

Correction du devoir maison n° 17

Exercice 1 1. A , B et C sont trois ensembles finis.

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}((A \cup B) \cup C) = \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(C) - \text{Card}((A \cup B) \cap C)$$

$$\text{Or Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \text{ et } (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Et en remplaçant on trouve

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) \\ &\quad - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

2. Soit A l'ensemble des élèves qui apprennent l'anglais, B l'espagnol et C l'allemand.

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = 900 \quad \text{Card}(A \cap B \cap C) = 0$$

$$\text{Card}(A) = 880 \quad \text{Card}(B) = 292 \quad \text{Card}(C) = 170$$

$$\text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(B \cap C) = -900 + 880 + 292 + 170 = 442$$

442 élèves apprennent deux langues.

Exercice 2 Une urne contient cinq boules rouges numérotées de 1 à 5, et quatre vertes numérotées de 1 à 4.

1. On tire successivement et sans remise trois boules.

(a) Il y a $9 \times 8 \times 7 =$ 504 tirages au total.

(b) Les tirages bicolores sont composés

soit d'une boule rouge et de deux vertes : $(5 \times 4 \times 3) \times 3 = 180$ possibilités,

soit de deux boules rouges et d'une verte : $(5 \times 4 \times 4) \times 3 = 240$.

Il a donc $240 + 180 =$ 420 tirages bicolores.

(c) Le nombre de tirages contenant au plus deux boules rouges est égal au nombre total de tirages moins ceux contenant 3 boules rouges : $504 - 5 \times 4 \times 3 =$ 444

(d) Soit le tirage contient la boule rouge n° 3 et 2 vertes non n° 3 : $(1 \times 3 \times 2) \times 3 = 18$

Soit le tirage contient une boule rouge non n° 3, une verte n° 3 et une verte non n° 3 :

$$(4 \times 1 \times 3) \times 3 = 36$$

Il y a donc $36 + 18 =$

54 tirages contenant exactement une boule rouge et une boule portant le numéro 3.

2. On tire successivement et avec remise trois boules.

(a) $9^3 = 729$ b) une boule rouge et de deux vertes $(5 \times 4^2) \times 3 = 240$ une boule verte et de deux rouges $(5^2 \times 4) \times 3 = 300$. Il a donc $240 + 300 =$ 540 tirages bicolores.

c) $9^3 - 5^3 = 604$ d) la boule rouge n° 3 et 2 vertes non n° 3 : $(1 \times 3^2) \times 3 = 27$
une boule rouge non n° 3, une verte n° 3 et une verte non n° 3 $(4 \times 1 \times 3) \times 3 = 36$
Il y a donc $27 + 36 =$

63 tirages contenant exactement une boule rouge et une boule portant le numéro 3.

3. On tire simultanément trois boules.

(a) $\binom{9}{3} = 84$ b) une boule rouge et deux vertes $\binom{5}{1} \binom{4}{2} = 30$ une boule verte et deux rouges $\binom{4}{1} \binom{5}{2} = 40$. Il a donc $30 + 40 =$ 70 tirages bicolores.

c) $\binom{9}{3} - \binom{5}{3} = 74$ d) la boule rouge n° 3 et 2 vertes non n° 3 : $1 \times \binom{3}{2} = 3$
une boule rouge non n° 3, une verte n° 3 et une verte non n° 3 $\binom{4}{1} \times 1 \times \binom{3}{1} = 12$
Il y a donc $3 + 12 =$

15 tirages contenant exactement une boule rouge et une boule portant le numéro 3.

Exercice 3 On range aléatoirement cinq boules numérotées de 1 à 5 dans quatre boites également numérotées.

1. Puisque tout est distinguable, il y a 4 possibilités de rangement pour chaque boule, soit

$4^5 = 1024$ rangements possibles au total.

2. Il y a quatre rangements pour lesquels toutes les boules sont dans la même boite (un pour chaque boite).

3. Commençons par choisir les deux boites non vides, il y a $\binom{4}{2} = 6$ possibilités.

Une fois ce choix effectué, il y a 2^5 façons de caser les cinq boules dans nos deux boites, mais il faut en enlever deux si on veut que nos deux boites ne soient pas vides (les deux pour lesquelles une des deux boites recueille toutes les boules).

Cela fait donc finalement $6 \times (2^5 - 2)$ cas favorables

4. On peut répartir les cinq boules comme suit si on veut exactement une boîte vide : 3, 1, 1, 0 ou 2, 2, 1, 0. Dans le premier cas, il faut choisir la boîte contenant trois boules (4 choix), les trois boules en question ($\binom{5}{3} = 10$ choix), la boîte contenant la quatrième boule (3 choix) et la boîte contenant la dernière boule (2 choix).

Il y a donc $4 \times 10 \times 3 \times 2 = 240$ répartitions 3, 1, 1, 0.

Pour les 2, 2, 1, 0, il y a 4 choix pour la boîte contenant une seule boule, 5 choix pour la boule allant dans cette boîte, 3 choix pour la boîte vide, et enfin $\binom{4}{2} = 6$ choix pour les deux boules allant dans la première des deux boîtes restantes, soit $4 \times 5 \times 3 \times 6 = 360$ possibilités.

Finalement

le nombre de rangements qui ont exactement une boîte vide est de $240 + 360 = 600$

Autre correction On a 4 façons de choisir la boîte vide. Ensuite on remplit les 3 autres ce qui fait 3^5 façons, en enlevant les 3 possibilités pour lesquelles 1 seule boîte est remplie sur ces 3 et aussi les $3(2^5 - 2)$ possibilités pour les quelles il y aurait une boîte vide exactement parmi ces 3.

On obtient $4[3^5 - 3 - 3(2^5 - 2)] = 600$ possibilités.

5. On a calculé successivement les probabilités d'avoir trois, deux et une boîte vide.

Comme on ne peut pas avoir quatre boîtes vides, la probabilité de ne pas avoir de boîte vide est complémentaire de la somme des précédentes, elle vaut

$1024 - 4 - 180 - 600 = 240$