Correction du Test n° 17

Sujet A

1.

2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+z, 5x-2y+z) \end{array} \right.$

   (a) Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{array}{rcl} f(u+\lambda v) & = & f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') \\ & = & (x+\lambda x'+z+\lambda z', 5((x+\lambda x')-2(y+\lambda y')+z+\lambda z') \\ & = & (x+z, 5x-2y+z)+\lambda(x+z', 5x'-2y'+z') \\ & = & f(u)+\lambda f(v). \end{array}$$

   Donc $\boxed{f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)}$.

   (b) $u \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u) = (x+z, 5x-2y+z) = (0,0) \Leftrightarrow x = -z$ et $4x-2y = 0 \Leftrightarrow z = -x$ et $y = \dfrac{x}{2}$.

   Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(2,1,-2)}$. et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

   D'après le théorème du rang, $\dim \mathbb{R}^3 = \mathrm{rg} f + \dim \mathrm{Ker}\ f$ donc $\mathrm{rg}\ f = 2$ et $\mathrm{Im}\ f$ étant un sev de $\mathbb{R}^2$, $\boxed{\mathrm{Im}\ f = \mathbb{R}^2}$

   (c) f n'est pas injective car $\mathrm{Ker}\ f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (ou car $\dim \mathbb{R}^3 > \dim \mathbb{R}^2$) et f n'est alors pas bijective.

   f est surjective car $\mathrm{Im}\ f = \mathbb{R}^2$.

3. On dispose de deux urnes, la première contenant 6 boules rouges et trois noires, et la deuxième 6 noires et trois rouges.

   Notons A « On tire dans la première urne »et B : « On tire deux boules rouges »

   (a) On choisit une urne au hasard, puis on y tire deux boules, on obtient deux rouges. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne ?

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\binom{6}{2}}{\binom{9}{2}}}{\frac{1}{2} \times \frac{\binom{6}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}}} = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{6}{2} + \binom{3}{2}} = \frac{15}{15+3} =$$

   $\dfrac{5}{6}$, d'après la formule de Bayes,

(b) Même question si on effectue les deux tirages successivement avec remise.

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

La probabilité est légèrement plus faible dans ce cas.

Correction du Test n° 17

Sujet B

1.

2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x, 2x + y, y) \end{array} \right.$

(a) Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a

$$\begin{array}{rcl} f(u + \lambda v) & = & f(x + \lambda x', y + \lambda y') \\ & = & ((x + \lambda x'), 2(x + \lambda x') + (y + \lambda y'), (y + \lambda y')) \\ & = & (x, 2x + y, y) + \lambda(x', 2x' + y', y') \\ & = & f(u) + \lambda f(v). \end{array}$$

Donc $\boxed{f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)}$.

(b) $u \in \text{Ker}(f) \iff f(u) = (x, 2x + y, y) = (0, 0, 0) \iff x = y = 0$ donc

$\boxed{\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}}$

$v = f(u) \iff v = (x, 2x + y, y) = x \underbrace{(1, 2, 0)}_{=u_1} + y \underbrace{(0, 1, 1)}_{=u_2}$.

Donc $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}(u_1, u_2)}$ et u_1, u_2 ne sont pas colinéaires, donc (u_1, u_2) est une base de Im f et rg $f = 2$.

(c) f est injective car $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

f n'est pas surjective car Im $f \neq \mathbb{R}^3$ (ou car dim $\mathbb{R}^2 <$ dim $\mathbb{R}^3$), et n'est donc pas non plus bijective.

3. Dans un lot de 10 dés à 6 faces, 2 sont truqués de la façon suivante : la face 6 est tirée la moitié du temps, et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. On choisit un dé au hasard et on le lance.

Notons T l'évènement « On lance un dé truqué ».

$P(T) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $P_T(6) = \frac{1}{2}$ et $P_T(1) = P_T(2) = P_T(3) = P_T(4) = P_T(5) = \frac{1}{10}$

(a) Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?

D'après la formule des probabilités totales,

$P(6) = P(\overline{T})P_{\overline{T}}(6) + P(T)P_T(6) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{30}$

(b) On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ? D'après la formule de Bayes, $P_6(T) = \dfrac{P(T)P_T(6)}{P(6)} = \dfrac{\dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{2}}{\dfrac{7}{30}} = \dfrac{3}{7}$

(c) On obtient un 2. Quelle est la probabilité que le dé ne soit pas truqué ?

$$P_2(\overline{T}) = \frac{P(\overline{T})P_{\overline{T}}(2)}{P(2)} = \frac{\dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{6}}{\dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{10}} = \frac{20}{23}$$