Correction du devoir surveillé n° 7

Exercice 1 On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par
$\forall P \in E, \varphi(P) = 2P - (X-1)P'$

1. Si $P \in E$, on sait que deg $(P) \leqslant 2$, donc deg $(P') \leqslant 1$, et deg $((X-1)P') \leqslant 2$.
   Quand on soustrait deux polynômes de degré inférieur ou égal à 2, le résultat l'est aussi, ce qui prouve que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.
   On démontre que φ est linéaire (à faire) et $\boxed{\varphi \text{ est bien un endomorphisme de } E.}$
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$, alors $\varphi(P) = 2aX^2 + 2bX + 2c - (X-1)(2aX+b) =$
   $2aX^2 + 2bX + 2c - 2aX2 + 2aX - bX + b = (b+2a)X + 2c + b$.
   $\varphi(p) = 0 \Leftrightarrow b + 2a = 2c + b = 0$, soit $c = a = -\dfrac{b}{2}$
   On en déduit que $\boxed{\text{Ker}(\ \varphi) = \text{Vect } (X^2 - 2X + 1) \text{ et Ker } (\varphi) \text{ est une droite vectorielle.}}$
   $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective}}$ puisque son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.
3. On peut calculer les images des polynômes de la base canoniques :
   $\varphi(1) = 2, \varphi(X) = 2X - (X-1) = X+1$ et $\varphi(X^2) = 2X^2 - 2X(X-1) = 2X$.
   On peut alors dire que Im $(\varphi) =$ Vect $(2, X+1, 2X) =$ Vect $(2, 2X) = \boxed{\text{Vect } (1, X).}$
4. Ker $(\varphi) \cap$ Im $(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}_[X]}\}$ car les polynômes de l'image sont tous de degré inférieur ou égal à 1, alors que ceux du noyau (hormis le polynôme nul) sont de degré 2. Puisque les dimensions respectives du noyau et de l'image sont de 1 et de 2, et que dim $(E) = 3$, cela suffit à prouver que Ker (φ) et Im (φ) sont bien supplémentaires.
5. Soit p la projection vectorielle sur Ker (φ) de parallèlement à Im (φ).
   $\boxed{\varphi \circ p = 0}$ car p est la projection sur Ker (φ), $p(P) \in$Ker $(\varphi), \forall P \in E$
   $\boxed{p \circ \varphi = 0}$ car la projection p est parallèlement à Im (φ) donc Ker $p =$ Im φ

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On tire deux boules successivement dans cette urne. Soit X la variable aléatoire égale au premier numéro obtenu et Y la variable aléatoire égale au deuxième numéro obtenu.

1. Le tirage des deux boules successives se fait sans remise.

   (a) $(X, Y)(\Omega) = [\![1, n]\!]^2$ et $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:
   $\boxed{\bullet \text{ Si } i = j \text{ alors } P(X = i \cap Y = i) = 0}$
   $\boxed{\bullet \text{ Si } i \neq j \text{ alors } P(X = i \cap Y = j) = P(X = i)P(Y = j|X = i) = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{n-1}}$

   (b) $\boxed{X \sim \mathscr{U}(n)}$
   D'après la formule des probabilités totales, $\{(X = i), i \in [\![1, n]\!]\}$ étant un système complet d'événements

$$P(Y=j)=\sum_{j=1}^{n} P(X=i\cap Y=j)=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{n(n-1)}=\frac{n-1}{n(n-1)}=\frac{1}{n} \text{ pour tout}$$

$j\in[\![1,n]\!]$ donc $\boxed{Y\sim\mathscr{U}(n)}$

(c) Les variables aléatoires $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$ car

$P(X=i\cap Y=i)=0\neq P(X=i)P(Y=i)=\dfrac{1}{n^2}$

2. Le tirage des deux boules successives se fait avec remise.

(a) $\boxed{X\sim\mathscr{U}(n)}$. $\boxed{Y\sim\mathscr{U}(n)}$

(b) Les variables aléatoires $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$ car le tirage se fait avec remise.

(c) $Z=X+Y$. $Z(\Omega)=[\![2,2n]\!]$

$P(X+Y=k)=\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}P(X=i\cap Y=k-i)=\sum_{i=1}^{k-1}P(X=i)P(Y=k-i)$ car X et Y sont indépendantes et car $P(X=0)=P(y=0)=0$

• Si $k\leqslant n+1$ alors $i\in[\![1,n]\!]$ et $k-i\in[\![1,n]\!],\forall i\in\in[\![1,k-1]\!]$. On a alors

$P(X=i)=P(Y=k-i)=\dfrac{1}{n}$ et $P(Z=k)=\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{n^2}=\frac{k-1}{n^2}$

• Si $k>n+1$ alors $P(X=i)P(Y=k-i)\neq 0\Leftrightarrow 1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant k-i\leqslant n$

$\Leftrightarrow 1\leqslant i\leqslant n$ et $k-n\leqslant i\leqslant k-1\Leftrightarrow k-n\leqslant i\leqslant n$

$P(Z=k)=\displaystyle\sum_{i=k-n}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{n-(k-n)+1}{n^2}=\frac{2n-k+1}{n^2}$

$$\boxed{\text{La loi de } Z \text{ est donc donnée par } Z(\Omega)=[\![2,2n]\!] \text{ et } P(Z=k)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{n^2} & 2\leqslant k\leqslant n+1\\[2ex] \dfrac{2n-k+1}{n^2} & n+2\leqslant k\leqslant 2n\end{cases}}$$

Exercice 3 On pose $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$

1. $t\mapsto\dfrac{e^t}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ donc f existe si $0\notin[x,x^2]$ ce qui est la cas pour $x>0$ et $\boxed{f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*)}$.

Si on note G une primitive de $t\mapsto\dfrac{e^t}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=G(x^2)-G(x)$ donc

$f'(x)=2xG'(x^2)-G'(x)=2x\dfrac{e^{x^2}}{x^2}-\dfrac{e^x}{x}\boxed{=\dfrac{2\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^x}{x}}$

2. Sur $[1,+\infty[$, $x \leqslant x^2$ et $\dfrac{e^t}{t} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}}{t}$ donc

   $f(x) \geqslant \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{e}}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}(\ln(x^2) - \ln x) = \mathrm{e}\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

3. Sur $]0,1]$, $x \geqslant x^2$ et $\dfrac{e^t}{t} \geqslant \dfrac{1}{t}$ donc $f(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(x^2) - \ln x = \ln x \underset{x\to 0_+}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

4. f' est du signe de $2\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

   Or $2\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^x \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{x^2-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow x^2 - x \geqslant \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 - x + \ln 2 \geqslant 0$

   $\Delta = 1 - 4\ln 2 = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2^4}\right) < 0$ donc $\boxed{f' \text{ est positive sur } \mathbb{R}_+^*.}$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	$\Vert$	$-\infty \nearrow +\infty$

5. On poste $x = 1 + u$ avec $u \to 0$.

   $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^x}{x} = \dfrac{2\mathrm{e}^{1+2u+u^2} - \mathrm{e}^{1+u}}{1+u} = \mathrm{e}\dfrac{2\mathrm{e}^{2u+u^2} - \mathrm{e}^u}{1+u}$

   $\mathrm{e}^u \underset{0}{=} 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$

   $\mathrm{e}^{2u+u^2} \underset{0}{=} 1 + 2u + u^2 + \dfrac{4u^2}{2} + o(u^2) = 1 + 2u + 3u^2 + o(u^2)$

   $2\mathrm{e}^{2u+u^2} - \mathrm{e}^u \underset{0}{=} 1 + 3u + \dfrac{11u^2}{2} + o(u^2)$

   $\dfrac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$ d'où

   $f'(x) \underset{u\to0}{=} \mathrm{e}\left(1 + 2u + \dfrac{7u^2}{2} + o(u^2)\right) \underset{x\to1}{=} \mathrm{e}\left(1 + 2(x-1) + \dfrac{7(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)\right)$

   puis en primitivant entre 1 et x, avec $f(1) = 0$ on obtient

   $\boxed{f(x) = \underset{x\to1}{=} \mathrm{e}\left((x-1) + (x-1)^2 + \dfrac{7(x-1)^3}{6} + o((x-1)^3)\right)}$

6. Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_f$ en 1 est $\boxed{y = \mathrm{e}(x-1)}$

   $(x-1) \geqslant 0$ pour tout x, donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{T} \text{ au voisinage de 1.}}$