Correction du devoir maison n° 16

Exercice 1 On considère $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(a, a, a, a), a \in \mathbb{R}\}$.

$$1. u = (x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow x = -y - z - t \Leftrightarrow u = (-y - z - t, y, z, t) = y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1)$$

Si on note $u_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 0, 1, 0)$ et $u_3 = (-1, 0, 0, 1)$ alors

$F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

La famille (u_1, u_2, u_3) étant génératrice de F , est-elle également libre ?

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

(u_1, u_2, u_3) est donc une famille libre et génératrice de F ,

c'est une base de F et $\dim F = 3$

$$2. u \in G \Leftrightarrow u = a(1, 1, 1, 1) \text{ donc } G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1))$$

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont une base est $(1, 1, 1, 1)$ et de dimension 1.

$$3. \dim \mathbb{R}^4 = \dim F + \dim G \text{ et } u \in F \cap G \Leftrightarrow u = (a, a, a, a) \text{ avec } 4a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}. \text{ Finalement, } \mathbb{R}^4 = F \oplus G.$$

Exercice 2 Dans chaque cas, montrer que F est un s.e.v. d'un e.v. E de dimension finie, puis déterminer un supplémentaire de F dans E :

$$1. F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = P'(1) = 0\}$$

$P \in F \Leftrightarrow P = (X - 1)^2(aX + b) = aX(X - 1)^2 + b(X - 1)^2$ donc $F = \text{Vect}(P_1, P_2)$ où $P_1 = X(X - 1)^2$ et $P_2 = (X - 1)^2$, est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$. La famille (P_1, P_2) est libre car à degrés échelonnés donc (P_1, P_2) est une base de F et $\dim F = 2$.

$\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ donc, pour trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$ on doit compléter (P_1, P_2) avec deux vecteurs pour constituer une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

On peut prendre $(X, 1)$ par exemple, on aura alors une famille de 4 vecteurs libres car à degrés échelonnés, donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et

$G = \text{Vect}(X, 1)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

2. F est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, triangulaires supérieures, et à coefficients réels.

$F = \text{Vect}(E_1, E_2, E_3)$ avec $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui constituent une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car ce sont des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc une base de F et $\dim F = 3$

Comme $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, il suffit de compléter (E_1, E_2, E_3) avec un vecteur pour constituer une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient et

$G = \text{Vect } E_4$ est un supplémentaire de F dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. $F = \text{Vect}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, où $a_1 = (3, 0, 4, 1)$, $a_2 = (0, 1, 2, 1)$, $a_3 = (-5, 0, -2, 3)$

et $a_4 = (2, 1, 2, -1)$

On démontre que la famille (a_1, a_2, a_3, a_4) n'est pas libre et est de rang 3 en montrant que la matrice des coordonnées de ses vecteurs colonnes est équivalente à une matrice de rang 3.

On peut prendre alors (a_1, a_2, a_3) comme base de F et en vérifiant que (a_1, a_2, a_3, e_4) est libre, en posant par exemple $e_4 = (0, 0, 0, 1)$, on a une base de $\mathbb{R}^4$.

$G = \text{Vect } (e_4)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.