Exercice 1 On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

Partie A

1. (a) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
   (b) Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $D' = D \cup \{0\}$. On précisera $f(0)$ et on continuera à appeler f le prolongement ainsi obtenu.
   (c) Justifier que f est dérivable sur D et calculer f' sur D.
2. (a) Donner le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 en 0.
   (b) Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D'.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.
   (d) Montrer en détaillant le raisonnement que $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.
   (e) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, ainsi que l'équation d'une asymptote à $\mathcal{C}_f$.
3. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Tracer l'allure de la courbe de f, en faisant apparaître une tangente et deux asymptotes de celle-ci.
4. Quelle est la nature de la série $\sum f(n)$?

Partie B Dans la suite, on s'intéressera à l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur. Pour tout entier naturel n non nul, on définit les fonctions polynomiales P_n et Q_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$
$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k^2} = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2}\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}$$

1. (a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ est bien définie.
   (b) En utilisant le graphique de la question A.3.(b), donner un encadrement de L entre deux entiers consécutifs.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$.
   (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$, $P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$.
2. Dans toute la suite on notera $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$
   (a) Établir la majoration $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.
   (b) Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1]$, $Q_n'(x)$ et $\dfrac{P_n(x)}{x}$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note g_n l'application définie par $\forall x \in [0,1]$, $g_n(x) = Q_n'(x) - f(x)$. Justifier que g_n est continue sur $[0,1]$ puis montrer que $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = Q_n(1) - L$.

(d) Montrer, en utilisant entre autres B.2.(a) et B.2.(b), que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$, $|g_n(x)| \leq \dfrac{x^n}{n+1}$.

(e) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|Q_n(1) - L| \leq \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(1)$.

(f) Déterminer un entier naturel N tel que $Q_N(1)$ approche L à 10^{-4} près.

Exercice 2 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

On notera Γ la courbe représentative de F.

1. **Quelques proriétés de F sur $\mathbb{R}_+^*$**

   (a) Justifier que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner sa dérivée.

   (b) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   Indication : on pourra utiliser le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

   (d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) \geq 0$.

   Indication : on pourra d'abord considérer le cas où $x \geq 1$, *puis celui où* $0 < x < 1$.

2. **Étude de F aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$**

   (a) Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x}$.

   Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \arctan(x)\ln(x) - \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\mathrm{d}t$.

   (c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.

   On notera encore F le prolongement ainsi obtenu.

   (d) Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0.

   Que dire de Γ en son point d'abscisse 0 ?

   (e) Déterminer la limite de F quand x tend vers $+\infty$.

   Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 1.(C).

3. **Approximation des valeurs de F**

   (a) Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $I_k(x) = \displaystyle\int_1^x t^k \ln(t)\mathrm{d}t$.

   (b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,

   $$F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x) = (-1)^{n+1}\int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ln(t)\mathrm{d}t$$

   (d) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$. Montrer que $\left|F(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leq I_{2n+2}(x)$.

(e) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |F(0) - w_n| \leq \dfrac{1}{(2n+3)^2}$.

Exercice 3

Partie A Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le n-ième nombre harmonique par $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

2. En déduire que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
3. On considère désormais les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = H_n - \ln(n), \qquad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

(a) Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

(b) En déduire que ces deux suites convergent vers une même limite positive. Cette limite est notée γ.

4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Partie B : Le problème de Bâle Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ par $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$. Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Justifier la convergence de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$
3. Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 2.
4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t \in [0, \pi]$, on pose $D_n(t) = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$

(a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t \in [0, \pi]$, $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = D_n(t)$

(b) En déduire que, si $t \in]0, \pi]$, $D_n(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

(c) Calculer la valeur de $D_n(0)$.

5. On considère la fonction f définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{t}{\sin t} \text{ si } t > 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$

(a) Démontrer que f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Donner le développement limité de $(t - \sin t)$ en 0 à l'ordre 3.

(c) Démontrer que f est dérivable en 0.

(d) Donner le développement limité de $(\sin t - t\cos t)$ en 0 à l'ordre 3.

(e) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6. (a) Démontrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que pour tout entier naturel k non nul, $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{D_n(t) - 1}{2}\mathrm{d}t$

(c) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t$

(d) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)D_n(t)\mathrm{d}t$$

(e) En déduire à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{2}t$ que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\left(2 - \frac{2t}{\pi}\right)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$$

7. Déterminer une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ telle que

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$$

8. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t = 0$$

9. En déduire la limite de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 4 Soient n et c deux entiers naturels fixés, avec $c \geq 1$ et $n \geq 3$. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne, avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, réalisant ainsi une succession de n tirages. Pour tout i entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule blanche au i-ème tirage, et 0 sinon. On pose alors, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $Z_p = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i$.

1. Que représente Z_p, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$?
2. Donner la loi de X_1 et son espérance.
3. Déterminer la loi de Z_2.

4. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$.
   (a) Quel est l'ensemble $Z_p(\Omega)$ des valeurs prises par Z_p ?
   (b) Déterminer, pour tout $k \in Z_p(\Omega)$, la valeur de $P_{(Z_p=k)}\left(X_{p+1}=1\right)$.
   (c) En déduire que : $P\left(X_{p+1}=1\right) = \dfrac{1+cE(Z_p)}{2+pc}$.
5. Montrer par récurrence forte que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, X_p a même loi que X_1.

Exercice 5 Dans tout cet exercice, on désigne par n un entier naturel non nul.
On dispose d'une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.
• Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
• Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.
• On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.
On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire que l'on ne cherchera pas à expliciter. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1.

Partie A Cas particuliers

1. Déterminer $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$.
2. Quelle est la loi de X_1 ?
3. (a) Quel est l'événement $(X_2 = 1)$? Déterminer $P(X_2 = 1)$.
   (b) Déterminer la loi de X_2.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de X_2.

Partie B Cas général On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 **quelconque**.
On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. Expliciter l'ensemble des valeurs prises par I_n, noté $I_n(\Omega)$, et donner la loi de I_n.
2. Justifier que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
3. Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
4. Justifier que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![2, n]\!]$, $P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j-1)$
5. En appliquant la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $j \geq 2$,
$$P(X_n = j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1)$$
6. Démontrer que, pour tout $j \geq 2$, $P(X_n = j) = \dfrac{n-1}{n}P(X_{n-1} = j) + \dfrac{1}{n}P(X_{n-1} = j-1)$
   On pourra exprimer $nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j)$ en utilisant le résultat de la question précédente.

7. (a) Démontrer que $E(X_n) = E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 6 Considérons dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$ les polynômes
$P_1 = 1 + X^2, P_2 = X\left(1 + X^2\right)$ et $P_3 = \left(1 + X^2\right)^2$ ainsi que les ensembles
$F = Vect\left\{P_1, P_2, P_3\right\}, G = \left\{P \in E, \left(X^2 + 1\right) \text{ divise } P\right\}$ et
$H = \{P \in E, P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$.

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?
2. Traduire algébriquement l'information : « $\left(X^2 + 1\right)$ divise P $\in$ E˘. Montrer que si la famille de polynômes $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ est libre il en est de même de $\left\{\left(X^2 + 1\right)Q_1, \left(X^2 + 1\right)Q_2, \left(X^2 + 1\right)Q_3\right\}$.
3. En déduire que G est un sous-espace vectoriel de E, et en donner une base.
4. Justifier que F = G.
5. Rappeler la formule de Taylor pour les polynômes.
6. Justifier que H est également un sous-espace vectoriel de E. En donner une base et sa dimension.
7. Montrer que si $\left(X^2 + 1\right)$ divise $(X - 1)^3 A, A \in$ E alors $\left(X^2 + 1\right)$ divise A .
8. En déduire que $G \cap H$ se réduit au polynôme nul.
9. G et H sont-ils supplémentaires dans E ? Justifier votre réponse.

Exercice 7 On pose, pour tout entier naturel N $\quad S_N(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} P(2k + 1)$.
Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = Q$ où
$Q(X) = P(X + 1) - P(X - 1)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le degré de $f\left(X^i\right)$ pour $1 \leq i \leq n$. En déduire Im(f). Déterminer Ker(f).
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f(P) = Q$. Exprimer très simplement $S_N(Q)$ en fonction de P.
4. On suppose désormais que $n = 3$, et on considère les polynômes suivants :
   $N_0 = 1 \quad N_1 = \dfrac{X}{2} \quad N_2 = \dfrac{(X-1)(X+1)}{4} \quad N_3 = \dfrac{(X-1)X(X+1)}{6}$.
   a) Montrer que $B = (N_0, N_1, N_2, N_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Déterminer les images de ces quatre vecteurs par f.
b) Résoudre l'équation : $f(P) = aX^2 + bX + c$, où a, b, c sont trois réels donnés.
c) Que valent $S_0(X(X - 1))$ et $S_0(X(X + 2))$? Déduire de **4b**) une expression simplifiée des sommes $S_N(X(X - 1)) = 3 \times 2 + 5 \times 4 + 7 \times 6 + \ldots + (2N + 1)(2N)$
$S_N(X(X + 2)) = 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \ldots + (2N + 1)(2N + 3)$