

NOM : .....

Lundi 9 octobre 2023

**Test n° 5****Sujet B**

**Questions de cours** Compléter : 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \dots$       2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \dots$

3. La dérivée de  $x \mapsto \tan x$  est la fonction .....

**Exercice**      On considère la fonction  $f : x \mapsto \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ .

1. Montrer que  $f$  est définie et dérivable sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  et que

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \left[ \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) + \frac{1}{x+1} \right] f(x).$$

---

---

---

---

---

---

---

---

2. Pour  $x > 0$ , on pose  $\varphi(x) = \ln \left( \frac{x}{x+1} \right) + \frac{1}{x+1}$ .

(a) Calculer  $\varphi'(x)$ . En déduire le sens de variation de  $\varphi$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

(b) Calculer la limite de  $\varphi$  en  $+\infty$ . En déduire le signe de  $\varphi$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

---

---

---

---

3. Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $] - 1, +\infty[$ .

---

---

---

---