Concours blanc n° 2
Partie 2

Cette partie 2 doit être traitée séparément de la partie 1. Outre votre nom et votre classe, vous indiquerez Partie 1 et Partie 2 sur ces copies et emboîterez les feuillets correspondants dans le bon ordre de lecture. Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 **6,5 points** : **1.** 1 **2.** 1 **3.** 0.5 **4.** 0.5 **5.** 1 **6.(a)** 0.5 **6.(b)** 1 **6.(c)** 1

Soit a est un réel non nul. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et

$$\forall\, i, j \in [\![1, n]\!], P((X = i) \cap (Y = j)) = aij$$

1. Démontrer que $a = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2}$
2. Donner la loi et l'espérance de la variable aléatoire X.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $P(X = Y)$.
6. On pose $U = \text{Max}\,(X, Y)$.
   (a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, écrire l'événement $(U \leqslant i)$ à l'aide des variables X et Y.
   (b) Calculer $P(U \leqslant i)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
   (c) En déduire la loi de la variable aléatoire U.

Exercice 2 **4,5 points** : **1.(a)** 1 **1.(b)** 1 **2.(a)** 0.5 **2.(b)** 0.5 **2.(c)** 0.5 **3.** 1

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $f(P) = P(X) - P(X-1), \forall P \in \mathbb{R}[X]$

1. (a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Montrer que $\text{Ker } f = \mathbb{R}_0[X]$.

   Indication : on pourra utiliser le fait qu'un polynôme à coefficients réels, non constant, admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on pose $f_n(P) = f(P) = P(X) - P(X-1)$.
   (a) Justifier que $f_n \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_{n+1}[X], \mathbb{R}_n[X])$.
   (b) Que vaut $\text{Ker}(f_n)$?
   (c) En déduire que f_n est surjective.
3. Montrer, en utilisant ce qui précède, que f est surjective.

Exercice 3 **9 points** : **A.1.** 0.5 **A.2.** 1 **A.3.** 1 **A.4.** 1 **A.5.** 0.5 **A.6.** 0.5
B.1. 1 **B.2.** 0.5 **B.3.(a)** 0.5 **B.3.(b)** 0.5 **B.3.(c)** 0.5 **B.3.(d)** 0.5 **B.3.(e)** 0.5
B.3.(f) 0.5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique, base qui sera notée $\mathcal{B}$.

Partie A

1. Calculer A^2 et montrer que $A^3 = 2A$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Ker}(f - \sqrt{2}\ \text{id})$.
3. Soient $u = (1, 0, -1), v = (1, \sqrt{2}, 1)$ et $w = (1, -\sqrt{2}, 1)$.
   Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice A' de l'application f dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Écrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
6. Vérifier le résultat de la question 4. à l'aide d'un produit de matrices.

Partie B

On considère l'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et que la famille (I_3, A, A^2) en constitue une base.
2. Montrer que, $\forall M \in F, AM \in F$.
3. Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$
   (a) Montrer que $g \in \mathscr{L}(F)$.
   (b) Écrire la matrice de g dans la base (I_3, A, A^2).
   (c) Montrer que $g \circ g \circ g = 2g$.
   (d) Déterminer une base de $\text{Ker}(g)$.
   (e) Déterminer le rang de g.
   (f) Résoudre dans F l'équation $g(M) = A + A^2$.