Exercices école ouverte

1 Espaces vectoriels

Exercice 1 Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$ et $F = \{(a, 2b - a, b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que E et F sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera des bases et les dimensions.
2. Montrer que $E \cap F$ est une droite vectorielle.
3. Déterminer une base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $u_1 \in E \cap F$, $u_2 \in E$ et $u_3 \in F$.

Exercice 2 Déterminer le rang de $\mathscr{F} = (u, v, w)$ et déterminer si $\mathscr{F}$ est une base de l'espace $\mathbb{R}^3$:

1. $u = (1, 0, 1),\ v = (-1, 2, 3),\ w = (1, 2, 5)$
2. $u = (1, 0, 1),\ v = (-1, 2, 3),\ w = (1, 2, -1)$

Exercice 3 Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$F = \left\{ f \in E, f(0) = f'(0) = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit G l'ensemble des fonctions affines.
   Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left\{(1, 1, 1)\right\}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Décomposer le vecteur $(2, 2, 3)$ selon ces deux sous-espaces vectoriels.
4. Donner la décomposition d'un vecteur quelconque selon ces deux sous-espaces vectoriels.

Exercice 5 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et

$$F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Trouver un supplémentaire de F dans E.

Exercice 6 On note $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à deux, et $\mathbb{R}_1[X]$ celui des polynômes de degré inférieur ou égal à un.

1. On considère l'ensemble $E = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] / \ P(-1) = P'(-1) = 0\right\}$.

   Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, puis déterminer une base et la dimension de E.

2. On considère la famille de polynômes $\mathscr{B}' = (X^2, (X+1)^2, (X+2)^2)$.

   (a) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. En déduire un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Exprimer les polynômes 1 et X comme combinaisons linéaires des polynômes de $\mathscr{B}'$.

   (c) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.

   Déterminer, en fonction de a, b et c, la matrice colonne des coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 7 On considère l'ensemble $H = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ (1-X^2)P'' - 3XP' + 15P = 0 \ \right\}$.

1. Sans expliciter H, montrer que H est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $P \in H$ non nul, de degré $n \in \mathbb{N}$ et de coefficient dominant $a_n \neq 0$.

   Expliciter le terme de plus haut degré de $(1-X^2)P'' - 3XP' + 15P$. En déduire que $n = 3$.

   indication : on étudiera d'abord les cas $n = 0$ et $n = 1$.

3. Déterminer alors une base de H.

Exercice 8 On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, 0_2 sa matrice nulle et I_2 sa matrice unité.

On rappelle que le sous espace vectoriel engendré par $N, P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est noté $\mathrm{Vect}(N, P)$.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. Ainsi,

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) / \ AM - MA = 0_2\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $AM = MA$ si, et seulement si, $c = b$ et $d = a - 2b$.

   En déduire que $\mathcal{C}(A) = \mathrm{Vect}(I_2, J)$, où J est une matrice à déterminer.

3. Montrer que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{C}(A) \oplus \mathrm{Vect}(K, L)$.

2 Dénombrement

Exercice 1 Une cantine scolaire fonctionne sous forme de self. Les élèves peuvent choisir entre quatre entrées, trois plats et cinq desserts différents.

1. On suppose qu'un élève choisit une entrée, un plat et un dessert. Combien de menus différents peut-on constituer ?
2. Si un élève ne mange pas de dessert il a le droit, pour compenser, de prendre deux entrées.

   Combien de possibilités a-t-il pour constituer son menu ?
3. Deux élèves qui aiment goûter à tout décident de s'organiser ainsi : ils choisissent des entrées, plats et desserts différents et se les partagent ensuite.

   Combien ont-ils de menus possibles ?

Exercice 2 Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne.
Quel est le nombre de tirages vérifiant chacune des conditions suivantes :

1. Au moins une boule blanche a été tirée.
2. Une boule noire au plus a été tirée.
3. Trois boules noires et une boule blanche ont été tirées dans et ordre.
4. Deux boules noires et deux boules blanches ont été tirées.

Exercice 3 Dans un jeu de tarot, il y a 21 atouts. On en tire simultanément cinq au hasard. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels :

1. Au moins un atout est un multiple de cinq ?
2. Il y a exactement un multiple de cinq et un multiple de trois ?
3. On a tiré le 1 ou le 21 ?

Exercice 4 De combien de manières peut-on classer quatre personnes en admettant qu'il puisse y avoir des ex aequo ?

3 Analyse asymptotique

Exercice 1 Déterminer des équivalents des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\ln(1+\tan(x))}{\sqrt{\sin(x)}}$ en 0

2. $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ en $+\infty$

3. $\ln(\cos(x))$ en 0

4. $\sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)}$ en $+\infty$

Exercice 2 Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2+e^{-2n}+\sqrt{n^5}}{\ln(2n)+2n-3}$ 2. $u_n = (n+3\ln(n))e^{-(n+1)}$ 3. $u_n = \dfrac{\ln\left(n^2+1\right)}{n^2+1}$

4. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)$ 5. $u_n = \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$

Exercice 3 Étudier le comportement des fonctions suivantes (existence d'asymptote ou de tangente et position relative) à l'endroit indiqué :

1. $f(x) = \ln\left(1+x+x^2\right)$ au voisinage de 0 .
2. $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1}$ au voisinage de 0 .
3. $f(x) = 2\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
4. $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = x^2\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$.