Correction Concours blanc n° 2
Partie 2

Exercice 1 Soit a est un réel non nul. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et

$$\forall\, i, j \in [\![1, n]\!], P((X = i) \cap (Y = j)) = aij$$

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(X = i \cap Y = j) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} aij = 1 \Leftrightarrow a\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = 1 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{4}{n^2(n+1)^2}}$
2. D'après la formule des probabilités totales, $\{(Y = j), j \in [\![1, n]\!]\}$ étant un système complet d'événements
   $\displaystyle P(X = i) = \sum_{j=1}^{n} P(X = i \cap Y = j) = ai\sum_{j=1}^{n} j = \frac{ain(n+1)}{2}$
   $\boxed{P(X = i) = \frac{2i}{n(n+1)} \text{ pour tout } i \in [\![1, n]\!]}$
   $\displaystyle E(X) = \sum_{i=1}^{n} iP(X = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \boxed{\frac{2n+1}{3}}$
3. La loi de la variable aléatoire Y est obtenue avec le même calcul que celle de X donc X et Y suivent la même loi de probabilité.
4. $\displaystyle P(X = i)P(Y = j) = \frac{2i}{n(n+1)}\frac{2j}{n(n+1)} = aij = P((X = i) \cap (Y = j))$ donc
   $\boxed{\text{les variables } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$
5. $\displaystyle P(X = Y) = \sum_{i=1}^{n} P((X = i) \cap (Y = i)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   $\boxed{P(X = Y) = \frac{4n+2}{3n(n+1)}}$
6. On pose $U = \text{Max}\,(X, Y)$.

   (a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, dire que $\text{Max}\,(X, Y) \leqslant i$ est équivalent à dire que X et Y prennent toutes les deux des valeurs inférieures à i. $\boxed{(U \leqslant i) = (X \leqslant i) \cap (Y \leqslant i)}$

   (b) $P(U \leqslant i) = P(X \leqslant i \cap Y \leqslant i) = P(X \leqslant i)P(Y \leqslant i)$ car X et Y sont indépendantes.
   Or $\displaystyle P(X \leqslant i) = \sum_{k=1}^{i} P(X = k) = \sum_{k=1}^{i} \frac{2k}{n(n+1)} = \frac{i(i+1)}{n(n+1)}$
   En utilisant la question 3., $\boxed{P(U \leqslant i) = \frac{i^2(i+1)^2}{n^2(n+1)^2} \text{ pour tout } i \in [\![1, n]\!].}$

   (c) $\displaystyle P(U = i) = P(U \leqslant i) - P(U \leqslant i-1) = \frac{i^2(i+1)^2 - (i-1)^2 i^2}{n^2(n+1)^2} =$
   $\displaystyle\frac{i^2[(i+1)^2 - (i-1)^2]}{n^2(n+1)^2} = \boxed{\frac{4i^3}{n^2(n+1)^2} \text{ pour tout } i \in [\![1, n]\!].}$

Exercice 2 Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $f(P) = P(X) - P(X-1), \forall P \in \mathbb{R}[X]$

1. (a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

   (b) • Si P est un polynôme constant alors $P(X) = P(X-1)$ et $P \in \text{Ker } f$ donc $\mathbb{R}_0[X] \subset \text{Ker } f$

   • Si P est un polynôme non constant de Ker f alors il admet au moins une racine α dans $\mathbb{C}$ et on obtient $P(\alpha) = 0 = P(\alpha - 1)$. On montre alors par récurrence que $\alpha - k$ est racine de P pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui implique que P admet une infinité de racines dans $\mathbb{C}$, donc que P est le polynôme nul.

   Finalement $\boxed{\text{Ker } f = \mathbb{R}_0[X].}$

   Remarque Dans le cas où P n'est pas constant, on peut l'écrire sous forme développée et ainsi montrer que $P(X) - P(X-1) = 0$ équivaut à $P = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on pose $f_n(P) = f(P) = P(X) - P(X-1)$.

   (a) f_n est linéaire par linéarité de f et si $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ alors, $P(X)$ et $P(X-1)$ ayant le même coefficient dominant, $P(X) - P(X-1) \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc $\boxed{f_n \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{n+1}[X], \mathbb{R}_n[X]).}$

   (b) $\text{Ker}(f_n) = \text{Ker } f \cap \mathbb{R}_{n+1}[X] = \mathbb{R}_0[X]$ d'après la question 1. (b).

   (c) D'après le théorème du rang, rg f_n = dim $\mathbb{R}_{n+1}[X]-$ dim Ker f_n

   rg $f_n = n + 2 - 1 = n + 1 =$ dim $\mathbb{R}_n[X]$ donc Im $f_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\boxed{f_n \text{ est surjective.}}$

3. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Si on note n le degré de Q, en utilisant la surjectivité de f_n, il existe $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $f_n(P) = Q$. Mais $f_n(P) = f(P)$ et P est bien un antécédent de Q par f donc $\boxed{f \text{ est surjective.}}$

Remarque f est alors un endomorphisme surjectif non injectif de $\mathbb{R}[X]$ qui est de dimension infinie, ce qui n'existe pas en dimension finie.

Exercice 3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique, base qui sera notée $\mathcal{B}$.

Partie A

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et$A^3 = 2A$.

2. $f(x, y, z) = (y, x + z, y)$. On en déduit que $u(x, y, z) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow y = z + x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ et $z = -x$.

   Ker(f) = Vect((1, 0, −1)) et $\boxed{\text{le vecteur } (1, 0, -1) \text{ constitue une base de ce noyau}}$ puisqu'il est non nul.

$$u(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f-\sqrt{2}id) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & x\sqrt{2} \\ x+z & = & y\sqrt{2} \\ y & = & z\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = z = \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

Ker $(f-\sqrt{2}\text{ id})= =$ Vect $((1,\sqrt{2},1))$ et

$\boxed{\text{le vecteur } (1,\sqrt{2},1) \text{ constitue une base de ce noyau.}}$

3. Soient $u=(1,0,-1), v=(1,\sqrt{2},1)$ et $w=(1,-\sqrt{2},1)$. D'après le théorème de Gauss Jordan, on montre que la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est inversible, ce qui suffit pour cette question, mais autant caluler P^{-1} en même temps puisqu'on en aura besoin à la question 6.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3/4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P est donc inversible, et $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

donc $\boxed{\mathcal{B}' = (u,v,w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

4. $f(u)=0, f(v)=\sqrt{2}v$ d'après la question 2. et $f(w)=(-\sqrt{2},2,-\sqrt{2})=-\sqrt{2}w$ donc $\boxed{A' = \mathrm{diag}(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})}$

5. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. On vérifie le résultat de la question 4. en calculant $PA'P^{-1}$ et on retrouve la matrice A.

Partie B

On considère l'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

1. $M \in F \Leftrightarrow M = aI_3 + bA + cA^2$ donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ et la famille (I_3, A, A^2) en constitue une famille génératrice.

   Montrons que cette famille est libre :

   $aI_3 + bA + cA^2 = 0 \Leftrightarrow a + c = b = c = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$ donc

   $\boxed{(I_3, A, A^2) \text{ est bien une base de } F.}$

2. $\forall M \in F$, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $M = aI_3 + bA + cA^2$ donc

   $AM = aA + bA^2 + cA^3 = (a + 2c)A + bA^2$ d'après A.1. d'où $\boxed{AM \in F.}$

3. Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$

   (a) D'après la question précédente, $\forall M \in F, g(M) \in F$ et

   $\forall M, N \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, g(M + \lambda N) = A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = g(M) + \lambda g(N)$ donc

   $\boxed{g \in \mathscr{L}(F).}$

   (b) $g(I_3) = A, g(A) = A^2, g(A^2) = A^3 = 2A$ donc

   $\boxed{\text{la matrice de } g \text{ dans la base } (I_3, A, A^2) \text{ est } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

   (c) $g \circ g \circ g(M) = A^3M = 2AM = 2g(M)$(ou $B^3 = 2B$).

   (d) $\forall M = aI_3 + bA + cA^2 \in F, M \in \text{Ker } g \Leftrightarrow (a + 2c)A + bA^2 = 0$

   $\Leftrightarrow a + 2c = b = 0 \Leftrightarrow a = -2c$ et $b = 0$

   $\boxed{\text{Une base de Ker}(g) \text{ est donc constitué par le vecteur non nul } A^2 - 2I_3.}$

   (e) D'après le théorème du rang, rg $g = \dim F - \dim \text{Ker } g = 3 - 1 = 2$.

   (f) $g(M) = A + A^2 = g(I_3) + g(A), M \in F \Leftrightarrow M - I_3 - A \in \text{Ker } g \Leftrightarrow$ il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $M - I_3 - A = a(A^2 - 2I_3) \Leftrightarrow \boxed{M = (1 - 2a)I_3 + A + aA^2, a \in \mathbb{R}}$

   Remarque $g(M) = A + A^2 \Leftrightarrow AM = A(I_3 + A)$ mais A n'est pas inversible ! ! Cette égalité ne se simplifie pas.