

Matrices et applications linéaires

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E, F, G des \mathbb{K} -e.v. de dimension finie.

1 Matrices et applications linéaires

1.1 Matrice d'une application linéaire

Dans cette partie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E , $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 1. On appelle **matrice de f** dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{matrix}, \text{ où } \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_j)).$$

Cas particulier : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ (endomorphisme), la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ est une matrice carrée d'ordre p que l'on notera simplement $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. En particulier, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_p$ (matrice identité).

Exemple 1. Fondamental

1. Écrire la matrice de l'homothétie vectorielle de rapport λ dans \mathbb{R}^n muni de sa base canonique.
2. Écrire la matrice de la rotation vectorielle d'angle θ dans le plan muni de sa base canonique.

Exemple 2. Dans chaque cas, écrire la matrice de f dans les bases canoniques :

$$\text{a) } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, 3x, x - y) \end{cases} \qquad \text{b) } f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP' \end{cases}$$

Lemme 1. Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie p et de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

Alors l'application $\varphi_{\mathcal{B}} : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Propriété 1. Matrice de l'image d'un vecteur Soit $u \in E$.

Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$, $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u))$ alors $Y = AX$.

Exemple 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Expliciter f si

1. A est la matrice de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ dans les bases canoniques.
2. A est la matrice de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_1[X])$ dans les bases canoniques.

Théorème 1. (et définition) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors

l'application $f_A : \begin{array}{l} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \longmapsto AX \end{array}$ est linéaire et vérifie $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f_A) = A$,

où $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont les bases canoniques de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, respectivement.

f_A est appelée **application linéaire canoniquement associée à A** .

Exemple 4. Expliciter l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Déterminer son noyau et son rang.

1.2 Matrices et opérations sur les applications linéaires

Dans cette partie, E, F et G ont pour bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et \mathcal{B}'' .

Propriété 2. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) \iff f = g$
2. $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f + \lambda g) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$

Application 1 : L'application $\phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} : \begin{array}{l} \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{array}$ est un isomorphisme et

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$$

Propriété 3. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

Cas particulier : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^k$

Exemple 5. Déterminer la matrice de $g \circ f$ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 si

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (2x + y, 3x, x - y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x - y, 3x + y + 4z) \end{array}$$

Propriété 4. Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective ssi $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible. Dans ce cas, $\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f))^{-1}$.

Exemple 6. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y + z, y + 2z, x) \end{cases}$ Montrer que $f \in \text{GL}(\mathbb{R}^3)$ et expliciter f^{-1} .

Application 2 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi l'endomorphisme f_A canoniquement associé à A est bijectif. Dans ce cas, A^{-1} est la matrice de f_A^{-1} dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et f_A^{-1} est l'endomorphisme canoniquement associé à A^{-1} . Ainsi, on retrouve l'équivalence des assertions :

- (i) $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. (ii) $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AX = B$ (i.e f_A bijective).
- (iii) $AX = 0_{n,1} \Leftrightarrow X = 0_{n,1}$ (i.e f_A injective). (iv) $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AX = B$ (i.e f_A surjective).

Dans ce cas, A^{-1} vérifie : $\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = B \iff X = A^{-1}B$.

2 Rang d'une matrice et changement de base

2.1 Noyau, image et rang d'une matrice

Définition 2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et f_A l'application linéaire canoniquement associée à A .

1. Le noyau de A est défini par $\text{Ker}A = \text{Ker}f_A$ (s.e.v. de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$).
2. L'image de A est définie par $\text{Im}A = \text{Im}f_A$ (s.e.v. de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).
3. Le rang de A est défini par $\text{rg}A = \text{rg}f_A$.

Conséquence : $\text{Ker}A = \{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1} \}$

De plus, si $C_1, \dots, C_p \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont les colonnes de A alors on a

$$\text{Im}A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p) \text{ et } \text{rg}A = \text{rg}(C_1, \dots, C_p) \leq \min(p, n).$$

Exemple 7. Déterminer le noyau, l'image et le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Théorème 2. Théorème du rang Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $\text{rg}A + \dim(\text{Ker}A) = p$.

Propriété 5. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ alors

$$\text{rg}(AP) = \text{rg}A, \quad \text{rg}(QA) = \text{rg}A \quad \text{et} \quad \text{rg}({}^tA) = \text{rg}A.$$

Conséquence : Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont le même rang. Le rang d'une matrice A est le nombre de pivots non nuls dans la matrice échelonnée réduite de A .

Exemple 8. Déterminer le noyau, l'image et le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Théorème 3. Caractérisation de l'inversibilité Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$$

$$\iff \text{rg}(A) = n$$

$$\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n \quad (\text{dans ce cas } A^{-1} = B)$$

$$\iff \exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), CA = I_n \quad (\text{dans ce cas } A^{-1} = C)$$

$$\iff \text{les colonnes de } A \text{ forment une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

$$\iff \text{les lignes de } A \text{ forment une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

$$\iff \text{l'endomorphisme canoniquement associé à } A \text{ est bijectif.}$$

Propriété 6. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E et F ont pour bases respectives \mathcal{B} et \mathcal{B}' .
 Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ alors

1. $u \in \text{Ker } f$ ssi $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \text{Ker } A$
2. $v \in \text{Im } f$ ssi $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) \in \text{Im } A$
3. $\text{rg } f = \text{rg } A$.

Exemple 9. Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P) = XP' - 2P$

Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et déterminer son noyau, son image et son rang.

2.2 Matrice de passage d'une base à une autre

Dans cette partie, E admet pour bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$.

Définition 3. On appelle **matrice de passage** de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' , la matrice :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} & e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}, \text{ où } \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_j).$$

Remarque : Si f est l'unique endomorphisme de E tel que $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_j) = e'_j$, alors f est un automorphisme de E (transforme une base en une base), dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$. Ainsi, $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible, d'inverse $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.

Exemple 10. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, où

$$e'_1 = (1, 2, 1), e'_2 = (1, 2, 2) \text{ et } e'_3 = (0, 1, 2).$$

Montrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 , expliciter $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, puis déterminer $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.

Théorème 4. Formule de changement de base Soit $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ et $u \in E$.

$$\text{Si } X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ et } X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) \text{ alors } X = PX' \text{ et } X' = P^{-1}X.$$

Exemple 11. Avec les notations de l'exemple 10, on considère le vecteur u de coordonnées $(1, 2, 3)$ dans la base \mathcal{B}' . Retrouver les coordonnées de u dans la base canonique.

Théorème 5. Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$, où \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont des bases de F .

Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{F}'}(f)$ alors $A = QA'P^{-1}$ et $A' = Q^{-1}AP$.

Cas particulier : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

$$\text{Si } A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ et } A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \text{ alors } A = PA'P^{-1} \text{ et } A' = P^{-1}AP.$$

Dans ce cas : $f \in \text{GL}(E) \iff A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff A' \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

On dit alors que les matrices A et A' sont **semblables**.

Exemple 12. Avec les notations de l'exemple 10, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix} \text{ et l'endomorphisme } f \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ canoniquement associé à } A.$$

Déterminer la matrice $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.