

Correction du Test n° 18

Sujet A

1. On dispose d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n .

(a) Un joueur pioche au hasard un jeton dans l'urne. On note X le numéro tiré.

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } X \text{ suit la loi uniforme sur } \llbracket 1, n \rrbracket.$$

(b) Le joueur pioche à présent deux jetons successivement sans remise dans l'urne.

$$P(U \leq i) = \frac{i}{n} \text{ et } P(D \leq i | U \leq i) = \frac{i-1}{n-1}$$

$$P(Y \leq i) = P(U \leq i \cap D \leq i) = P(U \leq i)P(D \leq i | U \leq i) = \frac{i^2 - i}{n^2 - n}$$

2. On pose $f(x) = \int_x^{x^2} \ln t \, dt$.

$t \mapsto \ln t$ est continue sur \mathbb{R}_+^* donc f est C^1 sur \mathbb{R}_+^* . Si on note F une primitive de cette fonction, on a $f(x) = F(x^2) - F(x)$ donc

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2x \ln(x^2) - \ln x = (4x - 1) \ln x$$

Correction du Test n° 18

Sujet B

1. On dispose d'une urne contenant $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$.

(a) Un joueur pioche au hasard un jeton dans l'urne. On note X le numéro tiré.

$$X(\Omega) = \llbracket 1, 2n \rrbracket \text{ et } X \text{ suit la loi uniforme sur } \llbracket 1, 2n \rrbracket.$$

(b) Le joueur pioche à présent deux jetons successivement avec remise dans l'urne.

$$P(U \leq i) = \frac{i}{2n} \text{ et } P(D \leq i) = \frac{i}{2n}$$

Les variables aléatoires U et D sont indépendantes car le tirage se fait avec remise

$$\text{donc } P(Y \leq i) = P(U \leq i \cap D \leq i) = P(U \leq i)P(D \leq i) = \frac{i^2}{4n^2}$$

2. On pose $f(x) = \int_x^{x^2} e^{-t} \, dt$. Justifier que f est C^1 sur \mathbb{R} et calculer f' .

$t \mapsto e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R} donc f est C^1 sur \mathbb{R} . Si on note F une primitive de cette fonction, on a $f(x) = F(x^2) - F(x)$ donc $f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xe^{-x^2} - e^{-x}$