

Correction des exercices école ouverte

1 Espaces vectoriels

Exercice 1 Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0\}$ et $F = \{(a, 2b - a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

- $E = \text{Vect}((1, 1, 1), (0, 1, 2))$ et $F = \text{Vect}(1, -1, 0), (0, 2, 1)$ sont des s.e.v. de \mathbb{R}^3 de dimension 2 car ces vecteurs ne sont pas colinéaires et $((1, 1, 1), (0, 1, 2))$ est une base de E , $(1, -1, 0), (0, 2, 1)$ est une base de F .
- $(1, -1, 0) \wedge (0, 2, 1) = (-1, -1, 2)$ est un vecteur normal à F
 $(1, -2, 1) \wedge (-1, -1, 2) = (-3, -3, -3)$ est un vecteur directeur de $E \cap F$
- $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, -1, 0))$ est une base de \mathbb{R}^3 car c'est une famille libre de 3 vecteurs de \mathbb{R}^3 telle que $(1, 1, 1) \in E \cap F$, $(0, 1, 2) \in E$ et $(1, -1, 0) \in F$.

Exercice 2 Déterminer le rang de $\mathcal{F} = (u, v, w)$ et déterminer si \mathcal{F} est une base de l'espace \mathbb{R}^3 :

- $u = (1, 0, 1), v = (-1, 2, 3), w = (1, 2, 5)$ $\text{rg } \mathcal{F} = 3$ et \mathcal{F} est une base de \mathbb{R}^3
- $u = (1, 0, 1), v = (-1, 2, 3), w = (1, 2, -1) = 2u + v$
 $\text{rg } \mathcal{F} = 2$ et \mathcal{F} n'est pas une base de \mathbb{R}^3

Exercice 3 Soit E l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $F = \{f \in E, f(0) = f'(0) = 0\}$.

- La fonction nulle appartient à F et $\forall f, g \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (f + \lambda g)(0) = f(0) + \lambda g(0) = 0$ et $(f + \lambda g)'(0) = f'(0) + \lambda g'(0) = 0$ donc $f + \lambda g \in F$ et

F est un sous-espace vectoriel de E .

- Soit G l'ensemble des fonctions affines.

$f \in G \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$ donc $G = \text{Vect}(f_1, f_2)$ où f_1 est définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = x$ et f_2 est définie sur \mathbb{R} par $f_2(x) = 1$ donc

G est un sous-espace vectoriel de E .

- $f \in F \cap G \Leftrightarrow f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = b = 0, f'(0) = a = 0$ donc $f = 0$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

De plus, $\forall f \in E, f(x) = \underbrace{f(x) - (f(0) + xf'(0))}_{\in F} + \underbrace{f(0) + xf'(0)}_{\in G}$ donc $E = F + G$ et

finalement $E = F \oplus G$.

Exercice 4 Dans \mathbb{R}^3 , on considère les sous-ensembles $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$.

- $u = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow u = (z - y, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$ donc $F = \text{Vect}((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$ donc F et G sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
- $\dim F = 2$ car $(-1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires et $\dim G = 1$ donc $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3$.
De plus $u \in F \cap G \Leftrightarrow u = (a, a, a)$ avec $a + a - a = 0$ d'où $a = 0$ et $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$.
Finalement F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
- $(2, 2, 3) = a(-1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(1, 1, 1) \Leftrightarrow a = -1, b = 0$ et $c = 3$ (à résoudre).
- $(x, y, z) = a(-1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(1, 1, 1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + z \\ -x - y + 2z \\ x + y - z \end{pmatrix}$ en inversant la matrice à l'aide de Gauss Jordan par exemple.

Exercice 5 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} et $F = \left\{ f \in E, \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$.

- La fonction nulle vérifie $\int_0^1 f(t)dt = 0$ donc elle appartient à F .
De plus, $\forall f, g \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_0^1 (f + \lambda g)(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \lambda \int_0^1 g(t)dt = 0$ donc $f + \lambda g \in F$ et F est un sous-espace vectoriel de E .
- Soit G le sous espace vectoriel de E engendré par la fonction constante égale à 1, c'est-à-dire l'espace des fonctions de E constantes.
 $f \in F \cap G \Leftrightarrow f(x) = c, \forall x \in [0, 1]$ et $\int_0^1 f(t)dt = c = 0$ donc $F \cap G = \{0_E\}$.
De plus, $\forall f \in E, f(x) = \underbrace{f(x) - \int_0^1 f(t)dt}_{\in F} + \underbrace{\int_0^1 f(t)dt}_{\in G}$ donc $E = F + G$ et finalement $E = F \oplus G$.

Exercice 6 On note $\mathbb{R}_2[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à deux.

- Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors $P' = 2aX + b$, et on a :

$$P \in E \Leftrightarrow \begin{cases} P(-1) = 0 \\ P'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = 2a \end{cases}$$

Donc $E = \{aX^2 + 2aX + a, a \in \mathbb{R}\} = \{a(X+1)^2, a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((X+1)^2)$, qui est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par $(X+1)^2 \neq 0$.

Donc E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, de base $((X+1)^2)$, et de dimension 1.

2. (a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
 aX^2 + b(X+1)^2 + c(X+2)^2 = 0 &\iff (a+b+c)X^2 + (2b+4c)X + (b+4c) = 0 \\
 &\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2b + 4c = 0 \\ b + 4c = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2b + 4c = 0 \\ 4c = 0 \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{cases} \\
 &\iff a = b = c = 0.
 \end{aligned}$$

Donc \mathcal{B}' est une famille libre de 3 éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension 3.

Donc \mathcal{B}' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}((X+1)^2) \oplus \text{Vect}(X^2, (X+2)^2)$.

Donc E et $\text{Vect}(X^2, (X+2)^2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) $X^2 - 2(X+1)^2 + (X+2)^2 = X^2 - 2X^2 - 4X - 2 + X^2 + 4X + 4 = 2$.

Donc $1 = \frac{1}{2}X^2 - (X+1)^2 + \frac{1}{2}(X+2)^2$.

$(X+2)^2 - (X+1)^2 - 3 = X^2 + 4X + 4 - X^2 - 2X - 1 - 3 = 2X$.

Donc $X = \frac{1}{2}(X+2)^2 - \frac{1}{2}(X+1)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}X^2 - (X+1)^2 + \frac{1}{2}(X+2)^2\right)$.

Donc $X = -\frac{3}{4}X^2 + (X+1)^2 - \frac{1}{4}(X+2)^2$.

(c) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$P = aX^2 + b\left(-\frac{3}{4}X^2 + (X+1)^2 - \frac{1}{4}(X+2)^2\right) + c\left(\frac{1}{2}X^2 - (X+1)^2 + \frac{1}{2}(X+2)^2\right).$$

Donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(P) = \begin{pmatrix} a - \frac{3}{4}b + \frac{1}{2}c \\ b - c \\ -\frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$.

Exercice 7 $H = \{P \in \mathbb{R}[X] / (1 - X^2)P'' - 3XP' + 15P = 0\} \subset \mathbb{R}[X]$.

1. Si $P = 0$ alors $P'' = P' = 0$ et $(1 - X^2)P'' - 3XP' + 15P = 0$. Donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in H$.

Soient $P, Q \in H$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} & (1 - X^2)(\lambda P + \mu Q)'' - 3X(\lambda P + \mu Q)' + 15(\lambda P + \mu Q) \\ &= \underbrace{\lambda((1 - X^2)P'' - 3XP' + 15P)}_{=0 \text{ car } P \in H} + \underbrace{\mu((1 - X^2)Q'' - 3XQ' + 15Q)}_{=0 \text{ car } Q \in H} = 0. \end{aligned}$$

Donc $\lambda P + \mu Q \in H$ et H est stable par combinaison linéaire.

Donc H est bien un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $a_n \neq 0$.

Si $n = 0$, $P' = P'' = 0$ et $(1 - X^2)P'' - 3XP' + 15P = 15a_0 \neq 0$. Dans ce cas, $P \notin H$.

Si $n = 1$, $P' = a_1$, $P'' = 0$ et $(1 - X^2)P'' - 3XP' + 15P = 12a_1 X + 15a_0 \neq 0$. Dans ce cas, $P \notin H$.

Si $n \geq 2$, le terme de plus haut degré de $(1 - X^2)P'' - 3XP' + 15P$ est

$$-n(n-1)a_n X^2 X^{n-2} - 3na_n X X^{n-1} + 15a_n X^n = (-n^2 - 2n + 15)a_n X^n.$$

Si $P \in H$ alors $(1 - X^2)P'' - 3XP' + 15P = 0$ et donc $-n^2 - 2n + 15 = 0$, car $a_n \neq 0$.

L'équation $-x^2 - 2x + 15 = 0$ a pour racines évidentes $3 \in \mathbb{N}$ et $-5 \notin \mathbb{N}$.

Donc si $P \in H$ est non nul alors son degré est $n = 3$.

3. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. On a : $P' = 3aX^2 + 2bX + c$ et $P'' = 6aX + 2b$.

$$\begin{aligned} & P \in H \\ \iff & (1 - X^2)(6aX + 2b) - 3X(3aX^2 + 2bX + c) + 15(aX^3 + bX^2 + cX + d) = 0 \\ \iff & 7bX^2 + (6a + 12c)X + (2b + 15d) = 0 \\ \iff & b = d = 0 \text{ et } a = -2c \\ \iff & P = -2cX^3 + cX = c(-X^3 + X). \end{aligned}$$

Donc $H = \text{Vect}(P_1)$, avec $P_1 = -X^3 + X$.

Exercice 8

1. On a $A0_2 - 0_2A = 0_2$, donc $0_2 \in \mathcal{C}(A)$.

Soient $M, N \in \mathcal{C}(A)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A = \underbrace{\lambda(AM - MA)}_{=0_2 \text{ car } M \in \mathcal{C}(A)} + \underbrace{\mu(AN - NA)}_{=0_2 \text{ car } N \in \mathcal{C}(A)} = 0_2.$$

Donc $\lambda M + \mu N \in \mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(A)$ est stable par combinaisons linéaires.

Finalement, $\mathcal{C}(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a : $AM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a-c & b-d \end{pmatrix}$ et

$$MA = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } M \in \mathcal{C}(A) \iff AM = MA \iff \begin{cases} a+c = a+b \\ b+d = a-b \\ a-c = c+d \\ b-d = c-d \end{cases} \iff \begin{cases} c = b \\ d = a-2b \end{cases}.$$

$$\text{Donc } M \in \mathcal{C}(A) \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-2b \end{pmatrix} \iff M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, J), \text{ où } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. On a :

$$(xI_2 + yJ) + (zK + tL) = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ y & x-2y \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } M = (xI_2 + yJ) + (zK + tL) \iff \begin{cases} x+z = a \\ y+t = b \\ y = c \\ x-2y = d \end{cases} \iff \begin{cases} z = a-2c-d \\ t = b-c \\ y = c \\ x = 2c+d \end{cases}.$$

Donc toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice de $\mathcal{C}(A)$ et d'une matrice de $\text{Vect}(K, L)$.

$$\text{Donc } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{C}(A) \oplus \text{Vect}(K, L).$$

2 Dénombrement

Exercice 1 Une cantine scolaire fonctionne sous forme de self. Les élèves peuvent choisir entre quatre entrées, trois plats et cinq desserts différents.

1. On suppose qu'un élève choisit une entrée, un plat et un dessert.

On peut constituer $4 \times 3 \times 5 = 60$ menus différents.

2. Si un élève ne mange pas de dessert il a le droit, pour compenser, de prendre deux entrées.

Il a $\binom{4}{2} \times 3 = 18$ possibilités pour constituer son menu s'il prend deux entrées différentes.

S'il choisit aussi de manger deux fois la même entrée, il faut ajouter les 4 possibilités de prendre deux entrées identiques ce qui donne $4 \times 3 + \binom{4}{2} \times 3 = 30$ menus possibles.

3. Deux élèves qui aiment goûter à tout décident de s'organiser ainsi : ils choisissent des entrées, plats et desserts différents et se les partagent ensuite.

Ils ont $\binom{4}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{5}{2} = 6 \times 3 \times 10 = 180$ menus possibles.

Exercice 2 Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne.

Il y a au total $13^4 = 28\,561$ tirages possibles .

1. Au moins une boule blanche a été tirée.

On utilise le complémentaire : Aucune boule blanche n'a été tirée, autrement dit 4 boules noires ont été tirées ce qui fait 8^4 possibilités.

Donc il y a $13^4 - 8^4 = 24\,465$ tirages avec au moins une boule blanche.

2. Une boule noire au plus a été tirée.

0 boule noire : 5^4

1 boule noire exactement : $5^3 \times 8 \times 4$

Donc il y a $5^4 + 5^3 \times 8 \times 4 = 4\,625$ tirages avec au plus une boule noire.

3. $8^3 \times 5 = 2\,560$ tirages comportent trois boules noires et une boule blanche dans et ordre.

4. $8^2 \times 5^2 \times \binom{4}{2} = 9\,600$ tirages comportent deux boules noires et deux boules blanches.

Exercice 3 Dans un jeu de tarot, il y a 21 atouts. On en tire simultanément cinq au hasard.

Il y a au total $\binom{21}{5}$ tirages possibles.

1. Au moins un atout est un multiple de cinq ?

Il y a 4 atouts multiples de 5, donc 17 atouts qui ne sont pas multiples de 5, et $\binom{17}{5}$ tirages qui ne contiennent aucun multiple de 5. Par passage au complémentaire, il reste donc

$\binom{21}{5} - \binom{17}{5}$ tirages avec au moins un multiple de 5.

2. Il y a exactement un multiple de cinq et un multiple de trois ?

Il faut distinguer le cas où on tire le 15 (qui est le seul multiple de cinq et de trois à la fois) et celui où les deux multiples sont différents.

Sachant qu'il y a onze atouts qui ne sont multiples ni de cinq ni de trois, 3 atouts multiples de 5 sans le 15 et 6 atouts multiples de 3 sans le 15 on a

$$\binom{11}{4} + 3 \times 6 \times \binom{11}{3} \text{ tirages possibles.}$$

3. On a tiré le 1 ou le 21 ?

$$\text{Ni le 1, ni le 21 : } \binom{19}{5}$$

Par passage au complémentaire, il reste donc

$$\binom{21}{5} - \binom{19}{5} \text{ tirages avec le 1 ou le 21.}$$

Exercice 4 De combien de manières peut-on classer quatre personnes en admettant qu'il puisse y avoir des ex aequo ?

- s'il n'y a pas d'ex aequo, $4! = 24$ classements.
- s'il y a quatre ex aequo, 1 classement.
- s'il y a trois ex aequo, $\binom{4}{3} \times 2 = 8$ classements car il faut choisir les trois ex aequo, et leur classement).
- s'il y a deux ex aequo, $\binom{4}{2} \times 3! = 36$
- s'il y a deux fois deux ex aequo, $\binom{4}{2} = 6$ classements car il suffit de choisir les deux ex aequo de la première place.

Il y a donc au total 75 classements possibles.

3 Analyse asymptotique

Exercice 1 Déterminer des équivalents des fonctions suivantes :

$$1. \frac{\ln(1 + \tan x)}{\sqrt{\sin(x)}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\tan x}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$$

$$2. \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{5}{6}}$$

$$3. \ln(\cos(x)) = \ln(1 + \cos x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x - 1 = 0$$

$$4. \sqrt{\ln(x+1) - \ln(x)} = \sqrt{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Exercice 2 Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

$$1. u_n = \frac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\frac{5}{2}}}{2n} = \frac{1}{2} n^{\frac{3}{2}} \text{ car } \ln(2n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(2n)$$

$$n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^{\frac{5}{2}}) \text{ et } e^{-2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^{\frac{5}{2}})$$

$$2. u_n = (n + 3 \ln(n)) e^{-(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n e^{-(n+1)}$$

$$3. u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n^2 + 1} = \frac{\ln(n^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \ln(n)}{n^2}$$

$$4. u_n = \ln\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2}\right) = \ln\left(\frac{n^2 + 2 - 1}{n^2 + 2}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2 + 2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2 + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$$

$$5. u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} = \frac{n^2 + n + 1 - (n^2 - n + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n}{2\sqrt{n^2}} = 1$$

Exercice 3

1. $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ au voisinage de 0 . Développement limité de f à l'ordre 2 en 0 :

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \text{ en } 0 \text{ avec } u = x + x^2, u^2 = x^2 + o(x^2)$$

$$\ln(1 + x + x^2) = x + x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

La courbe admet donc en 0 une tangente d'équation $y = x$, et le terme suivant du développement limité étant toujours positif au voisinage de 0, la courbe sera située au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

2. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ au voisinage de 0 . Développement limité de f à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{4} + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2) \end{aligned}$$

en appliquant $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$ en 0 avec $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$, $u^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$.

La courbe admet une tangente d'équation $y = -\frac{x}{2} + 1$ et elle est située au-dessus de sa tangente au voisinage de 0 car $\frac{x^2}{12} \geq 0$ pour tout x .

3. $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$. Pour $t > 0$:

$$\begin{aligned}
tf\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{2t}{\sqrt{t}} - t\sqrt{\frac{1}{t} + 1} - t\sqrt{\frac{1}{t} - 1} \\
&= 2\sqrt{t} - \sqrt{t}\sqrt{1+t} - \sqrt{t}\sqrt{1-t} \\
&\underset{t \rightarrow +0}{=} \sqrt{t} \left[2 - \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}\right) - \left(1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}\right) + o(t^2) \right] \\
&= \frac{t^2\sqrt{t}}{4} + o(t^2\sqrt{t})
\end{aligned}$$

D'où $\frac{1}{x}f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{4x^2\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$ et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{4x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.

La admet l'axe des abscisses pour asymptote en $+\infty$ et elle est située au-dessus de l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ car $\frac{1}{2x\sqrt{x}} \geq 0$ pour tout $x > 0$.

4. $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$. Pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned}
tf\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{1}{1 + e^t} \underset{t \rightarrow +0}{=} \frac{1}{2 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)} \\
&\underset{t \rightarrow +0}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{12} + o(t^3)} \\
&\underset{t \rightarrow +0}{=} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{4} - \frac{t^3}{8} + o(t^3) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^3}{24} + o(t^3) \right)
\end{aligned}$$

en appliquant $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ en 0 avec

$$u = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{12} + o(t^3), u^2 = \frac{t^2}{4} + \frac{2t^3}{8} + o(t^3) = \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{4} + o(t^3), u^3 = \frac{t^3}{8} + o(t^3)$$

Donc $\frac{1}{x}f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{48x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ et $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

La courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ en $+\infty$ et elle est située au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$ car $\frac{1}{48x^2} \geq 0$ pour tout x .

5. $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$. Pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned}
tf\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{1}{t} \arctan\left(\frac{t}{1+t}\right) \\
\frac{t}{1+t} &\underset{t \rightarrow +0}{=} t(1 - t + t^2 + o(t^2)) = t - t^2 + t^3 + o(t^3)
\end{aligned}$$

En utilisant $\arctan u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$ avec $u = t - t^2 + t^3 + o(t^3)$, $u^3 = t^3 + o(t^3)$ on a

$$\arctan\left(\frac{t}{1+t}\right) \underset{t \rightarrow +0}{=} t - t^2 + t^3 - \frac{t^3}{3} + o(t^3) = t - t^2 + \frac{2t^3}{3} + o(t^3)$$

puis $\frac{1}{x}f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et enfin

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x - 1 + \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

La courbe admet donc en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x - 1$, et elle est située au-dessus cette l'asymptote au voisinage de $+\infty$ car $\frac{2}{3x} \geq 0$ pour tout $x > 0$.