Correction du devoir maison n° 18

Exercice 1 Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'application

$$f_m : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+mz, x+my+z, mx+y+z) \end{array} \right.$$

1. Soient $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $v=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} & f_m(\lambda u+\mu v) \\ = \; & (\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'+m(\lambda z+\mu z'), \lambda x+\mu x'+m(\lambda y+\mu y')+\lambda z+\mu z', \\ & \qquad m(\lambda x+\mu x')+\lambda y+\mu y'+\lambda z+\mu z') \\ = \; & \lambda(x+y+mz, x+my+z, mx+y+z)+\mu(x'+y'+mz', x'+my'+z', mx'+y'+z') \\ = \; & \lambda f_m(u)+\mu f_m(v). \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{f_m \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

2. $\mathbb{R}^3$ étant de dimension finie, f_m est bijective ssi f_m est injective ssi $\mathrm{Ker}(f_m)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$u=(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f_m) \iff f_m(x,y,z)=(0,0,0) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+mz & = & 0 \\ x+my+z & = & 0 \\ mx+y+z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} x+y+mz & = & 0 \\ (m-1)y+(1-m)z & = & 0 \\ (1-m)y+(1-m^2)z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x+y+mz & = & 0 \\ (m-1)y+(1-m)z & = & 0 \\ (2-m-m^2)z & = & 0 \end{array} \right.,$$

   qui est échelonné de rang 3 ssi $m-1 \neq 0$ et $2-m-m^2 \neq 0$ ssi $m \neq 1$ et $m \neq -2$.

   On en déduit que $\boxed{f_m \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3 \text{ ssi } m \in \mathbb{R} \backslash \{-2,1\}}$.

3. (a) Si $m=-2$, on a :

$$u=(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f_{-2}) \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x+y-2z & = & 0 \\ -3y+3z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & z \\ y & = & z \end{array} \right. \iff u=z(1,1,1).$$

   Donc
   $\boxed{\mathrm{Ker}(f_{-2}) \text{ est la droite vectorielle de vecteur directeur } u_1=(1,1,1), \text{ de dimension } 1}$.

(b) Par le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f_{-2})) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f_{-2})) = 3 - 1 = 2$.

$f_{-2}(1,0,0) = (1,1,-2) = v_1$ et $f_{-2}(0,1,0) = (1,-2,1) = v_2$, qui ne sont pas colinéaires.

Donc $\text{rg}(v_1, v_2) = 2 = \dim(\text{Im}(f_{-2}))$ et
$\boxed{\mathscr{B}_1 = (v_1, v_2) \text{ est une base de } \text{Im}(f_{-2}), \text{ de dimension } 2}$.

(c) On considère la matrice dont les colonnes sont celles des coordonnées de u_1, v_1, v_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

qui est échelonnée de rang 3. Donc $\text{rg}(u_1, v_1, v_2) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Donc (u_1, v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^3$ et
$\boxed{\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(u_1) \oplus \text{Vect}(v_1, v_2) = \text{Ker}(f_{-2}) \oplus \text{Im}(f_{-2})}$.

(d) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ il existe un unique $w_1 \in \text{Ker}\,(f_{-2})$ et un unique $w_2 \in \text{Im}(f_{-2})$ tels que $(x, y, z) = w_1 + w_2 = au_1 + bv_1 + cv_2$ d'après les questions précédentes et $p(x, y, z) = w_1$

$$(x, y, z) = w_1 + w_2 = au_1 + bv_1 + cv_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

vu que A est inversible.

L'algorithme de Gauss Jordan (à faire) donne $A^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

et on obtient $a = \dfrac{x+y+z}{3}$, d'où $\boxed{p(x, y, z) = \dfrac{x+y+z}{3}(1,1,1)}$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 2 Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $\varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP$.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$\varphi(P + \lambda Q) = X^2(P + \lambda Q)'' + aX(P + \lambda Q)' + b(P + \lambda Q) = X^2(P'' + \lambda Q'') + aX(P' + \lambda Q') + b(P + \lambda Q) = X^2P'' + aXP' + bP + \lambda(X^2Q'' + aXQ' + bQ) = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$
De plus, si $P \in \mathbb{R}_3[X]$ alors on a $\deg\,(P) \leqslant 3$, $\deg\,(P') \leqslant 2$ et $\deg\,(P'') \leqslant 1$ donc $\deg(X^2P'') \leqslant 3$, $\deg(aXP') \leqslant 3$ et donc $\deg\,(\varphi(P)) \leqslant 3$.
Finalement , $\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])}$
2. Dans cette question $a = 5$ et $b = 1$.
$\varphi(1) = 1, \varphi(X) = 6X\varphi(X^2) = 13X^2$ et $\varphi(X^3) = 22X^3$

Donc Im (φ) = Vect $(\varphi(1); \varphi(X); \varphi(X^2); \varphi(X^3))$ = Vect $(1; X; X^2; X^3) = \mathbb{R}_3[X]$ Donc φ est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est de dimension finie. Donc $\boxed{\varphi \in GL(\mathbb{R}_3[X]).}$

3. Dans cette question $a = 3$ et $b = -3$ et on a
$\varphi(1) = -3; \varphi(X) = 0; \varphi(X^2) = -7X^2$ et $\varphi(X^3) = 12X^3$.
Donc Im (φ) = Vect$(1; X^2; X^3)$ et, comme $(1; X^2; X^3)$ est libre, on a rg (φ) = rg $(1; X^2; X^3) = 3 < 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$
Par le théorème du rang, dim(Ker (φ)) = dim $(\mathbb{R}_3[X])-$ rg $(\varphi) = 4 - 3 = 1$.
Comme $\varphi(X) = 0, X$ est un polynôme non nul de Ker (φ) et rg $(X) = 1 =$ dim(Ker (φ)).
Donc (X) est une base de Ker (φ) et $\boxed{\text{Ker }(\varphi) = \text{Vect }(X).}$

Exercice 3 Un ascenseur en état de marche à l'instant initial $t = 0$ peut ensuite tomber en panne selon les conditions suivantes :

• si l'ascenseur est en état de marche à l'instant $n \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'il fonctionne encore à l'instant $n + 1$ vaut $p \in [0, 1]$.

• si l'ascenseur est en panne à l'instant $n \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'il soit encore en panne à l'instant $n + 1$ vaut $q \in [0, 1]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'événement M_n : « l'ascenseur fonctionne à l'instant n »et on pose $p_n = P(M_n)$. Par la formule des probabilités totales,
$p_{n+1} = P(M_{n+1}) = P(M_n \cap M_{n+1}) + P(\overline{M_n} \cap M_{n+1}) =$
$P(M_n)P_{M_n}(M_{n+1}) + P(M_n)P_{\overline{M_n}}(M_{n+1}) = p_n \times p + (1 - p_n)(1 - q) = (p + q - 1)p_n + 1 - q$

• Si $p + q = 1, \forall n \in \mathbb{N} p_{n+1} = 1 - q = p$ et (p_n) est stationnaire à partir du rang 1.
• Si $p + q \neq 1$, (p_n) est une suite arithmético-géométrique.
On résout $x = (p + q - 1)x + 1 - q \Leftrightarrow (2 - p - q)x = 1 - q \Leftrightarrow x = \dfrac{1 - q}{2 - p - q}$
On pose $v_n = p_n - \dfrac{1 - q}{2 - p - q}$. On montre que (v_n) est géométrique de raison $p + q - 1$ et de premier terme $v_0 = p_0 - \dfrac{1 - q}{2 - p - q} = 1 - \dfrac{1 - q}{2 - p - q} = -\dfrac{1 - p}{2 - p - q} > 0$.
Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \dfrac{1 - p}{2 - p - q}(p + q - 1)^n + \dfrac{1 - q}{2 - p - q}}$
De plus, $0 < p + q < 2$ donc $-1 < p + q - 1 < 1$ et $\boxed{p_n \longrightarrow \dfrac{1 - q}{2 - p - q}}$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ prenant leurs valeurs dans $[\![1, n + 1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n + 1]\!]^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i - 1}\binom{n}{j - 1}.$$

1. Première méthode : Par la formule du binome, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\times 1^{n-k}=(1+1)^n=2^n.$$

Deuxième méthode : Soit E un ensemble fini à n éléments et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, on note $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties à k éléments de E. On a :

$\mathscr{P}(E)=\bigcup_{k=0}^{n}\mathscr{P}_k(E)$, qui est une union d'ensembles disjoints deux à deux. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{card}\left(\mathscr{P}_k(E)\right)=\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=0}^{n}\mathscr{P}_k(E)\right)=\mathrm{card}\left(\mathscr{P}(E)\right)=2^n.$$

2. $\left\{[X=i]\cap[Y=j],\ (i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2\right\}$ est un système complet d'événements (SCE) car ils sont deux à deux incompatibles et ils recouvrent l'ensemble des éventualités. Donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])=\mathbb{P}(\Omega)=1}.$$

D'autre part, par linéarité de la somme et par les changements d'indices $k=i-1$ et $\ell=j-1$,

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])=\alpha\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}=\alpha\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}.$$

D'après ce qui précède et le résultat 1., $\alpha\times 2^n\times 2^n=1$. Donc $\boxed{\alpha=\dfrac{1}{2^{2n}}}$.

3. D'après l'énoncé, $\boxed{X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1,n+1]\!]}$. Donc $\left\{[Y=j],\ j\in[\![1,n+1]\!]\right\}$ est un SCE et par la formule des probabilités totales, $\forall i\in[\![1,n+1]\!]$:

$$\mathbb{P}(X=i)=\sum_{j=1}^{n+1}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])\underset{\text{linéarité}}{=}\frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{i-1}\underbrace{\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}}_{=2^n\text{ par }\ell=j-1}.\text{ Donc}$$

$$\boxed{\forall i\in[\![1,n+1]\!],\ \mathbb{P}(X=i)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}}.\text{ De même,}$$

$$\boxed{\forall j\in[\![1,n+1]\!],\ \mathbb{P}(Y=j)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{j-1}}.$$

4. $\forall (i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2$,

$$\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)=\frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}=\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]).$$

Donc $\boxed{X\text{ et }Y\text{ sont indépendantes}}$.

5. $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ et $1 \leq i \leq n+1 \Longleftrightarrow 0 \leq i-1 \leq n$. Donc $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$. De plus, $\forall k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X - 1 = k) = \mathbb{P}(X = k+1) = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Donc $\boxed{\text{la loi de } Z \text{ est la loi binomiale } \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)}$.

Exercice 5 On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

1. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ est continue sur l'intervalle $I =]0, 1[$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas.

   Donc g admet des primitives sur l'intervalle I. Notons G l'une d'entre elles. La fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I car dérivable sur I, de dérivée g continue sur I.

   De plus, $\forall x \in I$, $x^2 \in I$ donc $f(x) = G(x^2) - G(x)$.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } I}$, comme somme de composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

2. Soit $t \in I$ fixé. La fonction ln est dérivable sur $[t, 1]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]t, 1[$ tel que : $\ln(1) - \ln(t) = \ln'(c)(1-t) = \dfrac{1-t}{c}$.

   De plus, $t < c < 1$ donc $1 < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{t}$, et donc $1 - t < \dfrac{1-t}{c} < \dfrac{1-t}{t}$ (car $1 - t > 0$).

   En multipliant par $-1 < 0$ on obtient, $\boxed{\text{pour tout } t \in I, \quad \dfrac{t-1}{t} \leq \ln(t) \leq t - 1}$.

3. Soit $x \in I$ fixé. Comme $0 < x^2 < x < 1$ on a, d'après le résultat de la question précédente :

$$\forall t \in [x^2, x], \quad \frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{t}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1}.$$

   Par croissance de l'intégrale, on a : $\displaystyle\int_{x^2}^x \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leq \int_{x^2}^x 1 + \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

   En multipliant par $-1 < 0$, on obtient :

$$\boxed{\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t \geq f(x) \geq \int_x^{x^2} 1 + \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t \quad (1)}.$$

4. $\forall x \in I$, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = \ln|x^2 - 1| - \ln|x - 1| = \ln\left(\frac{|x-1||x+1|}{|x-1|}\right) \underset{x+1>0}{=} \ln(x+1)$, et

$$\int_x^{x^2} 1 + \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = x^2 - x + \ln(1+x).$$

   Par (1), par opérations sur les limites, et par le théorème d'encadrement des limites, on obtient :

$$f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ln(2) \text{ et } f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ et en } 1}$.

5. Si on note encore f ce prolongement, on a $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(2)$. Montrons que ce prolongement est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$.

   $\forall x \in]0, 1[, \quad f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \dfrac{2x}{\ln(x^2)} - \dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{2x}{2\ln(x)} - \dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{x-1}{\ln(x)}.$

   Par opérations sur les limites, $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

   Si h est tel que $1 + h \in]0, 1[$, $f'(1 + h) = \dfrac{h}{\ln(1 + h)} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{h}{h} = 1$.

   Comme f est continue sur $[0, 1]$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, 1[$, d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et en 1, avec $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 1$, et sa dérivée est continue en 0 et en 1.

   Finalement, $\boxed{\text{le prolongement de } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0, 1]}$.

6. Si $x \in]0, 1[$, alors $x - 1 < 0$, $\ln(x) < 0$, et $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x)} > 0$. D'où le tableau :

x	0		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(2)$

7. Soit h tel que $1 + h \in]0, 1[$ fixé. On a :

   $$f'(1 + h) = \frac{h}{\ln(1 + h)} \underset{h\to 0}{=} \frac{h}{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{1 - \left(\frac{h}{2} - \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right)}.$$

   Or $\dfrac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + o(u^2)$, et $\dfrac{h}{2} - \dfrac{h^2}{3} + o(h^2) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc, par composition, on a :

   $$f'(1 + h) \underset{h\to 0}{=} 1 + \left(\frac{h}{2} - \frac{h^2}{3}\right) + \left(\frac{h}{2} - \frac{h^2}{3}\right)^2 + o(h^2) \underset{h\to 0}{=} 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12} + o(h^2).$$

   Comme $f \in \mathscr{C}^1([0, 1])$ et $f(1) = \ln(2)$, on obtient, par primitivation :

   $$\boxed{f(1 + h) \underset{h\to 0}{=} \ln(2) + h + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{36} + o(h^3)}.$$

   Donc $\boxed{f(x) \underset{x\to 1}{=} \ln(2) + (x - 1) + \dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(x-1)^3}{36} + o((x - 1)^3)}$.

8. Donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet une tangente } \mathcal{T} \text{ au point } (1, f(1)), \text{ d'équation } y = x - 1 + \ln(2).}$

   De plus, $f(x) - (x - 1 + \ln(2)) \underset{x\to 1}{=} \dfrac{(x-1)^2}{4} + o((x - 1)^2) \geq 0$ au voisinage de 1.

   Donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{T} \text{ au voisinage de } 1}$.