Lycée Jean Perrin | PTSI 1 & 2

DS de Mathématiques
Le samedi 26 avril 2025

Indiquez votre nom et votre classe sur vos copies et emboîtez ses feuillets dans le bon ordre de lecture.
Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice n°1 (Dénombrements)

(**9 pts** :**A- 1)** 0.5 **2)** 1 **3)** 1 **4)** 1 **5)** 1 **B- 1)** 0.5 **2)** 1 **3)** 1 **4)** 1 **5)** 1)

A - Dans le plan

Rappelons que si le plan est muni d'un repère cartésien, toute droite D est le graphe d'une équation linéaire $a\,x + b\,y + c = 0$. Une telle droite divise le plan en deux régions connexes. L'une R^+ est le graphe d'inéquation $a\,x + b\,y + c > 0$ et l'autre R^- celui d'inéquation $a\,x + b\,y + c < 0$. Le plan peut s'interpréter comme l'union disjointe $R^+ \sqcup D \sqcup R^-$; il est partitionné en deux régions.

Une **famille de droites du plan** est dite en *position générale* si (i) l'intersection de deux quelconques de ses droites est un point et (ii) l'intersection de trois quelconques de ses droites est vide. C'est précisément en étant en position générale qu'une famille de n droites partitionne le plan en un maximum de régions. Notons r_n ce nombre maximum.

1) Donner r_0, r_1, r_2, r_3, r_4. On illustrera graphiquement sa réponse pour r_3 et r_4.

2) Montrer que $r_n = r_{n-1} + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*(on pensera au nombre de régions traversées par une droite additionnelle)*.

3) En déduire r_n en fonction de n. Que vaut r_{50}?

4) Combien de triangles peut-on distinguer dans un tracé de n droites en position générale?

5) Combien de cercles sont simultanément tangents à 3 droites en position générale? *(Un de ces cercles est à l'intérieur d'un triangle)*.

B - Dans l'espace

De même une **famille de plans de l'espace** est dite en *position générale* si (i) l'intersection de deux quelconques de ses plans est une droite (ii) l'intersection de trois quelconques de ses plans est un point et (iii) l'intersection de quatre quelconques de ses plans est vide. On rappelle qu'un tétraèdre est un polyèdre à 4 faces.

1) En notant ρ_n le nombre de régions connexes en lequel l'espace est partitionné par n plans en position générale, donner ρ_0, ρ_1, ρ_2, ρ_3,

2) Montrer que $\rho_n = \rho_{n-1} + r_{n-1}$.

3) En déduire ρ_n en fonction de n.

4) Combien de tétraèdres peut-on distinguer à travers n plans en position générale?

5) Combien existe-t-il de sphères tangentes simultanément à 4 plans en position générale? *(Une de ces sphères est à l'intérieur d'un tétraèdre)*.

Exercice n°2 (Géométrie)

(**12.5 pts** :**A- 1)** 1.5 **2)** 1 **3)** 0.5 **B- 1)** 4x0.25 **2)** 1 **C- 1)** 1 **D- 1)** 4x0.5 **2)** 4x0.5 **3)** 1 **4)** 1.5)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}_O = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Tout point M est représenté par ses coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}_O$ selon $M(x, y, z)$. On considérera les quatre plans d'équations respectives: (P_0): $z - 7 = 0$, (P_1): 4y-3z-15=0, (P_2): 3x-4z-20=0 et (P_3): 3x+4y+26=0. Nous allons observer que ces 4 plans sont en position générale. Ils forment un unique tétraèdre $\mathcal{T}$. Notre objectif principal sera d'identifier la sphère tangente à ces 4 plans qui se trouve à l'intérieur de $\mathcal{T}$ (**Cf. Ex1-B5**).

A-Position générale

1) Pour $i, j \in [[0, 3]]$, $i \neq j$, notons $D_{ij} = P_i \cap P_j$. Vérifier que D_{01}, D_{02}, D_{03} sont des droites et donner pour tout $i \in [[1, 3]]$ un vecteur directeur $\vec{u}_i$ et un point A_i de $D_{0\,i}$ *(Les intersections D_{12}, D_{13}, D_{23} sont également des droites. On ne vous demande pas de le vérifier)*.

2) Pour $i, j, k \in [[0, 3]]$ notons $I_{ijk} = P_i \cap P_j \cap P_k$. Déterminer les coordonnées de I_{012}. On donne $I_{013}\left(\frac{-62}{3}, 9, 7\right)$, $I_{023}\left(16, \frac{-37}{2}, 7\right)$ et $I_{123}\left(\frac{-104}{21}, \frac{-39}{14}, \frac{-61}{7}\right)$.

3) montrer que $P_i \cap P_j \cap P_k = \emptyset$.

Les 4 plans sont donc bien en position générale. Les points I_{ijk} de la question **2)** sont les sommets du tétraèdre $\mathcal{T}$. Les droites D_{ij} de la question **1)** portent ses arêtes.

B-Intérieur du tétraèdre

Chacun des plans P_i a été décrit comme le graphe d'une équation linéaire $E(M, i) = a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ pour tout point M de coordonnées (x, y, z). On a précisément $E(M, 0) = z - 7$, $E(M, 1) = 4\,y - 3\,z - 15$, $E(M, 2) = 3\,x - 4\,z - 20$, $E(M, 3) = 3\,x + 4\,y + 26$. L'objectif de cette section est d'identifier l'intérieur de $\mathcal{T}$ comme le graphe d'un système d'inéquations.

1) Déterminer les signes de $E(I_{123}, 0)$, $E(I_{023}, 1)$, $E(I_{013}, 2)$, $E(I_{012}, 3)$.

2) En déduire un système d'inéquations ayant pour graphe l'intérieur de $\mathcal{T}$.

C-Aire d'une face de $\mathcal{T}$

1) À partir de **A-2** évaluer l'aire de la face du tétraèdre $\mathcal{T}$ opposée au sommet I_{012}.

D-Centre de la sphère

Rappelons que l'ensemble des points équidistants à deux plans non parallèles est une union de deux plans (dits bissecteurs). Le centre de la sphère cherchée, notons le C, est équidistant à P_0, P_1, P_2 et P_3 mais il n'est pas le seul (Cf. **Ex1-B-5**). Il est donc préférable d'orienter notre recherche vers l'intérieur du tétraèdre.

1) Trouver une équation cartésienne des plans bissecteurs de P_0 et P_1. Vérifier que l'un de ces plans admet pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x &= p \\ y &= q \\ z &= 25 - 2\,q, \;\; p, q \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Par suite $E(M, 0) = z - 7 = 2\,(9 - q)$ et $E(M, 1) = 4\,y - 3\,z - 15 = 10\,(q - 9)$ en chacun de ses points. À l'aide de **B-2** déterminer lequel des 2 plans bissecteurs de P_0 et P_1 contient C? Nous le noterons le π_{01}.

2) Donner une équation cartésienne des plans bissecteurs de P_0 et P_2. En procédant comme au **C-1)** identifier celui qui contient C. On l'appelera π_{02}.

3) Construire une équation paramétrique de la droite $\pi_{01} \cap \pi_{02}$. On précisera l'un de ses points et l'un de ses vecteurs directeurs.

En procédant comme précédemment on obtient que le plan bissecteur de P_0 et P_3 qui contient C (nous le noterons π_{03}) a pour équation $(\pi_{03}) : 3\,x + 4\,y + 5\,z - 9 = 0$.

4) En déduire les coordonnées de C puis calculer le rayon R de la sphère cherchée?

<u>Exercice n°3</u> (Analyse)

(**10 pts** : **1)** 0.5 **2)** 0.5+1 **3)** 2 **4)** 2 **5)** 2 **6)** 1 **7)** 1)

Considérons la fonction $\varphi(x) = \text{Ln}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \text{Ln}\left(\sqrt{1 + x^2}\right)$ de la variable réelle.

1) Donner son ensemble de définition D_φ.

2) Pourquoi peut-on affirmer que φ est de classe C^∞? Calculer sa dérivée.

3) Construire son tableau de variation en évaluant ses limites en $\pm\infty$. En déduire que φ réalise une bijection de D_φ sur un intervalle J à préciser. Est-ce que φ^{-1} est également C^∞?

4) Déterminer le développement limité de φ à l'ordre 2 en 0. Donner une équation de sa droite tangente T_0 au point d'abscisse 0. Décrire la position du graphe Γ_φ de φ par rapport à T_0 au voisinage de 0.

5) Déterminer le développement limité de φ à l'ordre 2 en $-\infty$. En déduire une fonction simple $\psi(x)$ définie sur $\mathbb{R}_-^*$ dont le graphe Γ_ψ est asymptote à Γ_φ en $-\infty$. Quelle est la position relative de Γ_φ par rapport à Γ_ψ en $-\infty$?

6) En inversant la relation $y = \varphi(x)$, déterminer explicitement $\varphi^{-1}(y)$ pour tout $y \in J$.

7) Tracer l'allure du graphe de Γ_φ en y représentant T_0 et ses asymptotes.

<u>Exercice n°4</u> (Espaces vectoriels)

(**6.5 pts** :**A- 0)** 1 **1)** 1 **2)** 0.5 **3)** 1 **4)** 0.5+1 **5)** 1+0.5)

Soit E=$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions de la variable réelle à valeurs réelles, Notons $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires.

0) Prouver que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans E.

Considérons maintenant la famille $\mathcal{F} = \{1, \cos(x), \cos^2(x), \cos^3(x), \cos^4(x), \cos^5(x)\}$.

1) En pensant à associer à toute combinaison linéaire du type $\sum_{k=0}^{5} \alpha_k \cos^k(x)$ le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{5} \alpha_k X^k$, prouver que $\mathcal{F}$ est libre. Il s'agit donc d'une base de l'espace vectoriel F qu'elle engendre.

2) Donner la dimension de F.

3) Montrer que la fonction cos(5x) appartient à F et évaluer ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$.

4) Montrer que l'ensemble des dérivées des fonctions de F admet pour famille génératrice $\mathcal{F}' = \{\sin(x), \sin(x)\cos(x), \sin(x)\cos^2(x), \sin(x)\cos^3(x), \sin(x)\cos^4(x)\}$. Puis prouver que $\mathcal{F}'$ est libre *(on pourra s'inspirer de la questiont **1)**)*. Il s'agit donc d'une base de l'espace des dérivées des fonctions de F que nous appelerons F'.

5) Prouver que la somme $F + F'$ est directe *(On s'aidera des questions **0)** et **1)**)*. Quelle est donc sa dimension?