Exercice 1 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

1. (a) Quel est l'ensemble de définition D de f ?

   $f(x)$ est défini dès lors que $x+1>0$ et $x \neq 0$, donc $D =]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

   (b) Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $D' = D \cup \{0\}$.

   $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} 1$ donc f peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0)=1$.

   (c) Justifier que f est dérivable sur D et calculer f' sur D.

   Sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$, f est dérivable car construite avec des fonctions usuelles dérivables, et $\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$,

   $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} = \dfrac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$.

2. (a) Donner le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 en 0.

   $f(x) \underset{0}{=} \dfrac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)$.

   (b) Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D'.

   f admet un D.L. à l'ordre 2 en 0, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

   (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.

   Nous lisons sur le D.L. en 0 que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(0,1)$ est $y = 1 - \frac{1}{2}x$.

   (d) Montrer en détaillant le raisonnement que $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

   $\forall x > 1$, $\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, donc $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$,

   donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1$, donc $\ln(1+x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$.

   (e) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$, ainsi que l'équation d'une asymptote à $\mathcal{C}_f$.

   Donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   Donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

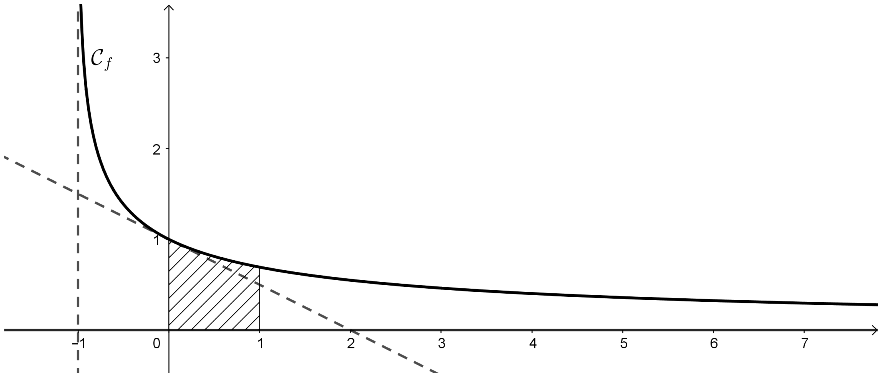
3. (a) Étudier les variations de f.

   On pose $g(x) = x-(x+1)\ln(x+1)$ pour tout $x > -1$. On a $g'(x) = -\ln(x+1)$. Donc g est croissante sur $]-1,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$, elle admet donc un maximum en 0, égal à $g(0)=0$, donc g est négative sur $]-1,+\infty[$, donc f' également, et f est décroissante sur $]-1,+\infty[$.

   (b) Tracer l'allure de la courbe de f, en faisant apparaître une tangente et deux asymptotes de celle-ci.

4. Quelle est la nature de la série $\sum f(n)$?

   Pour tout entier $n \geq 2$, $f(n) = \dfrac{\ln(1+n)}{n} \geq \dfrac{1}{n} > 0$, or la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, donc, par comparaison, la série $\sum f(n)$ diverge.



Dans la suite, on s'intéressera à l'intégrale suivante : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur. Pour tout entier naturel n non nul, on définit les fonctions polynomiales P_n et Q_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k^2} = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2}\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}$$

1. (a) Préciser pourquoi l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie.

   L'intégrale est bien définie car la fonction f est continue sur l'intervalle $[0,1]$.

   (b) En utilisant le graphique de la question 3b, donner un encadrement de L entre deux entiers consécutifs.

   L est égale à l'aire en unités d'aire de la surface hachurée comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Nous voyons sur le graphique que $0 \leq L \leq 1$.

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$.

   Il s'agit de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-t$.

   (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$, $P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$.

   On intègre entre 0 et x : $\displaystyle\int_0^x \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$

   donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^x (-1)^k t^k \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$

   donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \big[\ln(1+t)\big]_0^x - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$

   donc $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$

Dans toute la suite on notera : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$

(a) Établir la majoration : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$, et $\forall t \in [0,x]$, $\left|\dfrac{(-t)^n}{1+t}\right| \leq \dfrac{t^n}{1+t} \leq t^n$,

donc $|R_n(x)| \leq \displaystyle\int_0^x \left|\dfrac{(-t)^n}{1+t}\right| \mathrm{d}t \leq \int_0^x t^n \,\mathrm{d}t = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

(b) Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1]$, $Q'_n(x)$ et $\dfrac{P_n(x)}{x}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1]$, $Q'_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{x}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note g_n l'application définie par : $\forall x \in [0,1]$, $g_n(x) = Q'_n(x) - f(x)$.

Justifier que g_n est continue sur $[0,1]$ puis montrer que : $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = Q_n(1) - L$.

Q_n est un polynôme, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc Q'_n est continue sur $[0,1]$, or f est continue sur $[0,1]$, donc g_n est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.

$\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \big(Q'_n(x) - f(x)\big)\mathrm{d}x = Q_n(1) - L$.

(d) Montrer, en utilisant entre autres 1d et 1a, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$, $|g_n(x)| \leq \dfrac{x^n}{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$,

$g_n(x) = Q'_n(x) - f(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - R_n(x)}{x} - f(x) = -\dfrac{R_n(x)}{x}$

donc $|g_n(x)| = \left|\dfrac{R_n(x)}{x}\right| \leq \dfrac{x^n}{n+1}$.

(e) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|Q_n(1) - L| \leq \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(1)$.

Donc $|Q_n(1) - L| = \left|\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |g_n(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \dfrac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x$

donc $|Q_n(1) - L| \leq \dfrac{1}{(n+1)^2}$, or $\lim \dfrac{1}{(n+1)^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(1) = L$.

(f) Déterminer un entier naturel N tel que $Q_N(1)$ approche L à 10^{-4} près.

Pour $n = 99$, on a $|Q_{99}(1) - L| \leq \dfrac{1}{100^2}$, donc Q_{99} approche L à 10^{-4} près (la valeur exacte de L est $\dfrac{\pi^2}{12}$).

Exercice 2 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

1. **Quelques proriétés de F sur $\mathbb{R}_+^*$**

(a) $\forall x > 0$, $1 + x^2 > 0$. Donc la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas.

D'après le théorème fondamental du calcul intégral, F est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. Ainsi,

$\boxed{F \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ et } \forall x > 0,\ F'(x) = f(x)}$.

(b) f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc $F' = f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $\boxed{F \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)}$.

(c) Soit $x > 0$ fixé. On pose $u = \dfrac{1}{t}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $t = 1$ alors $u = 1$ et si $t = x$ alors $u = 1/x$.

De plus, $\mathrm{d}u = -\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ donc $-\dfrac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$.

Par changement de variable dans l'intégrale, on obtient :
$F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \times \frac{-1}{u^2}\mathrm{d}u = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln u}{u^2+1}\mathrm{d}u = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)}$.

(d) $F(1) = \displaystyle\int_1^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Soit $x > 1$ fixé. On a : $\forall t \in [1, x],\ f(t) = \dfrac{\ln t}{1+t^2} \geq 0$.

Donc, par positivité de l'intégrale, $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \geq 0$, $\forall x > 1$.

Si $0 < x < 1$ alors $\dfrac{1}{x} > 1$ et $F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 0$.

Par disjonction des cas, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ F(x) \geq 0}$.

2. **Étude de F aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$**

(a) φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall x > 0,\ \ \varphi(x) = \dfrac{\arctan x}{x} = \dfrac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \arctan'(0) = \dfrac{1}{1+0^2} = 1 = \varphi(0)$.

Donc φ est continue en 0. Finalement, $\boxed{\varphi \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}_+}$.

(b) Soit $x > 0$ fixé. On a : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

On pose $u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $v(t) = \ln t$, $u(t) = \arctan t$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t}$.

u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par intégration par parties, on obtient :

$F(x) = \Big[\arctan(t)\ \ln(t)\Big]_1^x - \displaystyle\int_1^x \frac{\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t = \arctan(x)\ \ln(x) - \int_1^x \varphi(t)\mathrm{d}t$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ F(x) = \arctan(x)\ln(x) - \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\mathrm{d}t}$.

(c) On a vu que $\dfrac{\arctan x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc $\arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Donc $\arctan x \ln x \underset{x\to 0}{\sim} x \ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, par croissance comparée.

φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc, par le théorème du calcul intégral, $\phi : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \phi(t)\mathrm{d}t$, est l'unique primitive de φ sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 1. Donc ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (car dérivable).

Donc $\phi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \phi(0)$, donc $\displaystyle\int_1^x \phi(t)\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \int_1^0 \phi(t)\mathrm{d}t$.

Finalement, $F(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 - \displaystyle\int_1^0 \phi(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \phi(t)\mathrm{d}t$.

Donc $\boxed{F \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$, et on pose $F(0) = \displaystyle\int_0^1 \phi(t)\mathrm{d}t$.

(d) F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x > 0,\ F'(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$, par opérations sur les limites.

D'après le théorème de la limite de la d'erivée :

$\boxed{F \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0 \text{ et } \Gamma \text{ admet une demi tangente verticale en } 0}$.

(e) On a vu que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$X = \dfrac{1}{x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0^+$ et $F(X) \underset{X\to 0^+}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 \phi(t)\mathrm{d}t$.

Donc $F\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 \phi(t)\mathrm{d}t$, par composition.

Donc $\boxed{F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 \phi(t)\mathrm{d}t = F(0)}$.

3. **Approximation des valeurs de F**

(a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. $I_k(x) = \displaystyle\int_1^x t^k \ln(t)\mathrm{d}t$.

On pose $u'(t) = t^k$ et $v(t) = \ln(t)$, $u(t) = \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t}$.

u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par intégration par parties, on obtient :

$$I_k(x) = \left[\frac{t^{k+1}\ln(t)}{k+1}\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^k}{k+1}\mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_1^x.$$

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ I_k(x) = \dfrac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \dfrac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2}}$.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n}\left(-x^2\right)^k \underset{-x^2\neq 1}{=} \frac{1-\left(-x^2\right)^{n+1}}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}}$.

(c) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. On a :

$$\begin{aligned}
F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x) &= \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_1^x t^{2k}\ln(t)\mathrm{d}t \\
&\underset{\text{linéarité}}{=} \int_1^x \ln(t)\left(\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\right)\mathrm{d}t \\
&\underset{3.(b)}{=} \int_1^x \ln(t)(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par linéarité,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x) = (-1)^{n+1}\int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ln(t)\mathrm{d}t}.$$

(d) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$ fixés. Comme $x < 1$, par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}
\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| &= \left|-(-1)^{n+1}\int_x^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ln(t)\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_x^1 \ln(t)\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_x^1 |\ln(t)|\frac{|t|^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t. \\
&\leq \int_x^1 (-\ln(t))\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

car $\ln(t) < 0$ sur $]0,1[$ et $2n+2$ est un entier naturel pair.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[,\ \left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leq \int_1^x \ln(t)\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = I_{2n+2}(x)}$.

(e) Soient $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $w_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

F est continue en 0 donc $F(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} F(0)$. Vu le résultat de la question question 3.(a),

$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \ I_k(x) = \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \frac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{(k+1)^2}$, par croissance comparée.

Donc, en passant à la limite dans l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |F(0) - w_n| \leq \dfrac{1}{(2n+3)^2}}$.

Exercice 3 Partie A : Étude des nombres harmoniques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le n-ième nombre harmonique par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,
$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$,
donc $\forall k \geq 2$, $\forall x \in [k-1, k]$, $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{x}$, donc $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$
de même $\forall x \in [k, k+1]$, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$, donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$
2. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$.
On somme l'inégalité précédente : $\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$,
donc $\int_2^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$
donc $\ln(n+1) - \ln 2 + 1 \leq H_n \leq \ln n + 1$, donc $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln n + 1$, car $-\ln 2 + 1 \geq 0$.
3. À l'aide de la relation précédente :
   (a) Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.
   Or $\lim \ln(n+1) = +\infty$, donc par comparaison $\lim H_n = +\infty$.
   (b) Démontrer que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   On a, pour tout $n \geq 2$, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$
   or $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}$, donc $\lim \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim \frac{H_n}{\ln n} = 1$, donc $H_n \sim \ln n$.
4. On considère désormais les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = H_n - \ln(n), \qquad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

   (a) Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.
   $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq 0$ d'après la question 1.

$v_{n+1} - v_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \geq 0$ de la même façon.
Enfin, $u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \to 0$
donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(b) En déduire que ces deux suites convergent vers une même limite positive.
Par conséquent ces deux suites convergent. On note γ leur limite commune.
D'après la question 2, $v_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc par passage à la limite, $\gamma \geq 0$.

5. (a) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1,
$0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
(u_n) est décroissante et tend vers γ, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \gamma$, donc $H_n - \ln n \geq \gamma$.
D'autre part, (v_n) est croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma$, donc $H_n - \ln(n+1) \leq \gamma$,
donc $H_n - \ln n - \gamma \leq \ln(n+1) - \ln n$.
Finalement, $0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

(b) Écrire en langage Python une fonction prenant comme argument un nombre réel ϵ strictement positif et renvoyant une valeur approchée de γ à ϵ près. On suppose que l'on dispose de la fonction `math.log()` pour le logarithme népérien.

```
def gamma(e)
    H=1
    n=1
    while math.log(1+1/n)>e:
        n+=1
        H=H+1/n
    return H-math.log(n)
```

Partie B : Le problème de Bâle

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ par

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$. Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Justifier la convergence de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$.
La série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente, avec $2 > 1$, donc la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
2. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
$\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k(k-1)}$ et $k - 1 < k$, donc $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{k^2}$.
3. Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 2.

On somme cette inégalité : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, donc $B_n-1\leq 1-\dfrac{1}{n}$ (somme télescopique), donc $B_n\leq 2$.

4. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t\in[0,\pi]$, on pose $D_n(t)=1+2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$.

   (a) Démontrer que, pour tout $n\geq 1$ et tout réel $t\in[0,\pi]$, $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt}=D_n(t)$.

   $D_n(t)=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-ikt}+e^{ikt}\right)=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$.

   (b) En déduire que, si $t\in]0,\pi]$, $D_n(t)=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

   $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt}=e^{-int}\frac{1-\left(e^{it}\right)^{2n+1}}{1-e^{it}}$ (progression géométrique)

   donc $D_n(t)=\dfrac{e^{-i\frac{t}{2}}}{e^{-i\frac{t}{2}}}\times\dfrac{e^{-int}-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}=\dfrac{e^{-i(n+\frac{1}{2})t}-e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}}=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

   (c) Calculer la valeur de $D_n(0)$.

   $D_n(0)=2n+1$.

5. On considère la fonction f définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par

$$f:t\longmapsto\begin{cases}\dfrac{t}{\sin t}\text{ si }t>0\\ 1\text{ si }t=0\end{cases}$$

   (a) Démontrer que f est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   f est continue sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de deux fonctions continues.

   En 0 : $\dfrac{t}{\sin t}\sim 1$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0+}f(t)=1=f(0)$, donc f est continue en 0.

   Finalement, f est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   (b) Démontrer que f est dérivable en 0.

   f est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de deux fonctions dérivables.

   Pour tout $t>0$, $f'(t)=\dfrac{\sin t-t\cos t}{\sin^2 t}$,

   or $\sin t-t\cos t\underset{0}{=}t+\dfrac{t^3}{6}-t\left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)+o(t^3)=\dfrac{2}{3}t^3+o(t^3)$,

   donc $\dfrac{\sin t-t\cos t}{\sin^2 t}\underset{0}{\sim}\dfrac{2}{3}t$, donc $\displaystyle\lim_{t\to 0+}f'(t)=0$, donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0, et $f'(0)=0$.

   (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

   f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

   Nous venons de voir que f est dérivable en 0 et que f' est continue en 0, donc finalement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

6. (a) Démontrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que pour tout entier naturel k non nul, $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t = \left[\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{1}{k}\sin(kt)\mathrm{d}t$$

et $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{1}{k}\sin(kt)\mathrm{d}t = \left[\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\left(-\frac{1}{k^2}\right)\cos(kt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k^2}\right)\cos(kt)\mathrm{d}t$

$$= -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{\pi k^2}\left[\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi = -\frac{1}{k^2}$$

donc $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle B_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{D_n(t)-1}{2}\mathrm{d}t$

Donc $\displaystyle B_n = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^n \cos(kt)\mathrm{d}t =$
$\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{D_n(t)-1}{2}\mathrm{d}t$

(c) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t$.

$$\int_0^\pi \left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6\pi}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}$$

(d) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)D_n(t)\mathrm{d}t$.

D'après b),

$$B_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)D_n(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)D_n(t)\mathrm{d}t + \frac{\pi^2}{6}.$$

(e) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\left(2-\frac{2t}{\pi}\right)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$.

En faisant le changement de variable $u = \frac{1}{2}t$, on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$ et

$$\int_0^\pi \left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)D_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2u-\frac{4u^2}{2\pi}\right)D_n(2u)2\mathrm{d}u =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2-\frac{2u}{\pi}\right)2u\frac{\sin\big((2n+1)u\big)}{\sin u}\mathrm{d}u$$

donc $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t}\left(2-\frac{2t}{\pi}\right)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$.

7. Déterminer g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ telle que $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$.

On prend bien sûr $\displaystyle g(t) = \frac{t}{\sin t}\left(2-\frac{2t}{\pi}\right)$: g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction f de la question 10, et une fonction affine.

8. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t = 0$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t =$$
$$\left[-g(t)\frac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)t\big)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\frac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2n+1}g(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\frac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t$$

or la fonction g' étant continue sur l'intervalle fermé borné $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, elle atteint ses bornes, donc $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|g'(t)| \leq M$, donc $\left|g'(t)\cos\big((2n+1)t\big)\right| \leq M$, et donc $\left|\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\frac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{M}{2n+1} \times \frac{\pi}{2}$.

Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin\big((2n+1)t\big)\mathrm{d}t = 0$.

9. En déduire la limite de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$.

   On en déduit que $\lim B_n = \dfrac{\pi^2}{6}$

Exercice 4 Soient n et c deux entiers naturels fixés, avec $c \geq 1$ et $n \geq 3$. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire une boule, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne, avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, réalisant ainsi une succession de n tirages. Pour tout i entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si on tire une boule blanche au i-ème tirage, et 0 sinon. On pose alors, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $Z_p = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i$.

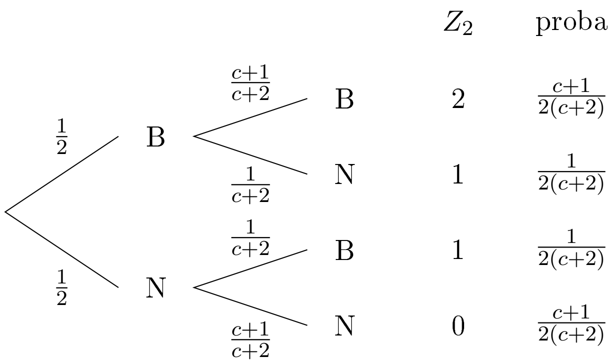
1. Que représente Z_p, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$?

   Z_p est le nombre de boules blanches tirées après les p premiers tirages.

2. Donner la loi de X_1 et son espérance.

   $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, et $E(X_1) = \frac{1}{2}$.

3. Déterminer la loi de Z_2.



   Donc la loi de Z_2 est :

z_i	0	1	2
$P(Z_2 = z_i)$	$\dfrac{c+1}{2(c+2)}$	$\dfrac{2}{2(c+2)}$	$\dfrac{c+1}{2(c+2)}$

4. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$.

   (a) Quel est l'ensemble $Z_p(\Omega)$ des valeurs prises par Z_p ?

   $Z_p(\Omega) = [\![0, p]\!]$.

   (b) Déterminer, pour tout $k \in Z_p(\Omega)$, la valeur de $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1)$.

   Après p tirages, dont k tirages exactement d'une boule blanche, il y a $2 + pc$ boules dans l'urne, dont $1 + kc$ boules blanches, donc $\forall k \in Z_p(\Omega)$,

   $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1+kc}{2+pc}$.

(c) En déduire que : $P(X_{p+1}=1)=\dfrac{1+cE(Z_p)}{2+pc}$.

Les événements $(Z_p=k)_{0\leq k\leq p}$ forment un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(X_{p+1}=1)=\sum_{k=0}^{p}P\big((Z_p=k)\cap(X_{p+1}=1)\big)=\sum_{k=0}^{p}P(Z_p=k)\times P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1)$$

$$=\sum_{k=0}^{p}P(Z_p=k)\times\frac{1+kc}{2+pc}=\frac{1}{2+pc}\sum_{k=0}^{p}P(Z_p=k)+\frac{c}{2+pc}\sum_{k=0}^{p}k\times P(Z_p=k)$$

donc $P(X_{p+1}=1)=\dfrac{1}{2+pc}+\dfrac{c}{2+pc}E(Z_p)$.

5. Montrer par récurrence forte que pour tout $p\in[\![1,n]\!]$, X_p a même loi que X_1.

   Montrons par récurrence que, $\forall p\in[\![1,n]\!]$, $\mathcal{P}_p$: $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $X_i\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

   Initialisation : Au rang $p=1$, nous avons vu à la question 2 que $X_1\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

   Hérédité : Pour tout $p\in[\![1,n-1]\!]$,
   on suppose que $\mathcal{P}_p$ est vraie, c'est-à-dire que $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $X_i\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

   Alors $E(Z_p)=E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p}X_i\right)=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}E(X_i)=p\times\frac{1}{2}$, donc $P(X_{p+1}=1)=\dfrac{1+c\frac{p}{2}}{2+pc}=\dfrac{1}{2}$,
   et par conséquent, $X_{p+1}\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, donc $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\forall p\in[\![1,n]\!]$, $\mathcal{P}_p$ est vraie, c'est-à-dire que $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $X_i\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 5 Dans tout cet exercice, on désigne par n un entier naturel non nul.
On dispose d'une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.

— Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
— Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.
— On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire que l'on ne cherchera pas à expliciter. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note $E(X_n)$ et $V(X_n)$ l'espérance et la variance de X_n.

Cas particuliers

1. Pour $n=1$, il n'y a qu'une boule dans l'urne, tirée nécessairement dès de premier tirage, donc $X_1(\Omega)=\{1\}$. Pour $n=2$, il y a deux boules dans l'urne, ou bien on tire la boule n°1 en première, ou bien on tire d'abord la boule n°2 puis la boule n°1, donc $X_2(\Omega)=\{1,2\}$.
2. X_1 est une variable aléatoire constante égale à 1.

3. (a) $(X_2 = 1)$ est l'évènement « on tire d'abord la boule n°1 parmi 2 boules ».
$P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$
(b) Déterminer la loi de X_2.

x	1	2
$P(X_2 = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(c) $E(X_2) = \dfrac{3}{2}$ et $V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{1}{4}$.

Cas général

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 **quelconque**. On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. $I_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et I_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
2. Justifier que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
Il y a n boules dans l'urne : on peut tirer la boule n°1 au premier tirage, auquel cas $X_n = 1$, comme on peut la tirer à chacun des tirages suivants, jusqu'au n-ième inclus, dans le cas où l'on tire les boules dans l'ordre décroissant, la n-ième, puis la $(n-1)$-ième, etc., jusqu'à la n°1 en dernier.
3. $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$ et $P(X_n = n) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n-1} \times \cdots \times \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{n!}$
4. Justifier que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![2, n]\!]$, $P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j - 1)$
Pour $j = 1$, les deux membres de l'égalité sont nuls, donc égaux.
Pour $2 \leq j \leq k$, $(I_n = k)$ signifie que l'on a tiré la boule n°k en premier. Il reste donc les boules n°1 à n°$(k-1)$ dans l'urne, c'est-à-dire $(k-1)$ boules. La probabilité d'obtenir la boule n°1 au j-ième tirage, étant donné qu'un tirage a déjà eu lieu, est alors $P(X_{k-1} = j - 1)$.
Donc $P(X_n = j | I_n = k) = P(X_{k-1} = j - 1)$.
Pour $j > k$, les deux membres de l'égalité sont nuls, donc l'égalité reste valable.
5. En appliquant la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $j \geq 2$, on a
$P(X_n = j) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1)$.
Les évènements $\{(I_n = k)\}_{1 \leq k \leq n}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales,
$$P(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} P\big((X_n = j) \cap (I_n = k)\big) = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j | I_n = k) P(I_n = k)$$
$$= P(X_n = j | I_n = 1) P(I_n = 1) + \sum_{k=2}^{n} P(X_n = j | I_n = k) \times \frac{1}{n}$$
$$= 0 + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} P(X_{k-1} = j - 1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j - 1).$$
6. Démontrer que, pour tout $j \geq 2$, on a
$P(X_n = j) = \dfrac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \dfrac{1}{n} P(X_{n-1} = j - 1)$

D'après la question précédente, on a $nP(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1)$ et de la même façon, $(n-1)P(X_{n-1} = j) = \sum_{k=1}^{n-2} P(X_k = j-1)$,
donc $nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j) = \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1) - \sum_{k=1}^{n-2} P(X_k = j-1) = P(X_{n-1} = j-1)$.
Donc, en divisant par n, $P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1)$.

7. (a) Démontrer que $E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$.
$E(X_n) = \sum_{j=1}^{n} jP(X_n = j) = \frac{1}{n} + \sum_{j=2}^{n} j\left(\frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1)\right)$
$= \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n} jP(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} jP(X_{n-1} = j-1) =$
$\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} E(X_{n-1})$
$= \frac{1}{n} + E(X_{n-1})$.

(b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a : $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Montrons par récurrence que la propriétés $\mathcal{P}_n$: $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est vraie pour tout $n \geq 1$:
Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $E(X_1) = 1$.
Hérédité :
soit n un entier quelconque supérieur ou égal à 1. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
D'après 7.a), $E(X_{n+1}) = E(X_n) + \frac{1}{n+1}$ et par hypothèse de récurrence, $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,
donc $E(X_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n supérieur ou égal à un.

Exercice 6 Considérons dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_4[X]$ les polynômes $P_1 = 1 + X^2, P_2 = X\left(1 + X^2\right)$ et $P_3 = \left(1 + X^2\right)^2$ ainsi que les ensembles $F = Vect\{P_1, P_2, P_3\}, G = \left\{P \in E, \left(X^2 + 1\right) \text{ divise } P\right\}$ et $H = \{P \in E, P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$.

1. F est un espace vectoriel engendré par des vecteurs de E donc c'est un sous espace vectoriel de E. Les vecteurs P_1, P_2, P_3 étant à degré échelonnés, ils forment une famille libre de E, donc une base de F et $\boxed{\text{dim F} = 3}$
2. « $\left(X^2 + 1\right)$ divise P $\in$ E˘ $\Leftrightarrow$ il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que

$P=(X^2+1)Q=(X^2+1)(aX^2+bX+c)$.

Si la famille de polynômes $\{Q_1,Q_2,Q_3\}$ est libre alors

$a\left(X^2+1\right)Q_1+b\left(X^2+1\right)Q_2+c\left(X^2+1\right)Q_3=0 \Leftrightarrow (X^2+1)(aQ_1+bQ_2+cQ_3=0 \Leftrightarrow$ $a=b=c=0$.

donc la famille $\left\{\left(X^2+1\right)Q_1,\left(X^2+1\right)Q_2,\left(X^2+1\right)Q_3\right\}$ est libre.

3. D'après la question précédente, en prenant $Q_1=1, Q_2=X$ et $Q_3=X^2$, $\mathrm{G}=\mathrm{Vect}$ $\left\{\left(X^2+1\right)Q_1,\left(X^2+1\right)Q_2,\left(X^2+1\right)Q_3\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E, et $\left\{\left(X^2+1\right)Q_1=P_1,\left(X^2+1\right)Q_2=P_2,\left(X^2+1\right)Q_3=P_3\right\}$ est une base de G.

4. On en déduit donc que F = G.

5. Si $n\in\mathbb{N}$, et $P\in\mathbb{R}_n[X]$ alors

   $\forall a\in\mathbb{R},\quad P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$

6. D'après la formule de Taylor, en prenant $a=1$:

   $P\in H\Leftrightarrow P(X)=\dfrac{P^{(3)}(1)}{3!}(X-1)^3+\dfrac{P^{(4)}(1)}{4!}(X-1)^4$ donc $\mathrm{H}=\mathrm{Vect}$ $\{(X-1)^3,(X-1)^4\}$ est également un sous-espace vectoriel de E.

   La famille $\{(X-1)^3,(X-1)^4\}$ est libre car à degrés échelonnés, c'est donc une base de H et $\boxed{\dim \mathrm{H}=2.}$

7. Si $\left(X^2+1\right)$ divise $(X-1)^3A, A\in\mathrm{E}$ alors il existe $Q\in\mathbb{R}_5[X]$ tel que $(X-1)^3A=(X^2+1)Q$. Or X^2+1 ne s'annule pas un 1, donc $(X-1)^3$ divise Q, et en simplifiant par $(X-1)^3$ on obtient $\left(X^2+1\right)$ divise A .

8. $P\in G\cap H\Leftrightarrow P=(X-1)^3A=(X^2+1)Q$ où $Q\in\mathbb{R}_2[X]$. D'après la question précédente, $(X-1)^3$ divise Q qui est de degré strictement inférieur à 3, donc $Q=0$ puis $P=0$ et $\boxed{G\cap H=\{0\}.}$

9. $G\cap H=\{0\}$ et dim G + dim H = 5 = dim E donc

   $\boxed{\text{G et H sont supplémentaires dans E.}}$

Exercice 7 On pose, pour tout entier naturel $N\quad S_N(P)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}P(2k+1)$.

Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P)=Q$ où $Q(X)=P(X+1)-P(X-1)$.

1. Montrer que f est linéaire : à faire.

2. D'après la formule du binôme de Newton,

   $f(X^i)=X^i+iX^{i-1}-(X^i-iX^{i-1})+Q=2iX^{i-1}+Q$ où $\deg Q\leqslant i-2$, pour tout $1\leqslant i\leqslant n$

   donc $\boxed{\text{le degré de } f\left(X^i\right) \text{ pour } 1\leq i\leq n \text{ est } i-1}$.

   Comme $f(1)=0, \mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\ \{f\left(X^i\right), 1\leq i\leq n\}$. Cette famille génératrice de Im f est libre car à degrés échelonnés donc c'est une base de Im f qui est alors de dimension

n et un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de même dimension. Finalement,
$\boxed{\text{Im } f = bR_{n-1}[X]}$
D'après le théorème du rang, dim Ker f = dim $bR_n[X] - rgf = 1$ et
$\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect }(1) = bR_0[X]}$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f(P) = Q$.
$S_N(Q) = \sum_{k=0}^{N} Q(2k+1) = \sum_{k=0}^{N} (P(2k+2) - P(2k)) = P(2N+2) - P(0)$ par télescopage.

4. $N_0 = 1 \quad N_1 = \dfrac{X}{2} \quad N_2 = \dfrac{(X-1)(X+1)}{4} \quad N_3 = \dfrac{(X-1)X(X+1)}{6}$.
a) $B = (N_0, N_1, N_2, N_3)$ est une famille libre car à degrés échelonnés de $4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

$f(N_0) = 0, \quad f(N_1) = 1 \quad f(N_2) = \dfrac{X(X+2) - (X-2)X}{4} = X$
$f(N_3) = \dfrac{X(X+1)(X+2) - (X-2)(X-1)X}{6} = X^2$
b) $f(P) = aX^2 + bX + c = af(N_1) + bf(N_2) + cf(N_3) = f(aN_1 + bN_2 + cN_3)$ par linéarité de f.
Donc $f(P) = aX^2 + bX + c \Leftrightarrow f(P - aN_1 - bN_2 - cN_3) = 0 \Leftrightarrow P - aN_1 - bN_2 - cN_3 \in$ Ker $f \Leftrightarrow$ il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $P - aN_1 - bN_2 - cN_3 = d \Leftrightarrow \boxed{P = aN_1 + bN_2 + cN_3 + d, d \in \mathbb{R}}$
c) $S_0(X(X-1)) = 0$ $S_0(X(X+2)) = 3$
Or $X(X-1) = f(N_3 - N_2)$ donc
$S_N(X(X-1)) = (N_3 - N_2)(2N+2) - (N_3 - N_2)(0) = \cdots = \dfrac{(2N+1)(2N+3)(4N+1) - 3}{12}$
De même, $X(X+2) = f(N_3 + 2N_2)$ donc
$S_N(X(X+2)) = (N_3 + 2N_2)(2N+2) - (N_3 + 2N_2)(0) = \cdots = \dfrac{(2N+1)(2N+3)(2N+5) + 3}{6}$