NOM : .... **Lundi 5 mai 2025**

Test n° 17

Sujet A

1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Énoncer le théorème du rang :

2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+z, 5x-2y+z) \end{array} \right.$

   (a) Montrer que f est une application linéaire.

   (b) Donner une base et la dimension de son noyau et de son image.

   (c) Dire si f est injective, surjective, bijective.

3. On dispose de deux urnes, la première contenant 6 boules rouges et trois noires, et la deuxième 6 noires et trois rouges.

(a) On choisit une urne au hasard, puis on y tire deux boules, on obtient deux rouges. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne ?

(b) Même question si on effectue les deux tirages successivement avec remise.

NOM : .... **Lundi 5 mai 2025**

Test n° 20

Sujet B

1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Compléter :

   (a) f est injective ssi $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est $\cdots\cdots$

   (b) f est surjective ssi $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est $\cdots\cdots$

   (c) f est un isomorphisme de E sur F ssi $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est $\cdots\cdots$

---

2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x, 2x+y, y) \end{cases}$

   (a) Montrer que f est une application linéaire.

   (b) Donner une base et la dimension de son noyau et de son image.

   (c) Dire si f est injective, surjective, bijective.

3. Dans un lot de 10 dés à 6 faces, 2 sont truqués de la façon suivante : la face 6 est tirée la moitié du temps, et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. On choisit un dé au hasard et on le lance.

   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?

   (b) On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?

   (c) On obtient un 2. Quelle est la probabilité que le dé ne soit pas truqué ?