

Applications linéaires

Exercice 1 Soit E l'espace vectoriel engendré par les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(t) = \sin(2t)$, $f_2(t) = \cos(2t)$, $f_3(t) = e^{-t} \sin(2t)$ et $f_4(t) = e^{-t} \cos(2t)$.

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Pour $f \in E$, on pose $\psi(f) = f'' + 4f$.

Montrer que ψ induit un endomorphisme de E . Déterminer son noyau et son rang.

Exercice 2 Soit Ψ l'application définie par $\Psi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) \mapsto \int_0^1 \frac{ax + b}{(x+1)(x-2)} dx \end{cases}$

1. Démontrer que Ψ est linéaire.
2. On pose $u = (1, 1)$ et $v = (1, -2)$. Démontrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer $\Psi(u)$ et $\Psi(v)$.
4. En déduire la valeur de $\Psi(a, b)$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$.
2. Montrer que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\} \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
3. En déduire une CNS pour que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ soient supplémentaires dans E .

Exercice 4 Soit un entier $n \geq 3$, et le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'application Δ définie sur E par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

On pose $P_0 = 1$ et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_k = \prod_{j=0}^{k-1} (X - j)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E .
2. Calculer $\Delta(P_k)$ pour $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$.
3. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\Delta(P_k) = kP_{k-1}$.
4. Montrer que Δ est un endomorphisme de E , puis donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
5. Déterminer le rang puis le noyau de Δ .
6. On souhaite résoudre dans E l'équation linéaire $(\star) : \Delta(P) = X^2$.
 - (a) Montrer que si Q_1 et Q_2 sont solutions de $(\star)$ alors $Q_1 - Q_2$ est constant.
 - (b) Calculer $P_1 + P_2$. En déduire l'ensemble des solutions de $(\star)$.

(c) Déterminer l'ensemble des solutions de $(\star)$ qui vérifient $P(0) = 0$.

Exercice 5 Soit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \\ (x, y, z) & \longmapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, 0 \right) \end{cases}$

1. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base et la dimension des espaces caractéristiques de f .

Exercice 6 Soit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \\ (x, y, z) & \longmapsto (y, x, -z) \end{cases}$.

1. Montrer que f est une symétrie de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base et la dimension des espaces caractéristiques de f .

Exercice 7 Soit l'application φ définie sur $E = \mathbb{C}_n[X]$ par $\varphi(P) = \frac{1}{2}(P(X) + P(-X))$.

1. Montrer que φ est un projecteur de E . Déterminer ses espaces caractéristiques.
2. Montrer que $\text{Id}_E - \varphi$ est un projecteur de E . Déterminer ses espaces caractéristiques.
3. Montrer que $2\varphi - \text{Id}_E$ est une symétrie de E . Déterminer ses espaces caractéristiques.

Exercice 8 Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'application

$$f_m : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \\ (x, y, z) & \longmapsto (x + y + mz, x + my + z, mx + y + z) \end{cases}$$

1. Montrer que f_m est une application linéaire.
2. Déterminer toutes les valeurs de m pour lesquelles f_m est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. Dans cette question, $m = -2$.
 - (a) Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f_{-2})$.
 - (b) Déterminer une base et la dimension de $\text{Im}(f_{-2})$.
 - (c) Démontrer que $\text{Ker}(f_{-2})$ et $\text{Im}(f_{-2})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
 - (d) Écrire l'expression analytique de la projection p sur $\text{Ker}(f_{-2})$ parallèlement à $\text{Im}(f_{-2})$.