Correction du Test n° 20 et dernier !

Sujet A

1. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \mathrm{e}^{n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$

   $n^2 \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = -n^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = -n^2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = -n + \dfrac{1}{2} + o(1)$

   donc $u_n = \mathrm{e}^{-n+\frac{1}{2}+o(1)} = \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{o(1)} \sim \mathrm{e}^{-n}\sqrt{\mathrm{e}}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-1} \in]-1,1[$ convergente, donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$ par comparaison des séries à termes positifs.

2. (a) $F(X) = \dfrac{1}{(2X+1)(2X+3)} = \dfrac{1}{2(2X+1)} - \dfrac{1}{2(2X+3)}$

   (b) $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}\right) = \boxed{= \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2N+3} + 1\right)}$
   par télescopage.

   (c) $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \lim_{N\to+\infty} S_N \boxed{= \dfrac{1}{2}}$

3. Dans une urne se trouvent six boules. Trois sont numérotées 1, deux sont numérotées 2 et la dernière est numérotée 3. On effectue des tirages successifs sans remise de toutes les boules de l'urne.

   (a) X_1 est le nombre de boules numérotées 1 présentes dans l'urne à l'issue du troisième tirage.

   $X_1(\Omega) = [\![0,3]\!]$ $P(X_1 = 0) = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{20}$

   Pour avoir $X_1 = 1$, il faut tirer deux boules 1 parmi les trois disponibles, et une boule parmi les trois autres, $P(X_1 = 1) = 3 \times \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{20}$

   Pour avoir $X_1 = 2$, il faut tirer une boule 1 parmi les trois disponibles, et deux boules parmi les trois autres, $P(X_1 = 2) = 3 \times \dfrac{3}{6} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{9}{20}$

   Pour avoir $X_1 = 3$, il faut tirer les deux boules 2 et la boule 3

   $P(X_1 = 3) = 3 \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{20}$

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X_1 = k)$	$\dfrac{1}{20}$	$\dfrac{9}{20}$	$\dfrac{9}{20}$	$\dfrac{1}{20}$

   $E(X_1) = \dfrac{0\times 1 + 1\times 9 + 2\times 9 + 3\times 1}{20} = \dfrac{3}{2}$

   $E(X_1^2) = \dfrac{0\times 1 + 1\times 9 + 4\times 9 + 9\times 1}{20} = \dfrac{54}{20} = \dfrac{27}{10}$ et $V(X_1) = \dfrac{27}{10} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{9}{20}$

(b) X_2 est le nombre de tirages nécessaires avant de ne plus avoir de boules numérotées 1 dans l'urne. $X_2(\Omega) = [\![3, 6]\!]$

Pour avoir $X_2 = 3$, il faut tirer les trois boules 1 lors des trois premiers tirages, on a vu que cela se produisait avec probabilité $\dfrac{1}{20}$

Pour avoir $X_2 = 4$, il faut tirer deux boules 1 lors des trois premiers tirages (probabilité $\dfrac{9}{20}$ d'après la question précédente), puis lors du quatrième tirage, tirer la dernière boule 1 parmi les trois restantes, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{3}$,$P(X_2 = 4) = \dfrac{9}{20} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{20}$

De même, pour $X_2 = 5$, il faut tirer deux boules 1 et deux autres sur les quatre premiers tirages puis tirer la boule 1 au cinquième tirage parmi les deux restantes,

$$P(X_2 = 5) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

On obtient par soustraction $P(X_2 = 6) = \dfrac{1}{2}$ (il y a une chance sur deux que la dernière boule à tirer soit une numéro 1 puisque la moitié des boules au départ sont numérotées 1).

k	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X_2 = k)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

$E(X_2) = \dfrac{3}{20} + \dfrac{12}{20} + \dfrac{15}{10} + \dfrac{6}{2} = \dfrac{105}{20} = \dfrac{21}{4}$ et $E(X_2^2) = \dfrac{9 + 48 + 150 + 360}{20} = \dfrac{567}{20}$ puis

$$V(X_2) = \frac{567}{20} - \frac{441}{16} = \frac{63}{80}$$

Correction du Test n° 20 et dernier !

Sujet B

1. $u_n = \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^3} = \mathrm{e}^{n^3 \ln\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)}$

   $n^3 \ln\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right) = -n^3 \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = -n^3\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right) = -n + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

   donc $u_n = \mathrm{e}^{-n+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2n}}\,\mathrm{e}^{o\left(\frac{1}{n}\right)} \sim \mathrm{e}^{-n}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-1} \in]-1,1[$ convergente, donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$ par comparaison des séries à termes positifs.

2. (a) $F(X) = \dfrac{1}{(2X-1)(2X+1)} = \dfrac{1}{2(2X-1)} - \dfrac{1}{2(2X+1)}$

   (b) $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \boxed{= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2N-1}+1\right)}$
   par télescopage.

   (c) $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{N\to+\infty} S_N \boxed{= \frac{1}{2}}$

3. Dans une urne se trouvent six boules. Trois sont numérotées 1, deux sont numérotées 2 et la dernière est numérotée 3. On effectue des tirages successifs sans remise de toutes les boules de l'urne.

   (a) X_1 est le rang du tirage de la boule numérotée 3.
   X_1 prend toutes les valeurs de 1 à 6 avec probabilité $\dfrac{1}{6}$, car $P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{6}$
   $P(X_1 = 2) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{5}$
   $P(X_1 = 3) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{4}$ $P(X_1 = 4) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3}$,
   $P(X_1 = 5) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}$
   $P(X_1 = 6) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 1$ d'après la formule des probabilités composées.
   X_1 suit la loi uniforme de paramètre 6 et $E(X_1) = \dfrac{7}{2}$
   $E(X_1^2) = \dfrac{1+4+9+16+25+36}{6} = \dfrac{91}{6}$ et $V(X_1) = \dfrac{91}{6} - \dfrac{49}{4} = \dfrac{35}{12}$

   (b) X_2 est la somme des numéros tirés lors des trois premiers tirages.

   $X_2(\Omega) = [\![3,7]\!]$

   Pour obtenir 3, il faut tirer les trois numéros 1, la probabilité correspondante vaut $\dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{20}$

Pour avoir 4, il faut tirer deux 1 et un 2, ce qui donne $3 \times \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$
Pour le 5, on peut tirer deux 1 et un 3 : $3 \times \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4}$ ou bien un 1 et les deux 2 : $3 \times \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4}$ ce qui donne $\dfrac{3}{10}$
Pour une somme de 6, il faut un 1, un 2 et un 3 : $6 \times \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{10}$
et pour le 7 : $3 \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{20}$

k	3	4	5	6	7
$\mathrm{P}(X_2 = k)$	$\dfrac{1}{20}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{20}$

$E(X_2) = \dfrac{3}{20} + \dfrac{12}{10} + \dfrac{15}{10} + \dfrac{18}{10} + \dfrac{7}{20} = 5$ et

$E(X_2^2) = \dfrac{9 + 96 + 150 + 216 + 49}{20} = \dfrac{520}{20} = 26$ puis $V(X_2) = 26 - 25 = 1$