Espérance, variance et écart-type

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\beta \in \mathbb{R}$. X une v.a.r. vérifiant $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathrm{P}(X = k) = \dfrac{\beta}{k+1}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. Retrouver la valeur de β, puis l'espérance de X.

Exercice 2 Soit $p \in]0, 1[$. Un homme ivre quitte ses amis à la sortie d'un restaurant R.
Il décide de prendre le bus pour rentrer ; l'arrêt de bus B est situé face à lui.
A cause de son état, il se dirige en direction de cet arrêt de manière aléatoire, en diagonale vers la gauche ou vers la droite avec la même probabilité p.
On suppose que l'homme fait exclusivement n pas et que la distance parcourue à chaque pas est identique.
On note X_n la variable aléatoire qui donne la position de l'ivrogne au bout de n pas sur un axe pour lequel l'arrêt de bus correspond à $X_n = 0$.

1. Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
2. On note Y_n le nombre de fois où l'ivrogne est allé à droite au bout de n pas. Déterminer la loi de Y_n puis son espérance et sa variance.
3. Exprimer X_n en fonction de Y_n. En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.
4. Quel est la probobilité que l'ivrogne atteigne l'arrêt de bus ?

Exercice 3 Soit un entier $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages successifs avec remise. On note N_1 le numéro de la première boule tirée, N_2 celui de la deuxième, X le plus grand des deux numéros et Y le plus petit.

1. (a) Les v.a.r. N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?
   (b) Déterminer les lois, espérances et variances respectives de N_1 et N_2.
   (c) Calculer la variance de $N_1 + N_2$.
2. (a) Déterminer la loi conjointe de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   (b) Déterminer les lois respectives de X et Y puis calculer $\mathrm{E}(X)$.
   (c) Exprimer $X + Y$ en fonction de N_1 et N_2. En déduire $\mathrm{E}(Y)$.
   (d) Comparer les lois de $n + 1 - X$ et de Y. En déduire $V(X)$ et $V(Y)$.

Exercice 4 Une urne, de grande contenance, contient 3 boules vertes et 7 boules bleues. On effectue des tirages successifs avec remise : à chaque tirage on remet la boule et on en rajoute deux de la couleur tirée. On note S_n le nombre de boules bleues tirées au cours des n premiers tirages et X_n la variable de Bernoulli valant 1 si une boule bleue est tirée au *n-ième* tirage, et 0 sinon.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

2. (a) Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant $(X_1 = 0)$, puis la loi conditionnelle de X_2 sachant $(X_1 = 1)$.
   (b) En déduire la loi du couple (X_1, X_2) puis celle de X_2. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3. (a) Calculer $\mathrm{P}(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$ en fonction de k et n.
   (b) En déduire $\mathrm{P}(X_{n+1} = 1)$ en fonction de n et $\mathrm{E}(S_n)$.

4. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que : $\mathrm{P}(X_n = 1) = 0.7$ et $\mathrm{E}(S_n) = 0.7n$.

Exercice 5 Soit un entier $n \geq 2$. Une urne contient $2n$ boules, parmi lesquelles n sont numérotées de 1 à n, les autres portant le numéro 0. On tire simultanément n boules au hasard. On considère que les tirages sont équiprobables. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule portant le numéro k fait partie du tirage, et la valeur 0 sinon.

1. Déterminer la loi de X_k, son espérance et sa variance.
   Les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?

2. (a) On pose $S = \sum_{k=1}^{n} k X_k$. Que représente cette variable aléatoire ?
   (b) Calculer l'espérance de S. Interpréter ce résultat.

3. (a) On pose $N = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Que représente cette variable aléatoire ?
   (b) Déterminer la loi de la variable N, et son espérance.
   (c) En déduire une expression simple de $u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2$.