

Intégration

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Démontrer que la suite (I_n) est monotone et converge vers un réel ℓ , à déterminer.
3. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n à l'aide d'une intégration par parties.
4. En déduire un équivalent de I_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2 On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}$.

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout entier $k \geq 4$, on a : $\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx$.
3. En déduire l'existence de trois réels positifs A , B et C tels que, pour tout entier $n \geq 4$, on ait :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n - B \leq \frac{\ln^2(n)}{2} - C.$$

4. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et un équivalent de S_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3 1. Déterminer un équivalent simple de $u_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

2. Déterminer la limite de $v_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n! n^n}}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 4 Étudier la convergence des suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx], \quad x \in \mathbb{R}^* \qquad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \qquad w_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!.$$

Exercice 5 On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$.

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6 Par application de l'inégalité de Taylor Lagrange, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x.$$

Exercice 7 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

On notera Γ la courbe représentative de F .

1. Quelques propriétés de F sur $\mathbb{R}_+^*$

- (a) Justifier que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner sa dérivée.
- (b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

- (d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) \geq 0$.

Indication : on pourra d'abord considérer le cas où $x \geq 1$, puis celui où $0 < x < 1$.

2. Étude de F aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$

- (a) Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$.
Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \arctan(x) \ln(x) - \int_1^x \varphi(t) dt$.
- (c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.

On notera encore F le prolongement ainsi obtenu.

- (d) Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0.
Que dire de Γ en son point d'abscisse 0 ?
- (e) Déterminer la limite de F quand x tend vers $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 1.(C).

3. Approximation des valeurs de F

- (a) Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t) dt$.
- (b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.
- (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) = (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \ln(t) dt$$

- (d) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$. Montrer que $\left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq I_{2n+2}(x)$.
- (e) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |F(0) - w_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$.