Correction du Test n° 16

Sujet A

1.

2. On dispose de 5 jetons numérotés de 1 à 5, que l'on doit ranger dans 5 casiers numérotés de 1 à 5, chaque casier pouvant contenir de 0 à 5 jetons. Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre de rangements vérifiant les conditions indiquées.

   (a) Choisir un rangement tel que le casier numéro 5 soit vide, revient à choisir, pour chaque jeton, un casier parmi les quatre numérotés de 1 à 4.

   $\boxed{\text{Le nombre de ces rangements est donc } 4^5 = 1024}$.

   (b) Choisir un rangement tel que un casier contienne 3 jetons et un autre 2 jetons, revient à choisir un casier parmi les cinq casiers et trois jetons parmi les cinq jetons pour les mettre dans ce casier, puis à choisir un casier parmi les quatre restants et mettre les deux jetons restants dans ce dernier.

   $\boxed{\text{Le nombre de ces rangements est donc } 5 \times \binom{5}{3} \times 4 = 5 \times 10 \times 4 = 200}$.

3. On a $F = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ et $G = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ car la première matrice est la moitié de la somme des deux autres. F et G sont des plans vectoriels.

   Soit $A \in F \cap G$. Alors $A \in G$, donc il existe deux réels α et β tels que
   $A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha - 2\beta \\ \alpha - \beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}$. Or $A \in F$, donc
   $\begin{cases} \alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$
   Donc $F \cap G = \{0\}$. Or $\dim F + \dim G = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

Correction du Test n° 16

Sujet B

1.

2. On dispose de 5 jetons numérotés de 1 à 5, que l'on doit ranger dans 5 casiers numérotés de 1 à 5, chaque casier pouvant contenir de 0 à 5 jetons. Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre de rangements vérifiant les conditions indiquées.

   (a) Choisir un rangement tel que le jeton numéro 1 soit dans le casier numéro 1, revient à mettre ce jeton dans le casier numéro 1 puis à choisir, pour chacun des jetons numérotés de 2 à 5, un casier parmi les cinq casiers.

   $\boxed{\text{Le nombre de ces rangements est donc } 1 \times 5^4 = 625}$.

(b) Choisir un rangement tel que deux casiers exactement soient occupés, revient à choisir deux casiers parmi les cinq puis à ranger les cinq jetons dans ces deux casiers, sans qu'aucun ne soit vide.

$$\boxed{\text{Le nombre de ces rangements est donc } \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times (2^5 - 2) = 10 \times 30 = 300}.$$

3. On a $F = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ et $G = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ car la première matrice est la moitié de la somme des deux autres. F et G sont des plans vectoriels.
Soit $A \in F \cap G$. Alors $A \in G$, donc il existe deux réels α et β tels que
$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ \alpha-2\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}$. Or $A \in F$, donc
$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$
Donc $F \cap G = \{0\}$. Or $\dim F + \dim G = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.