Correction du Devoir maison n° 20

Exercice 1 Pour tout réel $a > 0$, notons Δ_a l'application définie dans $\mathbb{R}[X]$ par

$$\Delta_a(P)(X) = \frac{P(X+a) - P(X-a)}{2a}$$

0. $\Delta_a(P)(X) = \dfrac{P(X+a) - P(X)}{2a} + \dfrac{P(X-a) - P(X)}{-2a}$
   Or $\dfrac{P(X+a) - P(X)}{a} \underset{a \to 0}{\longrightarrow} P'(X)$ et $\dfrac{P(X-a) - P(X)}{-a} \underset{a \to 0}{\longrightarrow} P'(X)$
   Donc $\boxed{\Delta_a(P)(X) \underset{a \to 0}{\longrightarrow} P'(X)}$

A - Étude globale

1. $\forall P \in \mathbb{R}[X], \Delta_a(P) \in \mathbb{R}[X]$ et $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
   $\Delta_a(P + \lambda Q)(X) = \dfrac{(P+\lambda Q)(X+a) - \lambda Q)(P(X-a)}{2a} =$
   $\dfrac{P(X+a) + \lambda Q(X+a) - P(X-a) - \lambda Q(X-a)}{2a} = \Delta_a(P)(X) + \lambda \Delta_a(Q)(X)$ donc
   $\boxed{\Delta_a \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*, \Delta_a(X^n) = \dfrac{1}{2a}((X+a)^n - (X-a)^n)$.
   D'après la formule du binôme de Newton, les termes de degré n se simplifient et le coefficient du terme de degré $n-1$ est :
   $\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} X^{n-1} = nX^{n-1}$. On en déduit que
   $\boxed{\text{le degré de } \Delta_a(X^n) \text{ est } n-1 \text{, son coefficient dominant est } n \text{ et pour } n = 0, \Delta_a(1) = 0.}$
3. Soit $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$.
   $\Delta_a(P) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n \Delta_a(X^n)$ par linéarité de Δ_a donc $\Delta_a(P) = 0 \Leftrightarrow a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ d'après la question précédente et P est un polynôme constant.
   $\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta_a) = \operatorname{Vect}(1).}$
   $\{\Delta_a(X^n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est alors une famille de polynômes à degrés échelonnés donc libre dans $\mathbb{R}[X]$ et c'est une base de $\operatorname{Im}(\Delta_a)$.

B - On note Δ_a^4 la restriction de Δ_a à $\mathbb{R}_4[X]$.

1. $\Delta_a^4(1) = 0$ $\Delta_a^4(X) = 1$ $\Delta_a^4(X^2) = 2X$ $\Delta_a^4(X^3) = 3X^2 + a^2$ $\Delta_a^4(X^4) = 4X^3 + 4a^2 X$ donc

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $\boxed{\mathrm{Ker}\Delta_a^4 = \mathrm{Ker}\,(\Delta_a) \cap \mathbb{R}_4[X] = \mathrm{Vect}(1) \neq \{0\}}$ et Δ_a^4 n'est pas injective donc n'est pas un automorphisme.

3. $\boxed{\mathrm{rg}\ \Delta_a^4 = 4}$ par le théorème du rang Im $\Delta_a^4 = \mathrm{Vect}\ \{1, X, 3X^2 + a^2, X^3 + a^2\}$. Or cette famille est libre car à degrés échelonnés, de cardinal $4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$ $\boxed{\mathrm{Im}\ \Delta_a^4 = \mathbb{R}_3[X]}$

C - Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}_4[X]$ des polynômes s'annulant en 0.

On note Δ_a^* la restriction de Δ_a à E.

1. Tout polynôme de E s'écrit $XQ(X)$ où Q est un polynôme de degré maximum 3, donc $E = \mathrm{Vect}\ \{X^4, X^3, X^2, X\}$,est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ admettant $\mathcal{B}_4^*$ comme famille génératrice. Comme $\mathcal{B}_4^*$ est une famille à degrés échelonnés, elle est libre et c'est une base de E.

2. $M_a^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4a^2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible car diagonale supérieure à coefficients diagonaux non nuls, donc $\Delta_a^* : E \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ est un isomorphisme.

   Autre correction Ker $\Delta_a^* = \mathrm{Ker}\,(\Delta_a) \cap E = \{0\}$ donc Δ_a^* est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension, $\dim E = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$, c'est donc un isomorphisme.

3. $M_a^{*-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{a^2}{2} \\ & 0 & \dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$

D - On pose $a = \dfrac{1}{2}$

1. $$\sum_{k=1}^{n} P\left(k + \frac{1}{2}\right) - P\left(k - \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left(k + 1 - \frac{1}{2}\right) - P\left(k - \frac{1}{2}\right) = P\left(n + \frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right)$$
   par télescopage.

2. Soit $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et P un antécédent de Q par $\Delta_{0.5}$, c'est-à-dire $\Delta_{0.5}(P) = Q$
   $$\sum_{k=1}^{n} Q(k) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{0.5}(P)(k) = \sum_{k=1}^{n} P\left(k + \frac{1}{2}\right) - P\left(k - \frac{1}{2}\right) = P\left(n + \frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right).$$

3. Pour calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, il faut trouver P tel que $\Delta_{0.5}(P) = X^2$.

   En utilisant la matrice M_a^{*-1}, on obtient $\Delta_{0.5}^{-1}(X^2) = \dfrac{1}{3}(X^3 - a^2X) = P(X)$

   $P(n + \dfrac{1}{2}) = \dfrac{(n + \frac{1}{2})[(n + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}]}{3} = \dfrac{(2n + 1)(n^2 + n)}{6}$ et $P(\dfrac{1}{2}) = 0$ donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Exercice 2 $\quad I =]0;+\infty[$ et $h(t) = \left(t+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$

1. (a) $\forall t > 0$, $1 + 1/t > 0$ et $t \neq 0$. Donc $h \in \mathscr{C}^2(I)$ comme produit de composées de fonctions de classes $\mathscr{C}^2$.

   (b) $\lim\limits_{t\to 0_+}\left(t+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t\to 0_+}\left(1+\dfrac{1}{t}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{t\to 0_+} h(t) = +\infty$ par composition et produit de limites.

   Cette limite n'étant pas finie, h n'est pas prolongeable par continuité en 0_+.

   (c) Pour tout $t > 0$,

   $$\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)' = \frac{\dfrac{-1}{t^2}}{1+\dfrac{1}{t}} = -\frac{1}{t^2+t}$$

   $$h'(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) + \left(t+\frac{1}{2}\right)\times\frac{-1}{t^2+t} = \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{2t+1}{2(t^2+t)} \text{ et}$$

   $$h''(t) = -\frac{1}{t^2+t} - \frac{1}{2}\frac{2(t^2+t)-(2t+1)^2}{(t^2+t)^2} = \frac{1}{2(t^2+t)^2}$$

   Donc $\boxed{\forall t\in I,\ h'(t) = \ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) - \dfrac{2t+1}{2t^2+2t} \text{ et } h''(t) = \dfrac{1}{2(t^2+t)^2}}$

   (d) $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et $h(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}\left(t+\dfrac{1}{2}\right) = 1 + \dfrac{1}{2t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

   $\dfrac{2t+1}{2t^2+2t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2t}{2t^2} = \dfrac{1}{t}$ donc $h'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par opérations sur les limites.

   Finalement on a $\boxed{h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ et } h'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

   (e) $\forall t \in I$, $2(t^2+t)^2 > 0$ donc $h''(t) = \dfrac{1}{2(t^2+t)^2} > 0$

   Donc h' est croissante sur I, et $h'(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit que $\boxed{\forall t\in I,\ h'(t) \leq 0}$

   (f) Donc h est décroissante sur I, et $h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. On en déduit que $\boxed{\forall t\in I,\ h(t) \geq 1}$

   (g) $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par composition,

   $$h(t) \underset{+\infty}{=} \left(t+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)\right]$$

   Donc $h(t) \underset{+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{12t^2} + o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\boxed{h(t) - 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12t^2}}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{v_n}{v_{n+1}} = \dfrac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} \times \dfrac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!\mathrm{e}^{n+1}} = \dfrac{(n+1)!\mathrm{e}^n(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)!\mathrm{e}^n \times \mathrm{e}}$

Donc $\dfrac{v_n}{v_{n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $\boxed{\ln\left(\dfrac{v_n}{v_{n+1}}\right) = h(n) - 1}$

(b) D'après le résultat de la question 1. (e), $\ln\left(\dfrac{v_n}{v_{n+1}}\right) = h(n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$

De plus $h(n) - 1 \geqslant 0\ \forall n \geqslant 1$ d'après la question 1. (f)

La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\boxed{(S_n) \text{ converge vers un réel } S}$, car tout est positif.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [\ln(v_k) - \ln(v_{k+1})] = \ln(v_1) - \ln(v_{n+1})$, comme somme télescopique. Comme $v_1 = \mathrm{e}$, $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ S_n = 1 - \ln(v_{n+1})}$

Pour tout entier $n \geq 2$, $\ln(v_n) = 1 - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - S$. Par continuité de la fonction exponentielle, la suite $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } C = \mathrm{e}^{1-S} > 0}$

(d) On en déduit que $v_n = \dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} C$.

Par produit, $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{Cn^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}}$

(e) On en déduit que $(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C^2n^{2n+1}}{\mathrm{e}^{2n}}$ et $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{2n}}$

Par quotient on obtient $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C\sqrt{n}}{\sqrt{2}\times 4^n}$

Par la formule (F), en multipliant par $\sqrt{2}\times 4^n/\sqrt{n}$, on obtient $\boxed{C = \sqrt{2\pi}}$

(f) En utilisant les deux résultats précédents, on a $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi}n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$

On en déduit la formule de Stirling : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n}$