Séries numériques

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités sur les séries

1.1 Définitions

Définition 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_N = u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

- On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$, notée $\sum u_n$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n$
- On appelle **somme partielle d'ordre** N de la série $\sum u_n$ la somme $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$
- On dit que la série $\sum u_n$ **converge** si la suite (S_N) converge.

Dans ce cas, on appelle **somme** de la série $\sum u_n$ la limite de (S_N), notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

- On dit que la série $\sum u_n$ diverge si la suite (S_N) diverge (c.à.d. ne converge pas).

Remarque : Si u_n est défini à partir du rang p, la série de terme général u_n est notée $\sum_{n\geq p} u_n$

Exemple 1. Étudier la convergence des séries : a) $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ b) $\sum \frac{1}{3^n}$

Théorème 1. Condition nécessaire de convergence Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \to 0$. **Réciproque fausse**

Définition 2. Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0 alors on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Exemple 2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^3}$

Théorème 2. Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $p \in \mathbb{N}$.

La série $\sum u_n$ converge ssi la série $\sum_{n \geq p} u_n$ converge. En cas de convergence, on a

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \ S = S_N + R_N, \text{ où } S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n,\ S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \text{ et } R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque : La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes, mais la valeur de la somme oui. Si S_N est une approximation de la somme S, alors l'erreur commise est R_N.

Définition 3. Soit $\sum u_n$ une série convergente.

On appelle **reste d'ordre** N de la série $\sum u_n$ le nombre $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$

Exemple 3. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge et que $\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N!}\right)$.

1.2 Premières propriétés

Théorème 3. Séries géométriques Soit $q \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$.

La série géométrique $\sum q^n$ a pour somme partielle d'ordre N, $S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$

La série géométrique $\sum q^n$ converge ssi $|q| < 1$. En cas de convergence,

sa somme est $S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ et le reste d'ordre N, $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} q^n = \frac{q^{N+1}}{1-q}$

Cas général : Si $|q| < 1$, $p \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{C}$, alors $\sum_{n=p}^{+\infty} bq^n = \frac{bq^p}{1-q}$

Exemple 4. Pour des lancers d'un dé équilibré, X est le rang du lancer qui amène le 1^{er} 6.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $p_n = \mathrm{P}(X = n)$. Montrer que $\sum p_n$ converge vers 1.

Propriété 1. Linéarité de la somme Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge et a pour somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Remarque : Si $\sum u_n$ CV et $\sum v_n$ CV alors $\sum(u_n+v_n)$ CV.
Si $\sum u_n$ CV et $\sum v_n$ DV alors $\sum(u_n+v_n)$ DV.
Si $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ DV alors on ne peut rien dire a priori sur la nature de $\sum(u_n+v_n)$

Exemple 5. Déterminer les suites réelles (u_n) telles que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 2u_{n+2}=-5u_{n+1}+3u_n \text{ et } \sum u_n \text{ converge.}$$

Théorème 4. Séries télescopiques Soit $(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

La suite (u_n) converge ssi la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.

Exemple 6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

2 Séries à termes positifs

Théorème 5. de la limite monotone Soit (u_n) une suite **réelle positive**.

La série $\sum u_n$ converge ssi la suite de ses sommes partielles (S_N) est majorée.

En cas de convergence, $\forall N\in\mathbb{N},\quad S_N=\displaystyle\sum_{n=0}^{N}u_n\leq\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$

En cas de divergence, $\quad S_N\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=+\infty$

Exemple 7. Étudier la nature de la série de terme général u_n défini par

$$u_0>0 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}u_k}$$

Propriété 2. Comparaison série-intégrale Soient $p,n,N\in\mathbb{N}$.

Si $f:[p,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue, positive et décroissante alors

1. $\forall n\geq p+1,\quad \displaystyle\int_{n}^{n+1}f(t)\mathrm{d}t\leq f(n)\leq\int_{n-1}^{n}f(t)\mathrm{d}t$
2. $\forall N\geq p+1,\quad \displaystyle\int_{p+1}^{N+1}f(t)\mathrm{d}t\leq\sum_{n=p+1}^{N}f(n)\leq\int_{p}^{N}f(t)\mathrm{d}t$
3. La série $\sum f(n)$ converge ssi $F:x\longmapsto\displaystyle\int_{p}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$.

Exemple 8. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la **série de Riemann** $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

On note S_N sa somme partielle d'ordre N, et R_N son reste d'ordre N.

1. Si $\alpha = 2$, montrer que la série converge et donner un équivalent de R_N lorsque $N \to +\infty$.
2. Si $\alpha = 1$, montrer qu'elle diverge et donner un équivalent de S_N lorsque $N \to +\infty$.

Théorème 6. Convergence des séries de Riemann Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Théorème 7. Comparaison de séries à termes positifs

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives (à partir d'un certain rang) vérifiant :

$u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, ou $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$.

1. Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.

Remarque : Si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$, et $\sum v_n$ converge alors

$$\sum_{n=p}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=p}^{+\infty} v_n, \quad \text{par passage à la limite.}$$

Exemple 9. Étudier la nature des séries $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ $\sum \mathrm{e}^{-n^2}$ $\sum \frac{\ln(n)}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$

Remarque : Si $u_n \geq 0$ et s'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \longrightarrow 0$ alors $\sum u_n$ converge.

Si $u_n \geq 0$ et s'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $n^\alpha u_n \longrightarrow +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.

Théorème 8. Séries à termes positifs et équivalents

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n > 0$ (à partir d'un rang p)

alors la série $\sum u_n$ converge ssi la série $\sum v_n$ converge.

Remarque : Le résultat précédent est encore vrai si $v_n < 0$ à partir d'un certain rang.

Exemple 10. Étudier la convergence des séries de terme général

1 . $u_n = \frac{1}{3n^2 - 2n + 1}$ 2. $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

3 Séries absolument convergentes

Définition 4. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Exemple 11. Montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum \frac{1+\mathrm{i}\sin(n)}{1+2^n}$ sont absolument convergentes.

Théorème 9. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors la série $\sum u_n$ est convergente.
2. En cas d'absolue convergence, on a l'inégalité triangulaire : $\left|\sum_{n=p}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=p}^{+\infty} |u_n|$.

Remarque : Une série peut-être convergente sans être absolument convergente.

Exemple 12. Montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais pas absolument convergente.

Théorème 10. Soit (u_n) à valeurs dans $\mathbb{K}$ et (v_n) réelle positive telles que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$.

Si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, et donc convergente.

Exemple 13. Étudier la nature des séries $\sum \frac{(-1)^n \ln^2(n)}{n^3+1}$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$ $(z \in \mathbb{C})$.

4 Développement décimal d'un nombre réel

Théorème 11. (et définition) Soit $x \in [0,1[$.

Il existe une unique suite d'entiers (a_n), à valeurs dans $[\![0,9]\!]$, non stationnaire à 9, telle que :

$$\text{la série } \sum \frac{a_n}{10^n} \text{ converge et a pour somme } x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

Un tel développement est noté $x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots$, et appelé **développement décimal propre de** x.

Cas particulier : $x \in [0,1[$ est rationnel ssi son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.