Séries numériques

Exercice 1 Dans chaque cas, montrer que la série $\sum u_n$ converge et déterminer sa somme :

1. $u_n = 2^{n+1}3^{2-n}$ 2. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ 3. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\dfrac{a-b}{1+ab}\right)$
3. En déduire la somme de la série de terme général u_n.

Exercice 3 Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{\mathrm{e}}{n}\right)^n$ converge vers un réel $C > 0$.

Exercice 4 En utilisant une comparaison avec une intégrale, montrer les équivalences suivantes :

1. $\ln(n!) \sim n\ln(n)$ 2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$

Exercice 5 Dans chaque cas, étudier la nature de la série de terme général u_n :

1. a) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ b) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$
2. a) $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n\sqrt{n}}$ b) $u_n = \sqrt{\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1}$
3. a) $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ b) $u_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{\mathrm{e}n}$

Exercice 6 Étudier la nature des séries de terme général :

1.$u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{n^2+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$ 2. $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3(x)}{1+x}\mathrm{d}x$

Exercice 7

1. Montrer que pour tout réel x, la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ est absolument convergente.
2. Montrer que pour tout réel x, $\displaystyle\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$

Exercice 8 On étudie la série $\sum \frac{u_n}{n^2}$, où $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$.

1. Déterminer, à l'aide d'une I.P.P., un équivalent simple de $\int_1^n \ln^2(t)\mathrm{d}t$ lorsque $n \to +\infty$.
2. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.
3. Conclure sur la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{n^2}$

Exercice 9 Soit $\alpha > 1/2$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$

1. Montrer que les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes.
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Est-elle ACV ?
3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge. Est-elle ACV ?