Probabilités sur un univers fini et variables aléatoires

1 Expérience aléatoire et calcul de probabilités

1.1 Vocabulaire probabiliste

On considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ (ou épreuve), dont le résultat ne peut être prévu à l'avance avec certitude (il est soumis au hasard) et on note Ω l'ensemble des résultats possibles.

Vocabulaire ensembliste	**Définitions**	**Vocabulaire probabiliste**
Ω est un ensemble fini à n éléments.	$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $\text{card}\,(\Omega) = n$.	Ω est **l'univers** des issues (ou éventualités) possibles.
$A \subset \Omega$ est une partie de Ω.	$\omega \in A \Longrightarrow \omega \in \Omega$	A est un **événement** associé à $\mathcal{E}$. A est réalisé si le résultat de $\mathcal{E}$ appartient à A.
$\mathscr{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω. $\{\omega\}$ est un singleton de Ω. $\emptyset$ est l'ensemble vide.	$A \in \mathscr{P}(\Omega) \Longleftrightarrow A \subset \Omega$. $\omega \in \Omega$.	$\mathscr{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements associés à $\mathcal{E}$. $\{\omega\}$ est un **événement élémentaire** associé à $\mathcal{E}$. Ω est l'événement **certain**, $\emptyset$ est l'événement **impossible**.
$A \cup B$ est la réunion de deux parties de Ω. $A \cap B$ est l'intersection de deux parties de Ω.	$\omega \in A \cup B$ $\Longleftrightarrow \omega \in A$ ou $\omega \in B$. $\omega \in A \cap B$ $\Longleftrightarrow \omega \in A$ et $\omega \in B$.	A et B étant deux événements, $A \cup B$ est l'événement "A **ou** B", $A \cap B$ est l'événement "A **et** B".
A et B sont deux parties disjointes de Ω. $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans Ω.	$A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ et $A \cap B = \emptyset$. $A \subset \Omega$, $\overline{A} \subset \Omega$, $\overline{A} \cap A = \emptyset$ et $\overline{A} \cup A = \Omega$.	A et B sont deux événements **incompatibles**. $\overline{A}$ est l'événement **contraire** de A.
$(A_i)_{1 \leq i \leq k} \in (\mathscr{P}(\Omega))^k$ est une partition de Ω.	$\forall i,\ A_i \subset \Omega,\ \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$ et $\forall (i,j),\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$.	$(A_i)_{1 \leq i \leq k}$ est un **système complet d'événements** de Ω.

Cas particuliers : Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ alors

- $\big(\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\}\big)$ est un système complet de n événements
- pour tout événement A, $(A, \overline{A})$ est un système complet de deux événements.

1.2 Loi de probabilité sur un univers Ω fini

Définition 1. Une **probabilité** sur Ω est une application $\mathrm{P} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathrm{P}(A) \end{array} \right.$ vérifiant

1. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
2. Pour tous événements A et B incompatibles $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

Dans ce cas, on dit que $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ est un espace probabilisé fini.

Dans toute la suite $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ est un espace probabilisé fini.

Propriété 1. Si A et B sont deux événements alors

1. $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$. En particulier $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \cap A) + \mathrm{P}(B \cap \overline{A})$
3. $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$
4. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

Propriété 2. Si $(A_1, \ldots, A_k)$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathrm{P}\left(A_1 \cup \ldots \cup A_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(A_i)$$

Remarque : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{P}(\{\omega_i\}) \in [0,1]$ et $\mathrm{P}(\{\omega_1\}) + \cdots + \mathrm{P}(\{\omega_n\}) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$

Théorème 1. Soit $(p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n$ tel que $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

Il existe une unique probabilité P sur Ω telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

Elle est définie par $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathrm{P}(A) = \displaystyle\sum_{\omega_i \in A} p_i$.

Exemple 1. On lance deux dés tétraédriques bien équilibrés.
Proposer une loi de probabilité sur l'univers Ω des issues possibles.

1.3 Loi de probabilité uniforme sur un univers fini

Définition 2. Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

On dit que P est la **probabilité uniforme** sur Ω ssi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \mathrm{P}(\{\omega_j\})$

Dans ce cas on dit qu'il y a **équiprobabilité.**

Propriété 3. Si P est la probabilité uniforme sur $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ alors

1. $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{n}$
2. Pour tout événement A, $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{card}\,(A)}{\mathrm{card}\,(\Omega)} = \dfrac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$

Exemple 2. On prend simultanément 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. Proposer une loi de probabilité sur l'univers Ω des issues possibles, et calculer la probabilité des événements :

A : "obtenir l'as de coeur" B : "obtenir exactement deux rois"

C : "obtenir l'as de coeur ou exactement deux rois"

2 Variables aléatoires réelles

Définition 3. Une **variable aléatoire** (réelle) sur Ω est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

- L'ensemble des valeurs que peut prendre X est appelé **univers image** de X, et noté $X(\Omega)$.
- Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega /\ X(\omega) \in A\}$ est un **événement** noté $(X \in A)$.

Exemple 3. On lance deux dés tétraédriques bien équilibrés. On note X la somme des résultats.

1. Décrire les événements $(X = 4)$ et $(X \geq 6)$.
2. Calculer $\mathrm{P}(X = 4)$ et $\mathrm{P}(X \geq 6)$.

Remarque : Attention, écrire $X \geq a$ sans parenthèse signifie que $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geq a$. Dans ce cas, l'événement $(X \geq a)$ est certain et $\mathrm{P}(X \geq a) = 1$.

Définition 4. Soit X une v.a.r. sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X l'application

$$P_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathrm{P}(X \in A) \end{array} \right.$$

Lorsque deux variables aléatoires X et Y ont la même loi, on note $X \sim Y$.

Propriété 4. Si X est une v.a.r. sur Ω d'univers image $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors

1. $\{(X = x_1), \dots, (X = x_n)\}$ est un système complet d'événements de Ω.
2. Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $\mathrm{P}(X \in A) = \displaystyle\sum_{x_i \in A} \mathrm{P}(X = x_i)$.

Remarque : La loi P_X est entièrement déterminée par la donnée des $\mathrm{P}(X = x_i)$, $x_i \in X(\Omega)$.

Exemple 4. On lance deux dés tétraédriques bien équilibrés. On note X la somme des résultats.

Définir la loi de X à l'aide d'un tableau de valeurs.

Définition 5. Soit $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.
On note $f(X)$ la **variable aléatoire image** de la variable aléatoire X par la fonction f définie par $f(X)(\omega_i) = f\big(X(\omega_i)\big)$ pour tout $\omega_i \in \Omega$.

3 Probabilités conditionnelles et événements indépendants

3.1 Probabilités conditionnelles

Définition 6. Soit A un événement de probabilité non nulle.

La **probabilité conditionnelle** d'un événement B sachant A est le nombre réel

$$\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}_A(B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

Interprétation Dans le cas où il y a équiprobabilité, on a $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{card}\,(A \cap B)}{\mathrm{card}\,(A)}$. On évalue ainsi la probabilité de l'événement B en restreignant l'univers à A (qui est réalisé).

Propriété 5. Si A est un événement de probabilité non nulle.

alors l'application $\mathrm{P}_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & \mathrm{P}(B|A) \end{array} \right.$ est une probabilité sur Ω.

Propriété 6. Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles alors

1. $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}(A|B)$
2. si A et B sont incompatibles alors $\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(A|B) = 0$.

Exemple 5. Un quart d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte 1/12 de malades. Parmi les malades, il y a 4 non-vaccinés pour un vacciné.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne soit vaccinée et malade ?
2. En déduire la probabilité qu'une personne soit malade.
3. Quelle est la probabilité pour une personne non vaccinée de tomber malade ?

Propriété 7. Formule des probabilités composées

Si $(A_1, \ldots, A_k)$ est une famille d'événements tels que $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) > 0$ alors

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}(A_2|A_1) \times \cdots \times \mathrm{P}(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1}).$$

Exemple 6. Un joueur débute un jeu et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1,
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est de 0,8,
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est de 0,6.

Calculer la probabilité des événements :

A_k :"la première partie que le joueur gagne est la k-*ième* partie jouée"

B_k :"le joueur gagne au moins une partie sur k parties jouées"

Propriété 8. Formule des probabilités totales

Si $(A_1, \ldots, A_k)$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles

alors, pour tout événement B, $\quad \mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(A_i) \times \mathrm{P}(B|A_i).$

Exemple 7. Une urne contient dix boules : 2 bleues, 5 noires et 3 rouges. On effectue deux tirages successifs sans remise, et on note dans l'ordre les résultats obtenus.

Quelle est la probabilité que la deuxième boule soit bleue ?

Propriété 9. Formule de Bayes

Si A et B sont de probabilités non nulles alors

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B|A) + \mathrm{P}(\overline{A}) \times \mathrm{P}(B|\overline{A})}$$

Exemple 8. Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre quatre itinéraires A, B, C, D. Il choisit d'emprunter les itinéraires A, B et C avec les probabilités respectives 1/3, 1/4 et 1/12.

Les probabilités d'arriver en retard en empruntant les itinéraires A, B et C sont respectivement 1/20, 1/10 et 1/5. En empruntant l'itinéraire D il n'est jamais en retard.

L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?

3.2 Événements indépendants

Définition 7. Soient A et B deux événements.

On dit que A et B sont **indépendants** pour la probabilité P si $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$.

Propriété 10. Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles alors

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \text{ssi} \quad \mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B) \quad \text{ssi} \quad \mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A).$$

Remarque : D'après cette dernière propriété, on peut dire que des événements sont indépendants ssi la réalisation de l'un n'a aucune influence sur celle de l'autre. Attention, deux événements de probabilités non nulles incompatibles ne sont pas indépendants car $\mathrm{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$. Aussi, deux événements peuvent être indépendants pour une certaine probabilité mais pas pour une autre, ce qui n'est pas le cas des événements incompatibles.

Exemple 9. On lance deux dés bien équilibrés, un noir et un blanc. Montrer que les événements suivants sont deux à deux indépendants :

A : "le chiffre du dé noir est pair" B : "le chiffre du dé blanc est impair"
C : "les deux chiffres ont la même parité"

Propriété 11. Si A et B sont deux événements indépendants pour une probabilité P alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, puis $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également indépendants pour la probabilité P.

Définition 8. Soit $(A_1, \ldots, A_k)$ une famille d'événements.

On dit que $(A_1, \ldots, A_k)$ est une famille d'événements **mutuellement indépendants** pour la probabilité P si, pour toute partie I de $[\![1, k]\!]$,

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathrm{P}(A_i).$$

Remarque : Des événements deux à deux indépendants ne sont pas, en général, mutuellement indépendants (comme le montre l'exemple précédent). Par contre, des tirages successifs avec remises ou, plus généralement, des expériences aléatoires successives indépendantes conduisent naturellement à faire l'hypothèse que des événements sont mutuellement indépendants.

Exemple 10. Un archer tire sur deux cibles, une située à 20 m et l'autre à 50 m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la plus proche est p et la probabilité d'atteindre la plus éloignée est q avec $q < p$. On suppose les tirs indépendants. Il gagne le jeu si il atteint deux cibles consécutivement.

Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?

4 Quelques lois usuelles sur un univers fini

4.1 Loi uniforme

Définition 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que la v.a.r. X suit **la loi uniforme sur** $\{x_1, \dots, x_n\}$ si

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\, \mathrm{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}.$$

Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$. Si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, on note $X \sim \mathscr{U}(n)$.

Exemple 11. Parmi n objets, un seul est défectueux. On teste les objets les uns après les autres, et on note X la variable aléatoire qui donne le rang du test où l'objet défectueux est détecté.

Montrer que X suit une loi uniforme.

4.2 Loi de Bernoulli

Définition 10. Soit $p \in [0, 1]$. On dit que la v.a.r. X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p si

$$X(\Omega) = \{0, 1\}, \quad \mathrm{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Dans ce cas, on note $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Exemple 12. Soit A un événement de probabilité $p \in [0, 1]$. Montrer que $X = \mathbf{1}_A \sim \mathscr{B}(p)$.

Remarque : Réciproquement, si $X \sim \mathscr{B}(p)$ et $A = (X = 1)$ alors $X = \mathbf{1}_A$.

4.3 Loi Binomiale

Modèle de tirages avec remise : Une urne contient N boules dont a sont rouges et $N - a$ non rouges. On tire **successivement et avec remise** n boules de l'urne ($n \in \mathbb{N}^*$) et on note X le nombre de boules rouges obtenues. On montre que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\, \mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{a}{N}\right)^k \left(\frac{N - a}{N}\right)^{n-k}.$$

Ce modèle est utilisé si on répète n expériences de Bernoulli identiques et indépendantes, de paramètre $p = a/N$.

Définition 11. Soit $p \in [0,1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que la v.a.r. X suit la **loi Binomiale** de paramètres n et p si

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!],\, \mathrm{P}(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k\,(1-p)^{n-k}.$$

Dans ce cas, on note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Exemple 13. Un QCM de 10 questions avec 3 choix possibles (un seul étant correct) est proposé à un étudiant qui n'a pas révisé, et qui répond au hasard. Calculer la probabilité qu'il ait :

a) 2 réponses exactes   b) au moins 2 réponses exactes.

5 Couples de variables aléatoires finies et lois de probabilité

Dans cette partie X et Y sont des v.a.r. sur Ω, $X(\Omega) = \{x_1,\ldots,x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1,\ldots,y_m\}$.

5.1 Couples de variables aléatoires finies

Définition 12. On appelle **couple de variables aléatoires** (réelles) sur Ω toute application

$$Z : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.,$$

où X et Y sont des v.a.r. sur Ω. On note alors $Z = (X,Y)$.

Exemple 14. On lance deux dés tétraédriques identiques et bien équilibrés, l'un vert et l'autre rouge. Dans chaque cas, déterminer $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et $(X,Y)(\Omega)$:

1. X est le résultat du dé vert et Y celui du dé rouge.
2. X est le minimum des deux résultats et Y le maximum.

5.2 Loi conjointe

Définition 13. Soit (X,Y) un couple de v.a.r. sur Ω.
On appelle **loi conjointe** des variables X et Y (ou loi du couple (X,Y)) l'application

$$\mathrm{P}_{(X,Y)} : \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega)\times Y(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ (x,y) & \longmapsto & \mathrm{P}\left((X=x)\cap(Y=y)\right) \end{array} \right..$$

Exemple 15. On lance deux dés tétraédriques identiques et bien équilibrés, l'un vert et l'autre rouge. On note X le minimum des deux résultats et Y le maximum.

Déterminer la loi conjointe de X et Y. En déduire la loi de X et la loi de Y.

5.3 Lois marginales

Définition 14. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. sur Ω.

On appelle **première loi marginale** de (X, Y) la loi P_X, et **deuxième loi marginale** la loi P_Y.

Propriété 12. Si (X, Y) est un couple de v.a.r. sur Ω alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ P_X(x_i) = \mathrm{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{P}\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

$$\forall j \in [\![1, m]\!], \ P_Y(y_j) = \mathrm{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

Remarque : Si la connaissance de la loi du couple permet de connaître ses lois marginales, la connaissance des lois marginales ne permet pas d'en déduire celle du couple, en général.

Exemple 16. On tire successivement deux boules dans une urne contenant deux rouges et trois noires. On note X (resp. Y) la variable qui vaut 1 si la première (resp. la deuxième) boules tirée est rouge, 0 sinon.

Déterminer la loi du couple (X, Y) et ses loi marginales dans le cas d'un tirage sans remise puis dans le cas d'un tirage avec remise.

5.4 Lois conditionnelles

Définition 15. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. sur Ω.

Pour $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathrm{P}(Y = y) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle** de X sachant $(Y = y)$, l'application qui à $x \in X(\Omega)$ associe $\mathrm{P}\left(X = x | \, Y = y\right) = \dfrac{\mathrm{P}\left((X = x) \cap (Y = y)\right)}{\mathrm{P}(Y = y)}$.

On définit de même la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ de probabilité non nulle.

Exemple 17. Pour la situation de l'exemple 17 déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = 1)$ dans le cas d'un tirage sans remise, puis dans le cas d'un tirage avec remise.

6 Indépendance et variables aléatoires finies

6.1 Indépendance de deux variables aléatoires finies

Définition 16. On dit que les v.a.r. X et Y sont **indépendantes** si

pour tout (x, y) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants.

Remarque : X et Y sont indépendantes ssi

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathrm{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathrm{P}(X = x)\mathrm{P}(Y = y).$$

Dans ce cas, on peut obtenir la loi conjointe de (X, Y) à partir de ses lois marginales.

Exemple 18. Pour la situation de l'exemple 17 déterminer si les variables X et Y sont indépendantes dans le cas d'un tirage sans remise, puis dans le cas d'un tirage avec remise.

Propriété 13. (admise) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si X et Y sont des v.a.r. indépendantes alors les v.a.r. $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

6.2 Indépendance de n variables aléatoires finies

Définition 17. Soient X_1, X_2,..., X_n des v.a.r. sur Ω.

On dit que X_1, X_2,..., X_n sont **indépendantes** si

$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$,

$$\mathrm{P}((X_1 = x_1) \cap \ldots \cap (X_n = x_n)) = \mathrm{P}(X_1 = x_1) \times \ldots \times \mathrm{P}(X_n = x_n).$$

Remarque : Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes alors toute sous famille l'est aussi. En particulier, X_1, X_2,..., X_n sont deux à deux indépendantes.

Propriété 14. Si X_1, X_2,..., X_n sont indépendantes et de même loi $\mathscr{B}(p)$ alors

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim \mathscr{B}(n, p)$$

Lemme 1. des coalitions (admis) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si X_1, X_2,..., X_n sont indépendantes alors $f(X_1, \cdots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \cdots, X_n)$ le sont aussi, pour tout $m \in [\![1, n]\!]$.