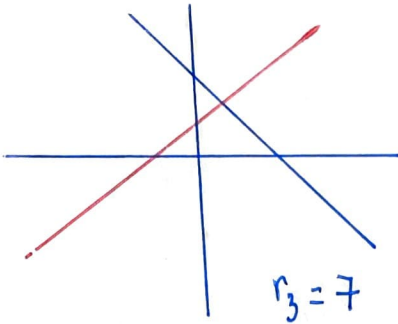


Ex 1 A - 1) $r_0=1, r_1=2, r_2=4$



$r_4=11$

- 2) Soit une famille de $n-1$ droites en position générale. Ajoutons une n -ième droite D_n de sorte que la famille formée soit une famille de n droites en position générale. D_n va couper chacune des $n-1$ premières droites et engendrer de part et d'autre de chacune de ces droites une nouvelle partition. D_n va ainsi augmenter le nombre de régions de $(n-1)+1 = n$
- $\uparrow$ ↙
 1 par droite 1 par extrémité

D'où
$$r_n = r_{n-1} + n \quad \forall n \geq 1$$

3) $r_n - r_{n-1} = n \Rightarrow \sum_{k=1}^n (r_k - r_{k-1}) = \sum_{k=1}^n k = n \frac{(n+1)}{2}$

Soit, par télescopage, $r_n - r_0 = n \frac{(n+1)}{2}$

Ainsi
$$r_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

- 4) Un triangle est constitué de 3 droites (en position générale). On peut donc distinguer $\binom{n}{3}$ triangles

- 5) Il y en a 4.

B - 1) $p_0=1, p_1=2, p_2=4, p_3=8$

- 2) Si l'on dispose d'une famille de $n-1$ plans en position générale et que l'on lui ajoute un nouveau

plan Π_n de telle sorte qu'on forme une famille de n plans en position générale, les $n-1$ premiers plans coupent Π_n en $n-1$ droites en position générale, formant dans Π_n , r_{n-1} régions planes. Or chacune de ces régions planes de Π_n est une nouvelle cloison associée à la création d'une nouvelle région dans l'espace. D'où $\boxed{p_n = p_{n-1} + r_{n-1}}$

$$3) \sum_{k=1}^n (p_k - p_{k-1}) \stackrel{2)}{=} \sum_{k=1}^n r_{k-1} \stackrel{A.3)}{=} \sum_{k=1}^n 1 + \frac{(k-1)k}{2} = n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 - k)$$

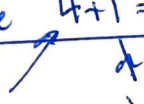
$$\text{Mais } \sum_{k=1}^n k^2 = n \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } p_n - p_0 &= n + \frac{1}{2} \left[n \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= n + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{6} \left[2n+1 - \frac{6}{2} \right] = n + \frac{n(n+1)}{2 \times 6} (2n+1-3) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } p_n = 1 + n + \frac{n(n+1)(n-1)}{6} = \frac{n+1}{6} [6 + n(n-1)]$$

$$\boxed{p_n = \frac{(n+1)(n^2 - n + 6)}{6}}$$

4) Un tétraèdre étant défini par 4 plans en position générale, on peut en distinguer $\binom{n}{4}$

5) Il en existe $\frac{4+1}{2} = 5$


Ex2 A- 1) $D_{01}: \begin{cases} z-7=0 \\ 4y-3z-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=7 \\ 4y=15+3 \times 7=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=7 \\ y=9 \end{cases}$

D_{01} est donc la droite d'équation paramétrique

$$D_{01}: \begin{cases} x=t \\ y=9 \\ z=7, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Elle admet pour vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{x}$

et passe par le point $A_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \end{vmatrix}$

۲۵

D_{02} est donc la droite d'équation paramétrique

$D_{02}: \begin{cases} x=1b \\ y=t \\ z=7, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$ Elle admet pour vecteur directeur $\vec{u}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{j}$

et passe par le point $A_2 \begin{vmatrix} 16 \\ 0 \\ 7 \end{vmatrix}$

$$D_{03}: \begin{cases} z-7=0 \\ 3x+4y+26=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=7 \\ y=t \\ 3x=-26-4t, t \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{26}{3}-\frac{4}{3}t \\ y=t \\ z=7, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D_{03} est donc la droite de vecteur directeur $[-10]$

3 et donc $\vec{u}_3 \begin{vmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix}$ et passant par $A_3 \begin{vmatrix} -10 \\ 1 \\ 7 \end{vmatrix}$ ($t=1$)

2) $I_{012} : \begin{cases} z-7=0 \\ 4y-3z-15=0 \\ 3x-4z-20=0 \end{cases}$. C'est aussi $D_0 \cap P_2$

or $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D_1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x=t \\ y=9 \\ z=7 \end{cases}$ or $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P_2 \Leftrightarrow 3x-4z-2=0$

Dann $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} x=t \\ y=9 \\ z=7 \end{pmatrix}$ et $3t - 4 \cdot 7 - 2 = 0$
 $\uparrow$
 $3t = 48 \Rightarrow t = 16$

Par suite I_{012} est le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 16 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$

3) $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = I_{612} \cap P_3$ or $3(16) + 4(9) + 26 \neq 0$

Par suite $P_0 \cap P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset$

B. 1) $E(I_{123}, 0) = -\frac{61}{7} < 0$; $E(I_{123}, 1) = 4\left(-\frac{37}{2}\right) - 3 \times 7 - 15 < 0$

$$E(I_{013,2}) = 3(-\frac{62}{3}) - 4(7) - 20 < 0 \text{ et } E(I_{012,3}) = 3(16) + 4(9) + 26 > 0$$

Donc $E(I_{123}, 0) < 0$, $E(I_{023}, 1) < 0$, $E(I_{013}, 2) < 0$, $E(I_{012}, 3) > 0$

2) On en déduit que l'intérieur de ce tétraèdre a pour système d'inéquations $\nwarrow$ en prenant le tétraèdre

$$\begin{cases} E(M,0) = z - 7 \leq 0 \\ E(M,1) = 4y - 3z - 15 \leq 0 \\ E(M,2) = 3x - 4z - 20 \leq 0 \\ E(M,3) = 3x + 4y + 2z \geq 0 \end{cases}$$

C - 1) C'est l'aire du triangle $\begin{matrix} \vec{013} & \vec{023} & \vec{123} \end{matrix}$.

$$\vec{013} \wedge \vec{023} = \begin{vmatrix} 16 + \frac{62}{3} & \frac{48+62}{3} & \frac{110}{3} \\ -\frac{27}{2} - 9 & -\frac{27-18}{2} & -\frac{55}{2} \\ 7 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } \vec{013} \wedge \vec{123} = \begin{vmatrix} -\frac{104}{21} + \frac{62}{3} & -\frac{104}{21} + 7 \times \frac{62}{21} & \frac{434-104}{21} = \frac{330}{21} = \frac{110}{7} \\ -\frac{39}{14} - 9 & -\frac{39-9 \times 14}{14} = -\frac{39-126}{14} = -\frac{165}{14} \\ -\frac{61}{7} - 7 & -\frac{61-49}{7} = -\frac{100}{7} \end{vmatrix}$$

$$\text{D'où } \vec{013} \wedge \vec{023} \wedge \vec{013} \wedge \vec{123} = \begin{vmatrix} \frac{110}{3} & \frac{110}{7} & \frac{55}{2} \times \frac{100}{7} \\ -\frac{55}{2} & -\frac{165}{14} & \frac{110}{3} \times \frac{100}{7} \\ 0 & -\frac{100}{7} & -\frac{110}{3} \times \frac{165}{14} + \frac{110}{7} \times \frac{55}{2} \end{vmatrix}$$

or $165 = 3 \times 55$ d'où

$$\vec{013} \wedge \vec{023} \wedge \vec{013} \wedge \vec{123} = \begin{vmatrix} \frac{55}{2} \times \frac{100}{7} & \frac{55}{2} \times \frac{100}{7} & \frac{1}{2} \\ \frac{110}{3} \times \frac{100}{7} & \frac{100}{7} \times 55 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{100 \times 55}{7 \times 3 \times 2} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix}$$

L'aire cherchée étant la moitié de la norme de ce produit vectoriel on obtient:

$$\text{Son aire est } \frac{1}{2} \cdot \frac{100 \times 55}{7 \times 3 \times 2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{100 \times 55}{7 \times 3 \times 2} \times 5$$

$$\text{Soit } \frac{25 \times 55 \times 5}{7 \times 3} = \frac{6875}{21} = \text{aire cherchée}$$

D-1) $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right|$ est équidistant à P_0 et P_1 si et seulement si

$$|z-7| = \frac{|4y-3z-15|}{5} \Leftrightarrow (5(z-7))^2 = (4y-3z-15)^2$$

$$\Leftrightarrow (4y-3z-15-5(z-7))(4y-3z-15+5(z-7)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4y-8z+20)(4y+2z-50) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{y-2z+5=0 \text{ ou } 2y+z-25=0}$$

$$2y+z-25=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=p \\ y=q \\ z=25-2q, \quad p, q \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pour ce plan $E(M,0) = 2(q-9)$ et $E(M,1) = 10(q-9)$ en chacun de ses points donc ont de signes contraires. Le plan ne traverse pas l'intérieur du tétraèdre d'après B2).

$\pi_{01} : y-2z+5=0$

2) $M \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right|$ est équidistant à P_0 et P_2 si et seulement si

$$|z-7| = \frac{|3x-4z-20|}{5} \Leftrightarrow (5(z-7))^2 = (3x-4z-20)^2$$

$$\Leftrightarrow (3x-4z-20-5(z-7))(3x-4z-20+5(z-7)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-9z+15)(3x+z-55) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x-3z+5=0 \text{ ou } 3x+z-55=0$$

$3x+z-55=0$ a pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x=p \\ y=q \\ z=55-3p, \quad p, q \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où $E(M,0) = 3(16-p)$ et $E(M,2) = 15(p-16)$ sur ce plan qui ne peut être le plan cherché

D'où $\boxed{\pi_{02}: x-3z+5=0}$

3) $\pi_{02} \cap \pi_{01}: \begin{cases} x-3z+5=0 \\ y-2z+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3p-5 \\ y=2p-5 \\ z=p, p \in \mathbb{R} \end{cases}$

Cette droite a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ et passe par le point $A \begin{vmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{vmatrix}$

4) $C = \pi_{01} \cap \pi_{02} \cap \pi_{03}$

donc $C \begin{vmatrix} 3p-5 \\ 2p-5 \\ p \end{vmatrix}$ et $3(3p-5) + 4(2p-5) + 5(p) - 9 = 0$
 $\Downarrow$
 $22p = 44 \Leftrightarrow p = 2$

D'où C a pour coordonnées $C \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$

Le rayon de la sphère est la distance de C à P_0 soit $|2-7|=5$ $R=5$

Ex 3

1) $D_f = \mathbb{R}$

2) D'après les théorèmes généraux (somme et composée de fonctions C^∞ et C^∞), φ est C^∞ .

$$\varphi'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} - \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{1+x^2}$$

soit $\underline{\varphi'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

3)

x	$-\infty$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\ln 2$

$$\varphi(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty. \quad \left[\begin{array}{l} \varphi \text{ réalise une} \\ \text{bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]-\infty, \ln 2[\end{array} \right]$$

Comme $\varphi'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, φ est également $\mathcal{C}^\infty$.

4)

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \underset{0}{=} x \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{D'où } \varphi(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \underset{0}{=} \left(x - \frac{1}{2}x^3\right) - \frac{\left(x - \frac{1}{2}x^3\right)^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{soit } \underline{\varphi(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \quad \text{D'où}$$

$$\underline{T_0 : y = x} \quad \text{et } \Gamma_\varphi \text{ est en dessous de } T_0 \text{ au voisinage de } 0.$$

$$5) \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x < 0}{=} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} = \frac{x}{\sqrt{x^2} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \underset{x < 0}{=} \frac{x}{-x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{d'où } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{-\infty}{=} - \left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$\text{et } \varphi(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \underset{-\infty}{=} \ln\left(\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2x^2} (1 + o(1))\right) = \ln\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \ln(1 + o(1))$$

$$= -\ln(2x^2) + o(1)$$

$$\text{i.e. } \varphi(x) = -2\ln(-x) - \ln 2 + o(1)$$

$$\text{Ainsi } \underline{\varphi(x) = -2\ln(-x) - \ln 2}$$

pour avoir la position relative, allons à l'ordre supérieur:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sim -\infty - \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \ln \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{3}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\ &= \ln \left(\frac{1}{2x^2} \left(1 - \frac{3}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right) \\ &= \psi(x) - \frac{3}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi Γ_φ est en dessous de Γ_ψ en $-\infty$.

$$6) \quad y = \ln \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \Leftrightarrow e^y = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

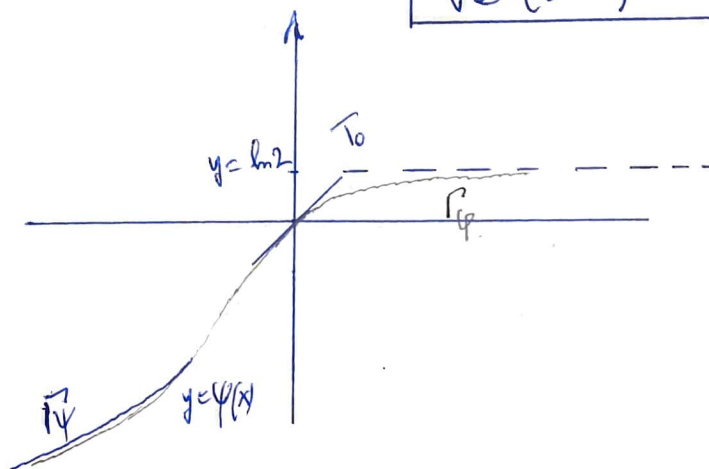
$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = e^y - 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1+x^2} = (e^y - 1)^2 \quad \text{sachant que } x \text{ et } y \text{ ont même signe.}$$

$$\text{Soit } x^2 = (1+x^2)(e^y - 1)^2$$

$$\begin{aligned}\text{i.e. } x^2 \underbrace{\left(1 - (e^y - 1)^2 \right)}_{(1 - (e^y - 1)(1 + e^y - 1))} &= (e^y - 1)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{(e^y - 1)^2}{e^y(2 - e^y)} \\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{e^y(2 - e^y)}\end{aligned}$$

$$\text{Par suite } x = \boxed{\frac{e^y - 1}{\sqrt{e^y(2 - e^y)}} = \tilde{\varphi}'(y)}$$

7)



Ex 4

p. 9

0) Soit $f \in E$. $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

on $f_P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \in \mathcal{P}$ et $f_I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \in \mathcal{I}$

d'où $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$. D'autre part seule la fonction nulle est à la fois paire et impaire. D'où

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\} \quad \text{et} \quad \boxed{E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}}.$$

1) Si $\sum_{k=0}^5 \alpha_k \cos^k(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow P(X) = \sum_{k=0}^5 \alpha_k X^k \text{ s'annule sur } [-1, 1].$$

d'où P est le polynôme nul et par suite $\alpha_k = 0 \quad \forall k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.

Ainsi $\mathcal{F}$ est libre

2) $\dim F = 6$

3) $\cos 5x = \operatorname{Re} \left((\cos x + i \sin x)^5 \right)$ par Moivre.

$$\begin{aligned} \text{d'où } \cos 5x &= \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x \\ &= \cos^5 x - 10 \cos^3 x (1 - \cos^2 x) + 5 \cos x \underbrace{(1 - \cos^2 x)^2}_{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x} \\ &= \cos^5 x - 10 \cos^3 x + 10 \cos^5 x + 5 \cos x - 10 \cos^3 x + 5 \cos^5 x \\ &= 5 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x \end{aligned}$$

Ainsi $\cos 5x = 5 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$

ses coordonnées dans $\mathcal{F}$ sont donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$

4) $\frac{d}{dx} \cos^n x = -n \cos^{n-1} x \sin x \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Par suite $\mathcal{F}$ est bien génératrice de F' (par linéarité de la dérivation)

$$\text{Si } \sum_{k=0}^4 \beta_k \sin(x) \cos^k(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sin x \sum_{k=0}^4 \beta_k \cos^k(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^4 \beta_k \cos^k(x) = 0 \quad \forall x \in]0, \pi[$$

Mais alors $Q(X) = \sum_{k=0}^4 \beta_k X^k$ s'annule sur l'ouvert $] -1, 1[$ impliquant que $Q = 0$ et donc $\beta_k = 0 \quad \forall k \in]0, 4]$.

$\mathcal{F}'$ est bien libre.

5) Toute fonction f de $\mathcal{F} + \mathcal{F}'$ s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^5 \alpha_k \cos^k(x) + \sum_{k'=0}^4 \beta_{k'} \sin(x) \cos^{k'}(x)$$

$$\text{En notant } f_P(x) = \sum_{k=0}^5 \alpha_k \cos^k(x) \text{ et } f_I(x) = \sum_{k'=0}^4 \beta_{k'} \sin(x) \cos^{k'}(x)$$

on a clairement que $f_P \in \mathcal{P}$ et $f_I \in \mathcal{I}$.

Donc si $f = 0$ cela implique d'après 0) que

$f_P = 0$ et $f_I = 0$ et d'après la liberté de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ que $\alpha_k = 0 \quad \forall k \in]0, 5]$ et

$\beta_{k'} = 0 \quad \forall k' \in]0, 4]$. La famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ est bien libre et $\mathcal{F} + \mathcal{F}' = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$.

$$\text{Il vient } \underline{\dim(\mathcal{F} + \mathcal{F}') = \dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}' = 6 + 5 = 11}$$