Espérance, variance et écart-type

$(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ est un espace probabilisé fini associé à une expérience aléatoire.
X **désigne une v.a.r. sur** Ω **d'univers image** $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$**.**

1 Espérance mathématique

Définition 1. On appelle **espérance** de X le nombre réel $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{P}(X = x_i)$

Si $\mathrm{E}(X) = 0$, on dit que la variable aléatoire X est **centrée.**

Exemple 1. Un jeu consiste à lancer trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.

On gagne 2 euros pour chaque résultat "pile" et on perd 1 euro pour chaque résultat "face".

On note G le gain en euros à l'issue d'une partie. Déterminer l'espérance de G.

Cas particuliers : v.a.r. constantes et indicatrices

• Si $b \in \mathbb{R}$ et si $X = b$, alors $\mathrm{E}(X) = b$.

• Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ est un événement et si $X = \mathbf{1}_A$, alors $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(A)$.

Lemme 1. L'espérance de X vérifie $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathrm{P}(\{\omega\})$

Propriété 1. Si X et Y sont deux v.a.r. sur Ω, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors

1. $\mathrm{E}(aX + bY) = a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(Y)$ **Linéarité de l'espérance**
2. si $X \geq 0$ alors $\mathrm{E}(X) \geq 0$ **Positivité de l'espérance**
3. si $X \leq Y$ alors $\mathrm{E}(X) \leq \mathrm{E}(Y)$ **Croissance de l'espérance**
4. $|E(X)| \leq E(|X|)$ **Inégalité triangulaire**

Remarque : $\mathrm{E}\left(X - \mathrm{E}(X)\right) = 0$. On dit que $Y = X - \mathrm{E}(X)$ est la **v.a.r. centrée associée** à X.

Théorème 1. Théorème de transfert Si $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle

alors $\mathrm{E}(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \mathrm{P}(X = x_i)$.

Exemple 2. Pour la situation de l'exemple 3, calculer $\sigma = \sqrt{\mathrm{E}\left[(G - \mathrm{E}(G))^2\right]}$. Interpréter.

2 Variance et écart-type

Définition 2. On appelle variance de X le nombre réel $\quad V(X) = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}(X))^2\right]$

On appelle écart-type de X le nombre réel $\quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Si $\mathrm{E}(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$, on dit que la variable aléatoire X est **centrée réduite.**

Propriété 2. 1. $V(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$ **Formule de König-Huygens**

2. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Remarque : La variable aléatoire $Y = \dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est la **variable centrée réduite associée** à X.

Exemple 3. Au jeu de la roulette, les 37 éventualités $\{0; 1; 2; \ldots; 36\}$ sont équiprobables.
Les numéros impairs sont rouges, les numéros pairs sont noirs, sauf le 0 qui est vert. Si on mise 1 euro sur "rouge ", on gagne 1 euro si un numéro rouge sort, sinon on perd sa mise. Lorsqu'on mise 1 euro sur un numéro, on gagne 35 euros si le numéro sort, sinon on perd sa mise.

Comparer ces deux façons de jouer (espérance de gain et écart-type).

Propriété 3. Inégalité de Markov Si X est une v.a. réelle **positive** alors

$$\forall a > 0 \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Propriété 4. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Interprétation : Par passage à l'événement contraire, cela s'écrit aussi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

A priori, on peut dire que $X(\omega)$ sera proche de $\mathrm{E}(X)$ à ε près avec une probabilité supérieure ou égale à $1 - \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$. Si, par exemple, $\dfrac{V(X)}{\varepsilon^2} \leq 0,05$ alors on peut dire que $X(\omega)$ sera dans l'intervalle $[\mathrm{E}(X) - \varepsilon, \mathrm{E}(X) + \varepsilon]$ avec un risque d'erreur de 5%.

3 Espérance et variance des lois usuelles

3.1 Loi uniforme

Propriété 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \sim \mathscr{U}(n)$ alors $\mathrm{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

3.2 Loi de Bernoulli

Propriété 6. Soit $p \in [0,1]$. Si $X \sim \mathscr{B}(p)$ alors $\mathrm{E}(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

3.3 Loi Binomiale

Propriété 7. Soit $p \in [0,1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathrm{E}(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Exemple 4. On effectue n lancers d'un dé à six faces bien équilibré. Soit $\varepsilon > 0$.

À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour n assez grand, la proportion de 6 est proche de $\dfrac{1}{6}$ à ε près avec une probabilité supérieure à $0,9$.

4 Covariance

Définition 3. On appelle **covariance** de deux v.a.r X et Y, et on note $\mathrm{Cov}(X,Y)$, le nombre $E\big[(X - E(X))(Y - E(Y))\big]$.
Lorsque cette covariance est nulle, on dit que les deux v.a.r sont **décorellées**.

Théorème 2. Pour toutes v.a.r X et Y,
$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Propriété 8. Si X et Y sont des v.a.r. indépendantes alors
1. $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ 2. $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ 3. $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Remarque : La réciproque de la propriété précédente est fausse.

Exemple 5. Soit $X \sim \mathscr{U}(\llbracket -1, 1 \rrbracket)$ et Y l'indicatrice de l'événement $(X = 0)$.

Montrer que $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes.

Application : Soient n v.a.r X_i indépendantes, de même loi d'espérance m et d'écart type σ.

La v.a.r $M = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ a pour espérance m et pour écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

D' après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\forall a > 0$, $P(|M-m| \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2}{na^2}$

Interprétation fréquentiste : si $X_1, \ldots, X_n$ sont les valeurs prises par une v.a.r X lors de n répétitions indépendantes d'une expérience, alors la probabilité que la moyenne observée des valeurs prises par X s'écarte de la moyenne théorique de plus d'un écart donné $a > 0$ tend vers 0 lorsque le nombre n de répétitions tend vers l'infini.

Application : On retrouve ainsi facilement l'espérance d'une v.a.r. X de loi $\mathscr{B}(n, p)$.