Devoir maison n$^{\text{o}}$ 19

A rendre le jeudi 22 mai 2025

On pose pour k entier naturel, $I_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2k}\, d\theta$ et $J_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{2k}(\cos\theta)^2\, d\theta$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que pour tout $k > 0$, $\quad I_{k-1} - I_k = J_{k-1}$.

3. Avec une intégration par parties, montrer que pour tout $k > 0$, $\quad J_{k-1} = \dfrac{1}{2k-1} I_k$

   En déduire la relation de récurrence (R) $I_k = \dfrac{2k-1}{2k}\, I_{k-1}$

4. Démontrer par récurrence que pour tout $k > 0$, $\quad I_k = \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$

   On pose $u_n = \ln(I_n)$.

5. Démontrer, à partir de la relation de récurrence (R), que pour tout entier $n > 0$:

   $u_n = u_{n-1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{2k}\right)$

6. (a) Étudier la fonction h définie par $h(x) = \ln(1+x) - x$ sur $]-1, 0]$. Donner son signe.

   (b) Montrer que pour tout entier $k > 0$, $\ln\left(1 - \dfrac{1}{2k}\right) < \dfrac{-1}{2k} < 0$.

   (c) Donner $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$, puis $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$.

7. On pose $S_n(x,\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}\ (x\sin\theta)^{2k}$ et $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(k!)^2}\ \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}$

   Montrer que $g_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} S_n(x,\theta)\, d\theta$.