

NOM : .....

Lundi 9 octobre 2023

## Test n° 5

### Sujet A

**Questions de cours** Compléter : 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \dots$       2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \dots$

3. La dérivée de  $x \mapsto a^x$  est la fonction .....

**Exercice**      On considère la fonction  $f : x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^x$ .

1. Montrer que  $f$  est définie et dérivable sur l'intervalle  $]1, +\infty[$  et que

$$\forall x > 1, \quad f'(x) = \left[ \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x-1} \right] f(x).$$

---

---

---

---

---

---

---

---

2. Pour  $x > 1$ , on pose  $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x-1}$ .

(a) Calculer  $\varphi'(x)$ . En déduire le sens de variation de  $\varphi$  sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

(b) Calculer la limite de  $\varphi$  en  $+\infty$ . En déduire le signe de  $\varphi$  sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ .

---

---

---

---

3. Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ .

---

---

---

---