Probabilités sur un univers fini et variables aléatoires

Exercice 1 20 livres sont exposés sur une étagère rectiligne et répartis au hasard. Parmi ces 20 livres, 3 sont d'un même auteur A, les autres étant d'auteurs différents.

Calculer la probabilité que les 3 livres de A se retrouvent côte à côte.

Exercice 2 On lance $n \geq 3$ balles vers trois paniers, chacun pouvant accueillir toutes les balles. Quelle est la probabilité de l'événement "aucun panier n'est vide" ?

Exercice 3 X est v.a.r. de loi de probabilité suivante :

x_i	-3	-2	1	2	4
$\mathrm{P}(X = x_i)$	0.15	0.25	0.1	0.35	0.15

1. Calculer les probabilités : $\mathrm{P}(X > 0)$, $\mathrm{P}(X \leq 1)$, $\mathrm{P}(-2.5 \leq X < 2)$ et $\mathrm{P}(-1 \leq X < 1)$.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable $Y = |X - 1|$.

Exercice 4 On a décelé dans une population, une probabilité $0,3$ pour qu'un individu soit atteint par une maladie M. La probabilité qu'un individu qui n'est pas atteint par M ait une réaction négative à un test T est $0,9$. S'il est atteint par M, la probabilité qu'il ait une réaction positive à T est $0,8$.

Quelle est la probabilité qu'un individu ayant une réaction positive soit atteint par M ?

Exercice 5 Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire n boules en remettant la boule après tirage si elle est rouge, et en ne la remettant pas si elle est blanche.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un boule blanche en n tirages ?

Exercice 6 On considère n personnes qui se transmettent une information I. La première personne reçoit cette information, la transmet à la deuxième personne, ainsi de suite jusqu'à la *n-ième* personne qui l'annonce au monde. Chacun d'eux transmet ce qu'il a entendu avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, et le contraire avec la probabilité $1 - p$.

1. Calculer la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise.

2. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?

Exercice 7 On dispose de 7 urnes $U_0, \ldots, U_6$. L'urne k contient k boules blanches et $6 - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on effectue 3 tirages avec remise dans l'urne choisie.
On note B_i l'événement "la i^{eme} boule tirée est blanche".

1. Déterminer la probabilité p_1 que le premier tirage ait amené une boule blanche.
2. Déterminer la probabilité p_2 que les deux premiers tirages aient amené des boules blanches.
3. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
4. Déterminer la probabilité que la $3^{ième}$ boule soit blanche sachant que les deux premières le sont.
5. Quelle est la probabilité que l'urne choisie soit U_6 sachant que les 3 boules sont blanches ?

Exercice 8 Soit $p \in]0,1[$. Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$. Une puce se déplace sur cette piste par sauts successifs de la manière suivante : à chaque saut, elle avance d'une case avec probabilité p et de deux cases sinon. Au départ, elle se trouve sur la case numéro 0. On note X_n le numéro de la case sur laquelle se trouve la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. On note Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts. Déterminer la loi de Y_n.
3. Exprimer X_n en fonction de Y_n. En déduire la loi de X_n.

Exercice 9 Soit un entier $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages successifs avec remise. On note N_1 le numéro de la première boule tirée, N_2 celui de la deuxième, X le plus grand des deux numéros et Y le plus petit.

1. (a) Les v.a.r. N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?
   (b) Déterminer les lois respectives de N_1 et N_2.
2. (a) Déterminer la loi conjointe de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   (b) Déterminer les lois respectives de X et Y.
   (c) Exprimer $X + Y$ en fonction de N_1 et N_2.
   (d) Comparer les lois de $n + 1 - X$ et de Y.

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \begin{pmatrix} n \\ i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ j-1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\alpha = \dfrac{1}{2^{2n}}$.
2. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$.