

(Ex1) A - 1) $B_2'(x) = 2 B_1(x) = 2x - 1$ d'où $B_2(x) = x^2 - x + c$ et comme

$$\int_0^1 B_2(t) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + ct \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c = 0 \text{ cela donne } c = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

et $\boxed{B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}}$

$B_3'(x) = 3 B_2(x) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2}$ d'où $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + d$

avec $\int_0^1 B_3(t) dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + dt \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + d = 0$

on a $d = 0$ et $\boxed{B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x}$

2) Puisque $B_0(x) = 1$, $C_0(x) = 1(x)$. Comme dérivée d'une composée, $C_{n+1}'(x) = \left(B_{n+1}\left(x + \frac{1}{2}\right) \right)' = B_{n+1}'\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)'$

$= B_{n+1}'\left(x + \frac{1}{2}\right) = (n+1) B_n\left(x + \frac{1}{2}\right) = (n+1) C_n(x)$ soit

$\underline{C_{n+1}'(x) = (n+1) C_n(x) \text{ (ii)}}$; Finalement, en posant $u = t + \frac{1}{2}$,

on a $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} C_n(t) dt = \int_0^1 C_n\left(u - \frac{1}{2}\right) du = \int_0^1 B_n(u) du = 0$

$\forall n > 0$ d'après (iii) - i.e. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} C_n(t) dt = 0$ pour $n > 0$ (ii).

3) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété: " C_n est unitaire, de degré n et de même parité que n ".

Comme $C_0(x) = 1$, $\mathcal{P}_0$ est vraie

Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Puisque $C_{n+1}'(x) = (n+1) C_n(x)$ avec $C_n(x) = x^n + \text{termes de degrés } \leq n-1$ il vient que $C_{n+1}(x) = x^{n+1} + \text{termes de degrés } \leq n$ donc que C_{n+1} est un polynôme unitaire de degré $n+1$. Notons d'autre part que si P est paire (resp. impaire) alors $\int_{-x}^x P(t) dt$ est impaire (resp. paire).

Mais $C_{n+1}(x) = C_{n+1}(0) + \int_0^x (n+1) C_n(t) dt$ donc si C_n est impair (i.e. n est impair) alors $\int_0^x (n+1) C_n(t) dt$ est pair et donc C_{n+1} est également pair. Si C_n est pair (i.e. n est pair) alors $\int_0^x (n+1) C_n(t) dt$ est impair. Mais alors

$$\int_{-1/2}^{1/2} C_{n+1}(t) dt = \int_{-1/2}^{1/2} C_{n+1}(0) dt + \int_{-1/2}^{1/2} \left(\int_0^t (n+1) C_n(u) du \right) dt$$

cette dernière intégrale étant nulle puisque son intégrande est impair et que le segment d'intégration est centré en 0. Il vient d'après (iii) que

$$C_{n+1}(0) = 0 \text{ si } n \text{ est pair et donc que } C_{n+1}(x) = \int_0^x (n+1) C_n(t) dt \text{ est impair.}$$

On a donc $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est bien vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

4) D'après 2) iii) et ii) $\int_{-1/2}^{1/2} C_n(t) dt = \frac{1}{n+1} \int_{-1/2}^{1/2} C_{n+1}'(t) dt$

$$= \frac{1}{n+1} \left(C_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) - C_{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) \right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi $C_n\left(-\frac{1}{2}\right) = C_n\left(\frac{1}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$

D'après 3), C_{2n} est pair donc $\int_{-1/2}^{1/2} C_{2n}(t) dt$

$$= 2 \int_0^{1/2} C_{2n}(t) dt = 0 \text{ dès que } n \geq 1.$$

D'où $\frac{1}{2n+1} \int_{-1/2}^{1/2} C_{2n+1}'(t) dt = 0 \Rightarrow C_{2n+1}(0) = C_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

Mais $C_{2n+1}(0) = 0$ puisque C_{2n+1} est impair

Ainsi $C_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = C_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \forall n \geq 1$

5) $\underline{b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}}$ (puisque $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $\underline{b_2 = \frac{1}{6}}$,
 $\underline{b_3 = 0}$ (d'après A 1)).

Puisque $B_n(1) = C_n(\frac{1}{2})$ et $B_n(0) = C_n(-\frac{1}{2})$, on a d'après
 4) que $B_n(1) = B_n(0) =: b_n \quad \forall n \geq 1$ et, de même,

$$\underline{b_{2m+1} = C_{2m+1}(-\frac{1}{2}) = C_{2m+1}(\frac{1}{2}) = 0 \quad \text{si } m \geq 0.}$$

B. 1) posons $\begin{cases} u' = f'(t) \\ v = B_1(t-p) \end{cases}$ et $\begin{cases} u = f \\ v' = B_0(t-p) \cdot 1 = 1 \end{cases}$

Alors $R_2(p) = \int_p^{p+1} f'(t) B_1(t-p) dt = \left[f(t) B_1(t-p) \right]_p^{p+1} - \int_p^{p+1} f(t) dt$

soit $R_0(p) = f(p+1) B_1(1) - f(p) B_1(0) - \int_p^{p+1} f(t) dt$

où $B_1(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $B_1(0) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

soit $R_0(p) = \frac{f(p+1) + f(p)}{2} - \int_p^{p+1} f(t) dt$

Il en résulte que $\boxed{f(p) + f(p+1) - \int_p^{p+1} f(t) dt = \frac{f(p) + f(p+1)}{2} + R_0(p)}$

2) posons maintenant $\begin{cases} u = f' \\ v' = B_1(t-p) \end{cases}$ avec $\begin{cases} u' = f'' \\ v = \frac{B_2(t-p)}{2} \end{cases}$

Alors $R_0(p) = \int_p^{p+1} f'(t) B_1(t-p) dt = \left[f'(t) \frac{B_2(t-p)}{2} \right]_p^{p+1} - \int_p^{p+1} f''(t) \frac{B_2(t-p)}{2} dt$
 $= \frac{f'(p+1) B_2(1) - f'(p) B_2(0)}{2} - \frac{1}{2} \int_p^{p+1} f''(t) B_2(t-p) dt$

soit $\boxed{R_0(p) = \frac{b_2}{2} (f'(p+1) - f'(p)) - \frac{1}{2} R_1(p)}$
 avec $R_1(p) = \int_p^{p+1} f''(t) B_2(t-p) dt$

3) Pour $t \in [p, p+1[$, $L(t) = p$ donc l'identité $B_{2k}(t-p) = B_{2k}(t-L(t))$ pour $t \in [p, p+1[$ est immédiate.

Si $t = p+1$, $L(t) = p+1$ alors $t - L(t) = 0$ tandis que $t - p = 1$. Or, d'après A-5), on sait que $B_n(1) = B_n(0) = b_n \quad \forall n \geq 1$. Cela assure finalement que $B_{2k}(t-p) = B_{2k}(t-L(t))$ pour tout $t \in [p, p+1]$ et $k \geq 1$

4) D'après 3), (E_p) se réécrit :

$$f(p) + f(p+1) - \int_p^{p+1} f(t) dt = \frac{f(p) + f(p+1)}{2} + \sum_{i=1}^k \frac{b_{2i}}{(2i)!} (f^{(2i-1)}(p+1) - f^{(2i-1)}(p))$$

$$\text{avec } R_{2k-1}(p) = \int_p^{p+1} f(t) B_{2k}(t-L(t)) dt - \frac{1}{(2k)!} R_{2k-1}(p)$$

Sommons le (E_p) , p variant de m à n . On obtient par télescopage, le résultat annoncé :

$$\sum_{p=m}^n f(p) - \int_m^n f(t) dt = \frac{f(m) + f(n)}{2} + \sum_{i=1}^k \frac{b_{2i}}{(2i)!} (f^{(2i-1)}(n) - f^{(2i-1)}(m)) - \frac{1}{(2k)!} R_{2k-1} \text{ où } R_{2k-1} = \int_m^n f(t) B_{2k}(t-L(t)) dt$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$

C - Prenons $f(x) = x^4$ notons que $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2$, $f^{(3)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x$, $f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2$ et $f^{(5)}(x) = 0$

Choisissons $k=3$, $m=0$ et appliquons B-4).

$$\sum_{p=0}^n p^4 = \sum_{p=1}^n p^4 = \int_0^n t^4 dt + \frac{f^{(4)}(n)}{2} + \frac{b_2}{2} (4n^3 - 4 \cdot 0^3) + \frac{b_4}{4!} (4 \cdot 6 \cdot n - 4 \cdot 0)$$

donc $\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{1}{6} 2 \cdot n^3 - \frac{1}{30} n$

i.e. $\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$

Ex 2) 1) $D_{f_n} = \mathbb{R}^*$. f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

2) $A^n - B^n = (A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k$

Ainsi $e^{nx} - 1 = (e^x)^n - 1^n = (e^x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} e^{kx}$

et $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{kx}$

3) D'après 2), $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{kx}$

Elle se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant $f_n(0) = n$. Ce prolongement s'identifie alors à la somme $\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx}$ qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

4) $e^{nx} - 1 = nx + \frac{n^2 x^2}{2} + \frac{n^3 x^3}{3!} + \frac{n^4 x^4}{4!} + o(x^4)$

et $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

D'où $\frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} = \frac{nx + \frac{n^2 x^2}{2} + \frac{n^3 x^3}{3!} + \frac{n^4 x^4}{4!} + o(x^4)}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}$

$= \frac{n \left(1 + \frac{nx}{2} + \frac{n^2 x^2}{3!} + \frac{n^3 x^3}{4!} + o(x^3) \right)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + o(x^3)}$

Mais

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{4!} + o(x^3) = 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} \right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} \right)^2 - \left(\frac{x}{2} \right)^3 + o(x^3)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^3)$$

Donc $\frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} = n \left(1 + \frac{nx}{2} + \frac{n^2 x^2}{3!} + \frac{n^3 x^3}{4!} \right) \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^3) \right)$

$$= n \left(1 + \frac{n-1}{2} x + \frac{2n^2 - 3n + 1}{12} x^2 + \frac{n^3 - 2n^2 + n}{4!} x^3 + o(x^3) \right)$$

Ainsi

$$f_n(x) \approx n + \frac{n(n-1)}{2} x + \frac{n(2n^2 - 3n + 1)}{12} x^2 + \frac{n^2(n^2 - 2n + 1)}{4!} x^3 + o(x^3)$$

5) D'après le théorème de Taylor (existence d'un DL à tout ordre en tout point d'une fonction C^∞) et l'unicité d'un DL lorsqu'il existe. Ainsi

$$f_n(0) = n, \quad f_n'(0) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \frac{f_n''(0)}{2} = \frac{n(2n^2 - 3n + 1)}{12}$$

$$\text{et } \frac{f_n^{(3)}(0)}{3!} = \frac{n^2(n^2 - 2n + 1)}{4!}$$

6) D'après 2) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{kx}$

or $e^{kx} = 1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2!} + \frac{k^3 x^3}{3!} + \dots + \frac{k^m x^m}{m!} + o(x^m)$

$$\Rightarrow f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + kx + \frac{k^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{k^m x^m}{m!} + o(x^m) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sigma_k(m)}{k!} x^k + o(x^m)$$

Par suite (théorème de Taylor)

$$f_n^{(m)}(0) = \sigma_m(n)$$

7) Ainsi $\sigma_3(n) = \frac{n^2(n^2 - 2n + 1)}{4}$ d'après 5) et 6)

soit $\boxed{\sigma_3(n) = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2}$

Ex 3 1) $(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{sh}'(x) \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{ch}'(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}$

soit $\boxed{(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}$

2) $\operatorname{ch}(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = 2 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - 1$

soit $\underline{\operatorname{ch}(2x) = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1}$

$\boxed{(H): y' + \frac{\operatorname{ch}(2x)}{\operatorname{ch}^2 x} y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(2 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) y = 0}$

3) Avec $a(x) = 2 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $A(x) = 2x - \operatorname{th} x$ en est une primitive. Ainsi $e^{-A(x)}$ est un générateur de l'ensemble $\mathcal{S}_{(H)}$ des solutions de (H).

i.e. $\boxed{\mathcal{S}_{(H)} = \operatorname{Vect} \left\{ e^{-2x + \operatorname{th} x} \right\}}$

4) Utilisons la méthode de variation de la constante. Posons $y(x) = C(x) e^{-2x + \operatorname{th} x}$

Alors y est solution de (E) si et seulement si

$\operatorname{ch}^2 x \cdot C'(x) e^{-2x + \operatorname{th} x} = e^{-2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow C'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} e^{-\operatorname{th} x} \Leftrightarrow C(x) = C - e^{-\operatorname{th} x}, C \in \mathbb{R}$

Une solution particulière est donc

$\boxed{y_p(x) = -e^{-2x}}$

5) L'ensemble de solutions de (E) est donc

$$\underline{\mathcal{Y}_{(E)} = \left\{ e^{-2x} (-1 + C e^{4x}), C \in \mathbb{R} \right\}}$$