Nombres complexes I

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$.

Exercice 1 Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{2\mathrm{i}\}$, on pose $f(z) = \dfrac{z-4-3\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}}$

1. Écrire $f(2-5\mathrm{i})$ sous forme algébrique.
2. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé.
   Déterminer, suivant les valeurs de ω, le nombre de solution(s) de l'équation $f(z) = \omega$.
3. Résoudre l'équation $f(z) = z$. Interpréter géométriquement le résultat.
4. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.

Exercice 2 Soit z un nombre complexe distinct de $-\mathrm{i}$. Soit $Z = \dfrac{\mathrm{i}-z}{z+\mathrm{i}}$.

1. Montrer que $|\mathrm{i}-z|^2 = 1 + |z|^2 + \mathrm{i}(z-\bar{z})$.
2. De même, donner une expression pour $|z+i|^2$.
3. Démontrer que $|Z| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
4. Quel est l'ensemble des nombres complexes z tels que Z soit de module 1 ?

Exercice 3 Déterminer et tracer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

1. $\overline{z} = \mathrm{i}z^2$ 2. $z + \overline{z} = |z|$ 3. $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ 4. $(z-\mathrm{i})(z-1) \in \mathbb{R}$ 5. $|2z+1-\mathrm{i}| = 4$
6. $|\mathrm{i}z-1| = |z+2|$ 7. $1 \leq |z+1+\mathrm{i}| \leq 2$ 8. $|z-1-\mathrm{i}| = 1$ et $|z+1+\mathrm{i}| = \sqrt{5}$

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z^2 - z + 1 = 0$ 2. $-\dfrac{1}{2}z^2 + 2z + 4 = 0$ 3. $4z^2 - 4(1+\mathrm{i})z + 5(1-2\mathrm{i}) = 0$

Exercice 5 Dans chacun des cas suivants, trouver une racine évidente de l'équation, puis factoriser le polynôme P.

1. $P(z) = z^3 - z - 6$ 2. $P(z) = z^3 - iz^2 - z + i$ 3. $P(z) = 2z^3 + z^2 + 3z - i + 1$

Exercice 6 On considère un triangle ABC non aplati, et on note O le centre de son cercle circonscrit. On note a, b et c les affixes respectives de A, B et C.

Montrer que les trois médianes du triangle ABC sont concourantes en un point G d'affixe

$$\frac{a+b+c}{3}$$

Exercice 7 Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on considère les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3.

Déterminer l'ensemble des points M tels que MNP soit un triangle rectangle.