(x-1)^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\varphi'(x) = \frac{1}{x(x-1)^2}} > 0,$$

   car $x > 0$ et $(x-1)^2 > 0$. Donc $\boxed{\varphi \text{ est strictement croissante sur l'intervalle }]1, +\infty[}$.

   (b) En $+\infty$: $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $\boxed{\varphi(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) - \dfrac{1}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$, par composition et opérations sur les limites.

   φ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\boxed{\forall x > 1, \varphi(x) < 0}$.

3. $\forall x > 1$, $f'(x) = \varphi(x)f(x) < 0$ car $\varphi(x) < 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)} > 0$.

   Donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle }]1, +\infty[}$.

Correction du Test n° 5

Sujet B

Exercice On considère la fonction $f : x \longmapsto \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}$. Si $x > 0$ alors $x+1 > 0$ et $\dfrac{x}{x+1} > 0$.

   De plus, $u : x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, comme quotient de fonctions dérivables. Donc $x \longmapsto x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

   Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur l'intervalle }]0,+\infty[}$ et $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[1 \times \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + x \times \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}}\right] \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)} \\ &= \left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + x \times \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x}\right] f(x). \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\forall x > 0, \quad f'(x) = \left[\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \dfrac{1}{x+1}\right] f(x)}$.

2. (a) φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont et $\forall x > 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{x(x+1)^2} \text{ donc } \boxed{\varphi'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}} > 0,$$

   car $x > 0$ et $(x+1)^2 > 0$. Donc $\boxed{\varphi \text{ est strictement croissante sur l'intervalle }]0,+\infty[}$.

   (b) En $+\infty$: $\dfrac{x}{x+1} = \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $\boxed{\varphi(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \dfrac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$, par composition et opérations sur les limites.

   φ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\boxed{\forall x > 0,\ \varphi(x) < 0}$.

3. $\forall x > 1$, $f'(x) = \varphi(x)f(x) < 0$ car $\varphi(x) < 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)} > 0$.

   Donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle }]0,+\infty[}$.