Lycée Jean Perrin | PTSI 1 & 2

CB2 de Mathématiques – Partie 1
Le jeudi 19 juin 2025

Cette partie 1 doit être traitée séparément de la partie 2. Outre votre nom et votre classe, vous indiquerez Partie 1 sur ces copies et emboîterez les feuillets correspondants dans le bon ordre de lecture. Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice n°1 (9 pts: **1)** 0.25+0.25 **2)** 0.5+0.5 **3)** 0.5 **4)** 0.5+0.5 **5)** 1+0.25+0.25 **6)** 1.5 **7)** 1 **8)** 1 **9)** 0.5+0.5)

On utilisera la convention $0^0 = 1$. Notons $\sigma_m(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ expliciter le domaine de définition $D_{\mathcal{G}_n}$ de $\mathcal{G}_n(x) = \frac{e^{nx}-1}{e^x-1}$ (fonction de la variable réelle) et expliquer pourquoi $\mathcal{G}_n$ est de classe C^∞ sur son domaine.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule de factorisation de $A^n - B^n$ puis réécrire de $\mathcal{G}_n(x)$ comme une somme finie de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3) Expliquer pourquoi $\mathcal{G}_n$ se prolonge par continuité sur tout $\mathbb{R}$ en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On identifiera dorénavant $\mathcal{G}_n$ à ce prolongement.

4) Pour tout $n > 1$, construire le tableau de variations de $\mathcal{G}_n$ et montrer qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer.

5) Prouver que $\mathcal{G}_n^{-1} : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞ pour tout $n > 1$ (on pourra utiliser une récurrence). Que valent dans ce cas $\mathcal{G}_n^{-1}(n)$ et $\left(\mathcal{G}_n^{-1}\right)'(n)$?

6) En utilisant le DL standard de l'exponentielle en 0, déterminer le DL de $\mathcal{G}_n$ en 0 à l'ordre 3.

7) Par quels théorèmes peut-on en déduire les dérivées première, seconde et troisième de $\mathcal{G}_n$ en 0? Quelles sont-elles?

8) Montrer à l'aide de la question **2)** que $\mathcal{G}_n^{(m)}(0) = \sigma_m(n)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. (Les fonctions $\mathcal{G}_n$ sont dites *génératrices* des sommes $\sigma_m(n)$).

9) En déduire une expression compacte de $\sigma_3(n)$. Quelle est sa forme factorisée?

Exercice n°2 (6 pts: **1)** 1+0.5 **2)** 0.5+1.5 **3)** 1 **4)** 1 **5)** 0.5)

1) Pour tout $s > 0$ et tout entier n>1, montrer que l'on peut encadrer la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$ à l'aide d'intégrales bien définies. En déduire que la série harmonique $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\alpha_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$ et $\beta_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.

2) Quand dit-on de deux suites qu'elles sont adjacentes? Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le sont.

3) Pour quelle raison peut-on affirmer qu'il existe une constante γ telle que
$0 \leq \gamma + \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ pour tout n>1? *(Note: γ est dite constante d'Euler-Mascheroni)*

4) En déduire que cette constante γ satisfait, pour tout n>1, à l'encadrement $\alpha_n \leq \gamma \leq \alpha_n + \frac{1}{n}$.

5) Quelle valeur de n peut-on choisir afin d'avoir la certitude d'approximer γ par α_n à 10^{-2} près? *(Note: $\gamma \simeq 0.57$)*

Exercice n°3 (5 pts: **1)** 0.5 **2)** 0.5+0.5 **3)** 1 **4)** 1 **5)** 0.5 **6)** 1)

Notons (E) l'équation différentielle $\mathrm{ch}^2(x)\, y' + \mathrm{ch}(2x)\, y = e^{-2x}$ définie sur l'espace des fonctions y de la variable x de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (où ch est le cosinus hyperbolique).

1) Posons $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. Calculer sa dérivée en fonction de ch(x).

2) Exprimer ch(2x) en fonction de ch(x) puis écrire l'équation homogène (H) associée à (E).

3) Résoudre (H) sur $\mathbb{R}$.

4) Trouver une solution particulière de (E).

5) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

6) Résoudre le problème de Cauchy: $\begin{cases} \mathrm{ch}^2(x)\, y' + \mathrm{ch}(2x)\, y &= e^{-2x} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$.