Devoir surveillé n° 7

Ce devoir est constitué d'exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.

La qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, la présentation et l'orthographe font partie des critères de notation. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 6 points : 1. 1.5 2. 1.5 3. 1 4. 1 5. 1

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par

$$\forall P \in E, \varphi(P) = 2P - (X - 1)P'$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ est une droite vectorielle dont on précisera une base.
L'endomorphisme φ est-il injectif ?
3. Montrer que $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(1, X)$.
4. Montrer que $\text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Im}(\varphi) = E$.
5. Soit p la projection vectorielle sur $\text{Ker}(\varphi)$ parallèlement à $\text{Im}(\varphi)$.
Déterminer $\varphi \circ p$ et $p \circ \varphi$.

Exercice 2 7 points : 1. (a) 1 1. (b) 2 1. (c) 1 2. (a) 0.5 2. (b) 0.5 2. (c) 2

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

On tire deux boules successivement dans cette urne. Soit X la variable aléatoire égale au premier numéro obtenu et Y la variable aléatoire égale au deuxième numéro obtenu.

1. Le tirage des deux boules successives se fait sans remise.
 - (a) Déterminer la loi du couple (X, Y) .
 - (b) En déduire la loi de la variable aléatoire X et la loi de la variable aléatoire Y .
 - (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Le tirage des deux boules successives se fait avec remise.
 - (a) Donner les lois des variables aléatoires X et Y .
 - (b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
 - (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$. Pour le calcul $P(X + Y = k)$, on pourra distinguer les cas $k \leq n + 1$ et $k > n + 1$.

Exercice 3 7 points : 1. 0.5 2. 1 3. 1 4. 1.5 5. 2 6. 1

On pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ et calculer sa dérivée f' .
2. Minorer f sur $[1, +\infty[$ puis en déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Majorer f sur $]0, 1]$ puis en déduire la limite de f en 0_+ .
4. Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variations de f .
5. Déterminer le développement limité d'ordre 3 de f en 1.
6. En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ en 1. Préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ au voisinage de 1.