Correction du Test n° 19 Sujet A

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\big((x,y,z)\big) = (x+2y+3z, y+2z)$

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=-2z \end{cases}$

   Ker A = Vect $(1,-2,1)$ puis rg $A = 2$ d'après le théorème du rang. Or Im A est un sev de $\mathbb{R}^2$, donc Im $A = \mathbb{R}^2$ et f est surjective.

   On peut aussi dire que Im A = Vect $((1,0),(2,1)) = \mathbb{R}^2$ vu que ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. Par comparaison série-intégrale, étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

   On pose $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$, f est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$

   $$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^x = -2\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

   Par le théorème de comparaison, série-intégrale, $\sum u_n$ converge.

Correction du Test n° 19 Sujet B

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f\big((x,y,z)\big) = (x+y+4z, y+2z)$

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } A \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+4z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=-2z \end{cases}$

   Ker A = Vect $(-2,-2,1)$ puis rg $A = 2$ d'après le théorème du rang.Or Im A est un sev de $\mathbb{R}^2$, donc Im $A = \mathbb{R}^2$ et f est surjective.

   On peut aussi dire que Im A = Vect $((1,0),(1,1)) = \mathbb{R}^2$ vu que ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. Par comparaison série-intégrale, étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

   On pose $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, f est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$

   $$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^x = 2\left(\sqrt{x} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

   Par le théorème de comparaison, série-intégrale, $\sum u_n$ diverge.