Devoir maison n° 18

A rendre le mercredi 7 mai 2025

Exercice 1 Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'application

$$f_m : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+mz, x+my+z, mx+y+z) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f_m est une application linéaire.
2. Déterminer toutes les valeurs de m pour lesquelles f_m est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. Dans cette question, $m = -2$.
   (a) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f_{-2})$.
   (b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f_{-2})$.
   (c) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f_{-2})$ et $\mathrm{Im}(f_{-2})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   (d) Écrire l'expression analytique de la projection p sur $\mathrm{Ker}(f_{-2})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f_{-2})$.

Exercice 2 Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $\varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP$.

1. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Dans cette question $a = 5$ et $b = 1$. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Dans cette question $a = 3$ et $b = -3$. Déterminer le rang puis le noyau de φ.

Exercice 3 Un ascenseur en état de marche à l'instant initial $t = 0$ peut ensuite tomber en panne selon les conditions suivantes :

• si l'ascenseur est en état de marche à l'instant $n \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'il fonctionne encore à l'instant $n+1$ vaut $p \in [0,1]$.

• si l'ascenseur est en panne à l'instant $n \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'il soit encore en panne à l'instant $n+1$ vaut $q \in [0,1]$.

Déterminer la probabilité que l'ascenseur fonctionne à l'instant n, et la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

1. Montrer de deux manières différentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
2. Montrer que $\alpha = \dfrac{1}{2^{2n}}$.
3. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$.

Exercice 5 On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(]0, 1[)$.
2. Montrer que $\forall t \in]0, 1[, \quad \dfrac{t-1}{t} \leq \ln(t) \leq t - 1$.
3. En déduire que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que f admet un développement limité d'ordre 3 en 1, à déterminer.
6. En déduire la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_f$ en 1. Préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de 1.
7. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ après avoir tracé la droite $\mathcal{T}$.