

Cours de physique-chimie  
PTSI1 2025-2026

Quentin Roveillo

17 octobre 2025



## Table des matières

<b>I Ondes</b>	<b>3</b>
1 Lois de l'optique géométrique	5
2 Formation des images	11
3 Systèmes optiques	15
4 Propagation d'un signal	19
<b>II Signaux</b>	<b>25</b>
1 Lois de l'électrocinétique	27
2 Circuits linéaires du premier ordre	33
3 Circuits linéaires du deuxième ordre	41
4 Régime des oscillations forcées	49
5 Filtrage	57
6 Champ magnétique et ses actions	67
7 Circuit fixe dans un champ magnétique variable	71
8 Conversion électromécanique de puissance	75
<b>III Mécanique.</b>	<b>79</b>
1 Cinématique du point matériel	81
2 Dynamique du point matériel	89
3 Les oscillateurs mécanique	97
4 Énergie, travail, puissance	101
5 Mouvement de particules chargées	109
6 Loi du moment cinétique d'un point et d'un solide	115
7 Champ de force centrale conservatif	123
<b>IV Chimie</b>	<b>131</b>
1 Molécules et solvants	133
2 Transformation de la matière	141
3 Cinétique chimique	147
4 Équilibre acido-basique en solution aqueuse	155
5 Dissolution et précipitation	165
6 Réaction d'oxydo-réduction	169
7 Diagramme potentiel-pH	175
8 Solides cristallins	181
<b>V Thermodynamique.</b>	<b>187</b>
1 Introduction à la thermodynamique	189
2 Énergie échangées, transformations	195
3 Le premier principe	203
4 Le second principe	211
5 Machines thermiques	217

# Première partie

## Ondes

### Liste des chapitres Ondes

<b>1 Lois de l'optique géométrique</b>	<b>5</b>
1 Sources lumineuses . . . . .	5
2 Modèle de l'optique géométrique . . . . .	6
3 Changement de milieu . . . . .	7
4 Notion d'objet et d'image : . . . . .	8
5 La fibre à saut d'indice . . . . .	9
<b>2 Formation des images</b>	<b>11</b>
1 Notion d'objet et d'image : . . . . .	11
2 Les lentilles minces . . . . .	12
3 Projection d'une image . . . . .	14
<b>3 Systèmes optiques</b>	<b>15</b>
1 L'œil . . . . .	15
2 L'appareil photo . . . . .	16
3 Instrument afocal : . . . . .	17
<b>4 Propagation d'un signal</b>	<b>19</b>
1 Notion d'onde . . . . .	19
2 Ondes progressives harmoniques : . . . . .	21
3 Phénomène d'interférences . . . . .	22
4 Interférences lumineuses . . . . .	23



## Ondes 1 : Lois de l'optique géométrique

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>1.1. Formation des images</b>	
<b>Sources lumineuses</b> Modèle de la source ponctuelle monochromatique. Spectre.	Caractériser une source lumineuse par son spectre. Relier la longueur d'onde dans le vide et la couleur.
<b>Modèle de l'optique géométrique</b> Modèle de l'optique géométrique. Notion de rayon lumineux. Indice d'un milieu transparent.	Définir le modèle de l'optique géométrique. Indiquer les limites du modèle de l'optique géométrique.
Réflexion, réfraction. Lois de Snell-Descartes.	Établir la condition de réflexion totale.
<b>Conditions de l'approximation de Gauss et applications</b> Stigmatisme. Miroir plan.	Construire l'image d'un objet par un miroir plan.
La fibre optique à saut d'indice.	Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice.

### 1 Sources lumineuses

#### Definition : Onde monochromatique

Une onde monochromatique est une onde sinusoïdale de fréquence  $\nu$  et de longueur d'onde  $\lambda$ . L'onde se propage à la célérité  $v$  dans un milieu, avec la relation :

$$\lambda\nu = v \quad \text{avec} \quad v \leq c \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ maximum dans le vide}$$

La lumière se propage dans ce milieu à la vitesse  $v$  et on définit l'indice optique  $n$  d'un milieu :

$$n = \frac{c}{v} \geq 1$$

On définit alors la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  et on relie la longueur d'onde  $\lambda$  dans le milieu à la longueur d'onde dans le vide :

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} \quad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{\lambda_0}{n}$$

Chaque longueur d'onde dans le vide est associée à une couleur du domaine visible :

$\lambda_0$ (nm)	< 400	500	550	590	630	> 750
$\nu$ (Hz)	$> 7,5 \times 10^{14}$	$6 \times 10^{14}$	$5,5 \times 10^{14}$	$5,1 \times 10^{14}$	$4,8 \times 10^{14}$	$< 4,0 \times 10^{14}$
Couleur	ultra violet	bleu	vert	jaune orangé	rouge	infra rouge

On appelle milieu dispersif un milieu dont l'indice optique dépend de la longueur d'onde. On peut appliquer la loi de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$$

On appelle milieu non dispersif un milieu dont l'indice optique ne dépend pas de la longueur d'onde ( $n = C^{te}$ ).

#### Definition : Spectre de la lumière

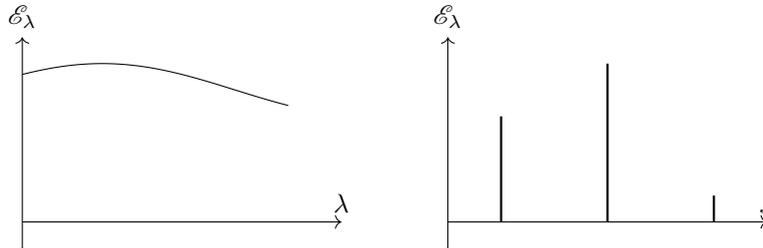
On définit le spectre lumineux d'une source de lumière non-monochromatique comme la courbe qui donne l'éclairement  $\mathcal{E}_\lambda$  en fonction de  $\lambda_0$  la longueur d'onde dans le vide.

#### Propriété : Les types de sources

**Lampes à incandescence :** On appelle lumière blanche une lumière composée d'une large gamme de longueur d'onde (dans le visible). Son spectre lumineux est alors continu et étalé sur toutes les fréquences visibles ( $4 \times 10^{14}$  Hz à  $8 \times 10^{14}$  Hz).

C'est le cas de la lumière du Soleil, ainsi que de toutes les lampes thermiques qui émettent de la lumière en chauffant un corps chaud à haute température.

**Lampes spectrales :** Une lampe spectrale est une lampe dont la lumière est émise par un élément sous forme de vapeur dans laquelle une décharge électrique est produite. La décharge électrique fait passer les atomes dans un état excité qui produise des photons (ondes monochromatiques) en passant dans un état d'excitations inférieur. Le spectre est constitué de pics fin appelés raies spectrales. Chaque raie représente une vibration quasi-monochromatique.



**Propriété : Source ponctuelle monochromatique**

Une source ponctuelle  $S$  est une source de dimensions infiniment petites, assimilable à un point. Elle émet de la lumière dans toutes les directions.

Une source ponctuelle et monochromatique est une source ponctuelle émettant une onde lumineuse monochromatique.

## 2 Modèle de l'optique géométrique

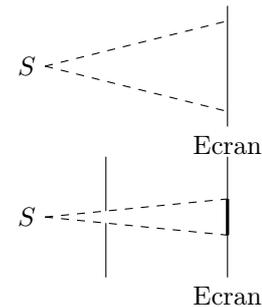
**Propriété : Notion expérimentale de rayon**

La zone lumineuse issue d'une source primaire  $S$  est située à l'intérieur d'un cône qu'on appelle faisceau lumineux.

Si on intercale sur la trajectoire de la lumière un écran percé d'un trou on restreint l'ouverture de la zone éclairée. On a alors une tache lumineuse réduite. Si on réduit la taille du trou, la tache lumineuse diminue également.

Lorsque le trou est trop petit, la tache lumineuse s'élargit de nouveau, on assiste alors à la diffraction du faisceau lumineux.

On définit alors un rayon lumineux comme la trajectoire parcourue par une onde lumineuse lors de sa propagation.



**Definition : Approximation de l'optique géométrique**

Les lois de l'optique géométrique étudiées dans la suite sont valables tant que les instruments utilisés sont de grande taille par rapport à la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière.

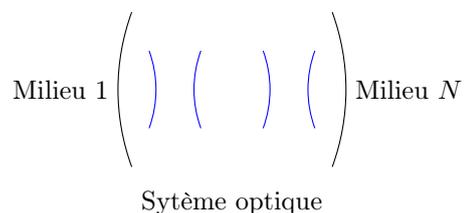
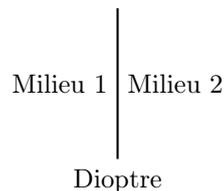
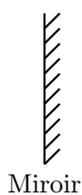
**Definition : Milieu homogène, isotrope et transparent**

On étudiera toujours le trajet des rayons dans des milieux d'indice  $n$  :

- homogène :  $n = C^{te} \quad \forall M \in \text{milieu}$  ;
- isotrope :  $n_x = n_y = n_z = n$  ;
- transparent : permet la propagation de la lumière.

**Vocabulaire :**

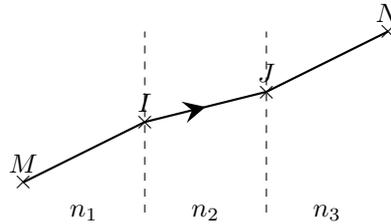
- Un **dioptré** comme la surface séparant deux milieux homogènes d'indices différents.
- Un **miroir** comme une surface réfléchissant la lumière.
- Un **Système optique** comme un ensemble de milieux transparent, homogène et isotopes séparés par des dioptrés ou des miroirs.



**Propriété : Propagation rectiligne de la lumière**

On considère un milieu homogène, isotrope et transparent, la lumière se propage alors de manière rectiligne et les rayons lumineux sont des droites.

Dans une suite de milieu homogènes et isotropes. Le trajet d'un rayon lumineux sera formé d'une succession de segment de droite.

**Propriété : Retour inverse de la lumière**

La trajectoire suivie par la lumière ne dépend pas du sens de parcours. La lumière parcourt la même trajectoire pour aller de A vers B que pour aller de B vers A.

**Propriété : Indépendance des rayons lumineux**

Les rayons lumineux issus des sources  $S_1$  et  $S_2$  sont la somme des rayons issus de  $S_1$  et des rayons issus de  $S_2$ . On reste dans le cas où les deux ondes lumineuses n'interfèrent pas.

### 3 Changement de milieu

**Remarque : Observation**

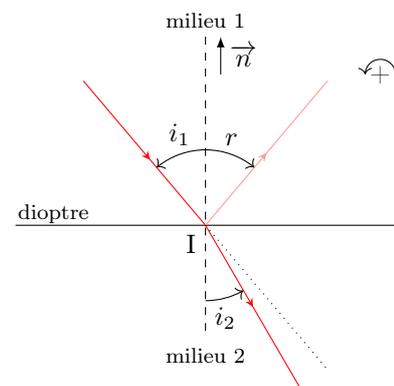
Lorsqu'un **rayon incident** arrive sur un dioptre on observe deux rayons :

- un **rayon réfléchi** qui reste dans le milieu 1 ;
- un **rayon réfracté** qui traverse le dioptre en subissant une déviation ;

**Definition : Paramétrage géométrique**

**Vocabulaire :**

- $I$  : point d'incidence ;
- $\vec{n}$  : normale à la surface du dioptre ;
- $\mathcal{P}$  : plan d'incidence contenant  $I$ ,  $\vec{n}$  et le rayon incident ;
- $i_1$  : angle d'incidence ;
- $i_2$  : angle réfracté ;
- $r$  : angle réfléchi ;
- $D_{\text{refra}} = i_2 - i_1$  déviation du rayon lors de la réfraction ;
- $D_{\text{refle}} = \pi - i_1 + r$  déviation du rayon lors de la réflexion.



Attention, les angles ici sont orientés, c'est-à-dire qu'il y a un sens de rotation arbitrairement pris comme positif, il faut indiquer ce sens par un petit symbole  $\curvearrowright$ .

**Lois de Snell-Descartes**

**Première loi :** Les rayons réfléchis et réfractés sont situés dans le plan d'incidence.

**Deuxième loi :** L'angle réfléchi et l'angle d'incidence sont liés  $i_1 = -r$

**Troisième loi :** L'angle réfracté et l'angle d'incidence sont liés  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

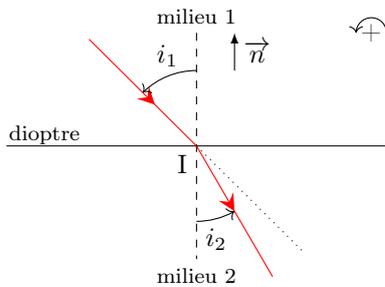
**Exemple : Application directe**

Un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$  passe de l'air à une prisme en verre d'indice  $n_2 = 1,50$ . L'angle d'incidence vaut  $i_1 = 30^\circ$ .

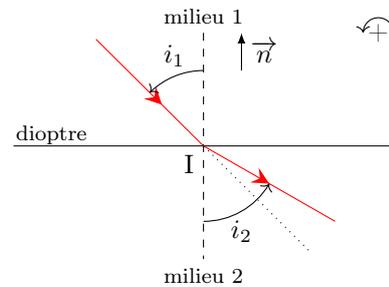
- Q.1** Faire un schéma légendé dans le plan d'incidence en précisant si le rayon réfracté se rapproche ou s'écarte de la normale.
- Q.2** Calculer l'angle de réfraction  $i_2$ .
- Q.3** On remplace le verre par un bloc de diamant. L'angle de réfraction vaut alors  $i'_2 = 12^\circ$ . Calculer l'indice de réfraction du diamant.

**Remarque : Deux situations possibles de réfraction**

Soit on a la situation où  $n_2 > n_1$  dans ce cas on dit que le milieu 2 est plus réfringent que le milieu 1.



Soit on a la situation où  $n_2 < n_1$  dans ce cas on dit que le milieu 2 est moins réfringent que le milieu 1.

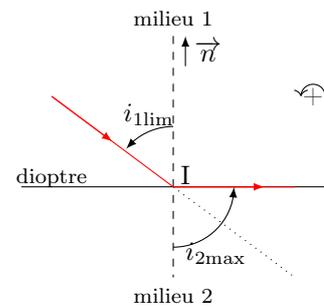


**Propriété : Réflexion totale**

Si  $n_1 > n_2$  alors d'après la deuxième loi de Descartes on a  $i_2 > i_1$ . Si on augmente l'angle d'incidence jusqu'à une valeur limite  $i_1 = i_{1lim}$ , on obtient alors l'angle réfracté à la valeur maximale  $i_2 = i_{2max} = \frac{\pi}{2}$ . La loi de Descartes nous donne alors :

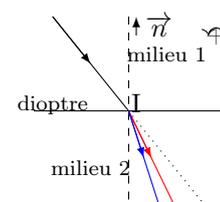
$$n_1 \sin i_{1lim} = n_2 \sin i_{2max} \implies i_{1lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

La totalité de l'énergie est alors réfléchi, il ne reste que le rayon réfléchi. On parle alors de réflexion totale.



**Propriété : Dispersion de la lumière**

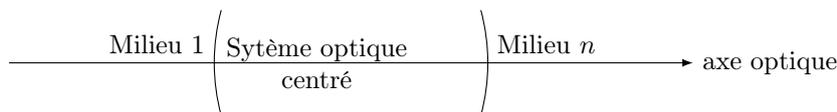
Si le milieu 2 est dispersif alors  $n_2 = n_2(\lambda_0)$  et chaque couleur aura son propre indice optique. D'après la loi de Descartes, chaque couleur aura donc un angle réfracté  $i_2 = i_2(\lambda_0)$  différent. D'après la loi de Cauchy, plus la longueur d'onde dans le vide est grande, plus l'indice optique est faible, plus l'angle réfracté est grand. On a donc le rayon rouge de grande longueur d'onde qui est moins dévié que le rayon bleu.



## 4 Notion d'objet et d'image :

**Definition : Axe optique**

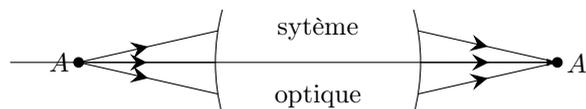
Si tous les composants d'un système optique ont un axe de symétrie en commun, système est dit **centré**. L'axe de symétrie est alors appelé **axe optique**.



**Definition : Image/Objet**

On considère une source ponctuelle  $A$ , si tous les rayons issus de  $A$  convergent en  $A'$  après avoir traversé  $(S)$ , on dit que  $A'$  est l'image de  $A$  à travers  $(S)$ . Les points  $A$  et  $A'$  sont conjugués par le système.

L'espace objet est situé avant la face d'entrée de  $(S)$ .



L'espace image est situé après la face de sortie de  $(S)$ .

Pour voir un point image, il faut utiliser un écran à la position de l'image qui va diffuser les rayons dans toutes les directions.

**Propriété : Objet réel/virtuel**

Si le faisceau entrant dans un système optique ( $S$ ) est divergent depuis un point  $A$  situé dans l'espace objet. Alors  $A$  est un objet réel, sinon c'est un objet virtuel.



Les rayons après le premier dioptres sont déviés, on trace donc leurs prolongements en pointillés.

**Propriété : Image réelle/virtuelle**

Si le faisceau sortant d'un système optique est convergent vers un point  $A'$  situé dans l'espace image. Alors  $A'$  est une image réelle, sinon c'est une image virtuelle.



On ne peut pas projeter une image virtuelle sur un écran, mais on peut la voir avec notre œil (voir fin du chapitre).

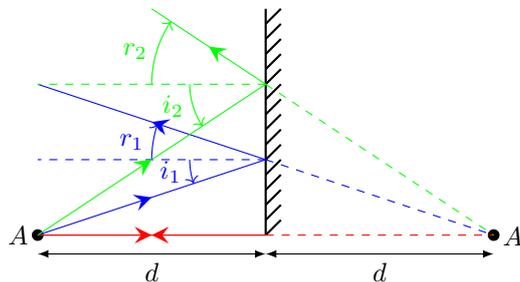
**Propriété : Objet/Image à l'infini**

Un objet situé à l'infini émet des rayons qui sont parallèle entre eux.

Une image située à l'infini est formée à partir de rayons parallèles entre eux.

**Propriété : Image à travers un miroir**

On considère un objet réel  $A$  situé à une distance  $d$  d'un miroir plan. L'objet  $A$  est considéré comme une source ponctuelle de lumière :



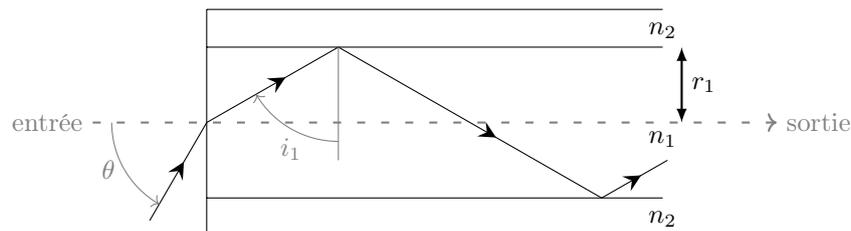
Le faisceau de rayon réfléchi est divergent. Le miroir produit donc une **image virtuelle** située à l'intersection du prolongement des rayons réfléchis.

D'après la loi de Snell-Descartes de la réflexion, l'image virtuelle  $A'$  est le symétrique de l'objet réel  $A$  par rapport au plan du miroir.

## 5 La fibre à saut d'indice

**Definition : Présentation**

La fibre à saut d'indice est constituée d'une cœur cylindrique transparent de rayon  $r_1$  et d'indice  $n_1$  entouré par une gaine coaxiale également transparente, de rayon  $r_2$  et d'indice  $n_2$ . Le but de la fibre optique est de guider les rayons lumineux tout en minimisant les pertes.

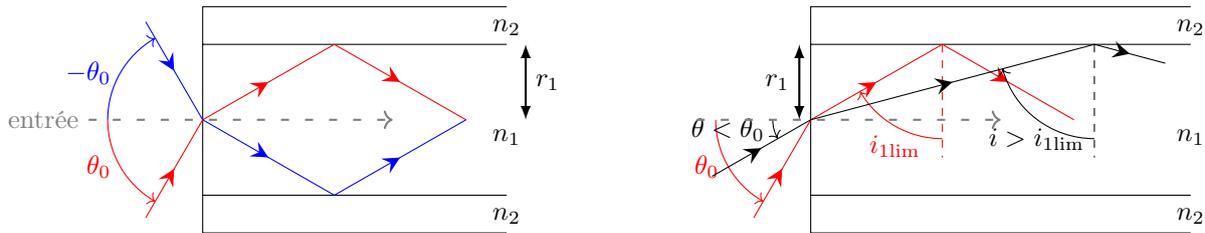


Pour une utilisation optimale

- il faut que les rayons à l'entrée de la fibre soit inclu dans un **cône d'acceptance** ;
- la **dispersion intermodale** ne brouille pas le signal.

**Propriété : Cône d'acceptance**

Le cône d'acceptance est caractérisé par le demi-angle  $\theta_0$  au sommet tel que tous les rayons qui sont contenu dans ce cône traverse la fibre sans perte.



**Condition de propagation :** On définit  $\theta_0$  à partir de la condition de réflexion totale à l'interface gaine-cœur :

$$n_1 \sin i_{1\text{lim}} = n_2 \implies i_{1\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

De cette manière on obtient la condition sur  $i_1$  :

$$i_1 > i_{1\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

**Condition sur  $\theta$  :** Cherchons d'abord une relation entre  $\theta_0$  et  $i_{1\text{lim}}$  :

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_{1\text{lim}}\right)$$

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \cos(i_{1\text{lim}})$$

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \sqrt{1 - \sin^2(i_{1\text{lim}})}$$

En utilisant la condition de réflexion totale on obtient :

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \implies \theta_0 = \arcsin(\sqrt{n_1^2 - n_2^2})$$

Et on a alors la condition :  $\theta < \theta_0$  à partir de  $i > i_{1\text{lim}}$ .

**Propriété : Dispersion intermodale**

La dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice est définie par la différence de temps de parcours de la fibre entre le rayon le plus lent et le rayon le plus rapide :

$$\Delta t = t_{\text{max}} - t_{\text{min}}$$

Le rayon le plus rapide correspond au rayon parcourant la distance la plus courte. C'est le rayon entrant dans la fibre avec un angle  $\theta = 0$ . Son temps de trajet est tout simplement

$$t_{\text{min}} = \frac{L}{v_1} = \frac{n_1 L}{c}$$

Le rayon le plus lent correspond au rayon parcourant la distance la plus longue. C'est le rayon faisant un angle  $\theta_0$  avec l'axe de la fibre. Son temps de trajet est

$$t_{\text{max}} = \frac{l}{v_1} = \frac{n_1 l}{c}$$

avec  $l$  la distance parcourut par le rayon. On a

$$l = \frac{L}{\sin i_{1\text{max}}} = \frac{n_1 L}{n_2} \implies t_{\text{max}} = \frac{n_1^2 L}{n_2 c}$$

On obtient alors l'expression de la dispersion modale :

$$\Delta t = \frac{n_1 L}{c} \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right)$$

Si la dispersion modale est trop importante on peut perdre de l'information lors de la transmission de signaux.

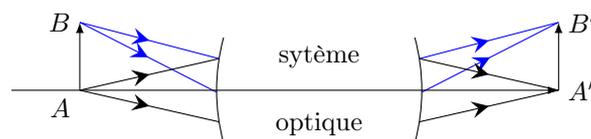
## Ondes 2 : Formation des images

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>1.1. Formation des images</b>	
Conditions de l'approximation de Gauss.	Énoncer les conditions de l'approximation de Gauss et ses conséquences. Relier le stigmatisme approché aux caractéristiques d'un détecteur.
Lentilles minces dans l'approximation de Gauss.	Définir les propriétés du centre optique, des foyers principaux et secondaires, de la distance focale, de la vergence. Construire l'image d'un objet situé à distance finie ou infinie à l'aide de rayons lumineux, identifier sa nature réelle ou virtuelle. Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement transversal de Descartes et de Newton. Établir et utiliser la condition de formation de l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente.

### 1 Notion d'objet et d'image :

#### Definition : Stigmatisme/Aplanétisme

On considère un système optique ( $S$ ) centré. On place un objet réel  $AB$  tel que  $A$  est situé sur l'axe optique et  $AB$  est orthogonal à l'axe optique.



Le système optique ( $S$ ) est dit :

- **stigmatique** si tous les rayons issus de  $A$  passent par  $A'$  après avoir été déviés par le système optique.
- **aplanétique** si l'image  $A'B'$  est elle aussi orthogonale à l'axe optique.

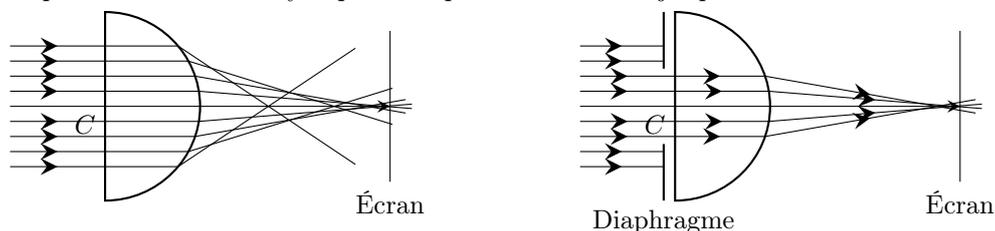
De cette manière pour déterminer la position de  $A'$  on doit déterminer de  $B'$  puis  $A'$  est la projection de  $B'$  sur l'axe optique.

#### Propriété : Miroir plan

Le miroir plan est le seul système optique rigoureusement stigmatique et aplanétique.

#### Conditions de Gauss et capteur

En pratique les systèmes ne sont jamais parfaitement stigmatique et aplanétiques. Si on prend l'exemple d'une lentille demi-boule éclairée par un faisceau de rayon parallèle provenant d'un objet ponctuel situé à l'infini sur l'axe optique :

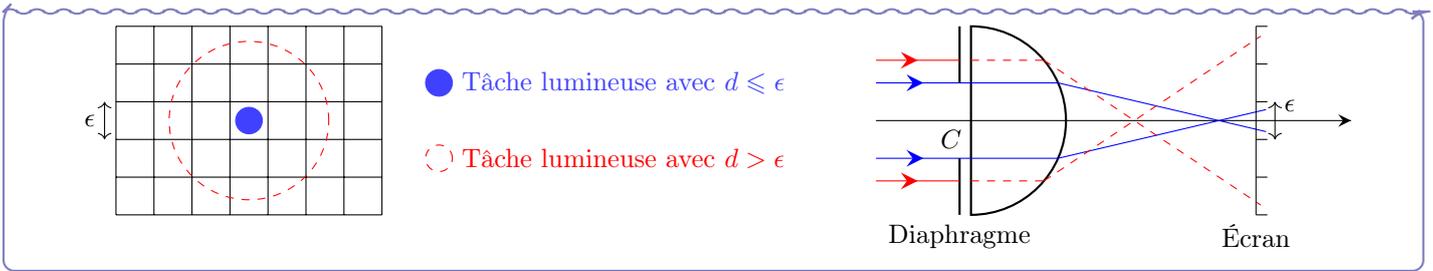


On voit que les rayons ne convergent pas tous sur un unique point. Le système n'est donc pas stigmatique et chaque point objet formera donc sur un écran une tâche lumineuse. Pour permettre d'avoir un stigmatisme approché et un aplanétisme approché on se place dans les conditions de Gauss :

- Les rayons sont proches de l'axe optique ;
- L'angle entre les rayons et l'axe optique est faible.

Dans ces conditions on parle de rayons paraxiaux. Si un système optique est utilisé dans les conditions de Gauss, il peut être considéré comme stigmatique et aplanétique.

Plus les conditions de Gauss sont respectées, et plus la tâche lumineuse sur le récepteur sera petite. Tous les récepteurs sont composés de cellules élémentaires photo-sensibles qu'on considèrera carré de taille  $\epsilon$ . Les conditions de Gauss sont respectées si la tâche lumineuse sur le récepteur a un diamètre  $d \leq \epsilon$ , dans ce cas le récepteur obtient la même information que pour un système stigmatique.

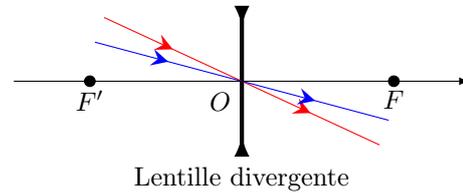
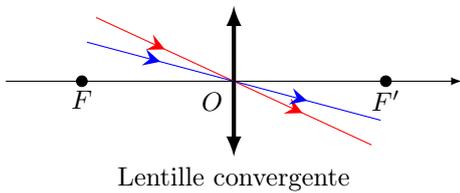


## 2 Les lentilles minces

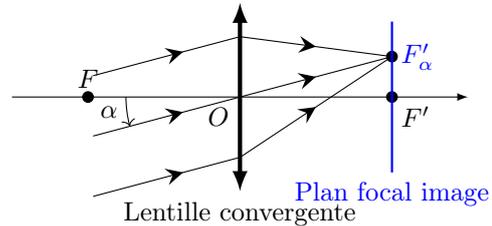
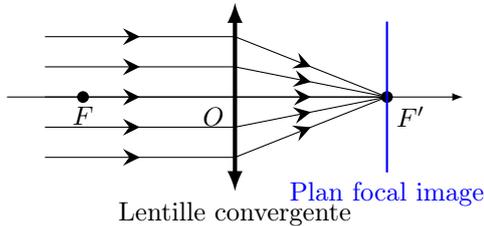
### Definition : Lentille mince

Une lentille sphérique est un milieu transparent, homogène et isotrope limité par deux dioptries sphériques. Les lentilles convergentes sont les lentilles à bords fins. On a deux types de lentilles, les lentilles convergentes à bords minces et les lentilles divergentes à bords épais dont on définit trois points remarquables :

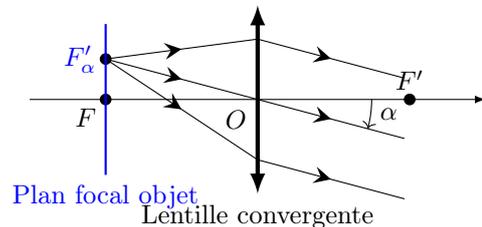
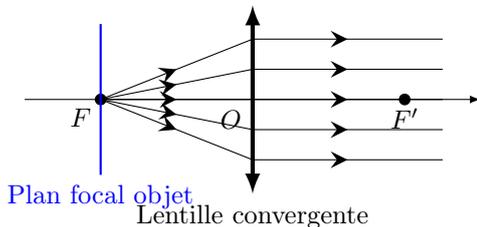
- **Centre optique  $O$**  : Les rayons qui passent par le point  $O$  ressortent avec le même angle par rapport à l'axe optique.



- **Foyer image  $F'$**  : La position de l'image à travers ( $S$ ) d'un objet situé sur l'axe optique à l'infini (faisceau de rayons parallèle à l'axe optique). Le plan orthogonal à l'axe passant par  $F'$  est appelé **plan focal image**. Par application de l'aplanétisme on définit alors les **foyer secondaire image  $F'_\alpha$**  situé dans le plan focal image, position de l'image d'un point situé à l'infini avec un faisceau de rayon parallèle à l'axe optique d'un angle  $\alpha$ .



- **Foyer objet  $F$**  : La position de l'objet situé sur l'axe optique qui donne une image à travers ( $S$ ) située sur l'axe optique à l'infini (faisceau de rayons parallèle à l'axe optique). Le plan orthogonal à l'axe passant par  $F$  est appelé **plan focal objet**. Par application de l'aplanétisme on définit alors les **foyer secondaire objet  $F_\alpha$**  situé dans le plan focal objet, position de l'objet d'un point qui donne une image à travers ( $S$ ) située à l'infini avec un faisceau de rayon parallèle à l'axe optique d'un angle  $\alpha$ .



### Definition : Distance focale et vergence

On définit également la **distance focale image** d'une lentille  $f' = \overline{OF'}$  et la **distance focale objet** d'une lentille  $f = \overline{OF}$  avec  $f = -f'$ .

On définit la **vergence** comme l'inverse de la distance focale image, elle s'exprime en dioptrie notée  $\delta$  homogène à l'inverse d'une longueur.

$$V = \frac{1}{f'}$$

Par définition on a :

- $f' > 0$  et  $V > 0$  pour une lentille convergente ;

- $f' < 0$  et  $V < 0$  pour une lentille divergente;

### Definition : Grandissement

Pour un objet étendu  $AB$  on définit le **grandissement** comme le rapport de la mesure algébrique  $\overline{A'B'}$  de l'image par la mesure algébrique  $\overline{AB}$  de l'objet :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Si  $|\gamma| > 1$  l'image est agrandie, si  $\gamma > 0$  l'image est droite.

### Formules de conjugaisons

À partir d'un schéma, on peut relier par le calcul les différentes distance en utilisant le théorème de Thalès. On obtient alors les relations de conjugaisons :

**Grandissement :**  $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$

**Formule de Newton :**  $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 = -f^2$

**Formule de Descartes :**  $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$

### Méthode : Construction graphique des images

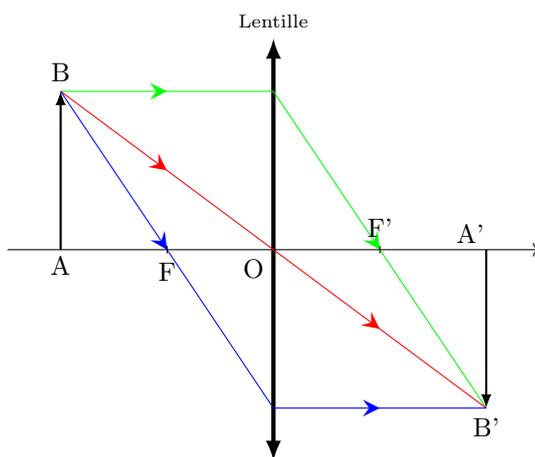
Pour obtenir l'image  $A'B'$  d'un objet  $AB$  à travers une lentille (convergente ou divergente), on utilise trois rayons :

- Un rayon incident passant par  $B$  et  $O$  qui donne un rayon émergent passant par  $O$  et  $B'$  parallèle au rayon incident (pas dévié) ;
- Un rayon incident passant par  $B$  et parallèle à l'axe optique qui donne un rayon émergent passant par  $F'$  et  $B'$  ;
- Un rayon incident passant par  $B$  et  $F$  qui donne un rayon émergent passant par  $B'$  et parallèle à l'axe optique.

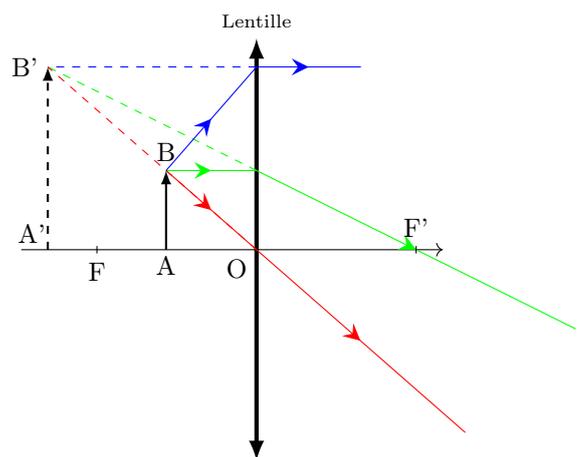
Deux rayons suffisent pour tracer  $B'$ , mais une infinité de rayons sont émis par  $B$  pour former l'image  $B'$ .  $A'$  est la projection de  $B'$  sur l'axe optique car le système est aplanétique.

### Exemple :

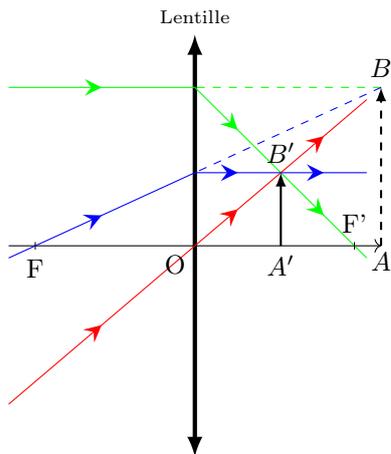
**Cas 1 :**  $AB$  est réel placé avant  $F$  d'une lentille convergente  $\rightarrow A'B'$  réelle. Représenté ci-dessus.



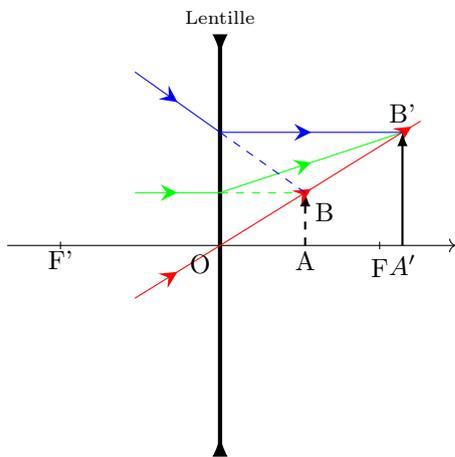
**Cas 2 :**  $AB$  est réel placé après  $F$  d'une lentille convergente  $\rightarrow A'B'$  virtuelle.



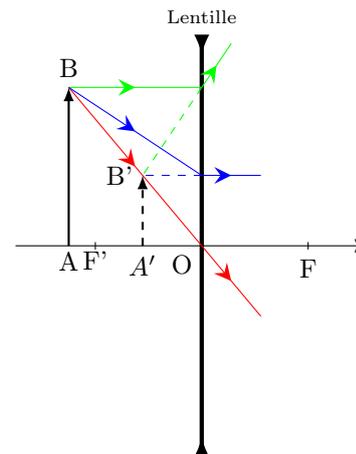
**Cas 3 :**  $AB$  est virtuel après  $O$  d'une lentille convergente  $\rightarrow A'B'$  réelle.



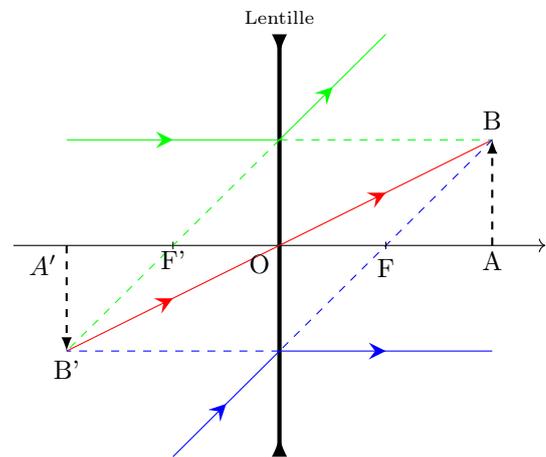
**Cas 5 :**  $AB$  est virtuel placé avant  $F$  d'une lentille divergente  $\rightarrow A'B'$  réelle.



**Cas 4 :**  $AB$  est réel placé avant  $O$  d'une lentille divergente  $\rightarrow A'B'$  virtuelle.



**Cas 6 :**  $AB$  est virtuel après  $F$  d'une lentille divergente  $\rightarrow A'B'$  virtuelle.



### 3 Projection d'une image

**Definition : Observation d'une image projetée**

L'œil ne peut observer directement qu'une image réelle lorsque celle-ci est projetée sur un écran, c'est-à-dire qu'un écran est à la position de l'image réelle.

On verra dans le prochain chapitre le fonctionnement de l'œil et comment utiliser des instruments pour observer des images qui pourront être situées à l'infini ou de nature virtuelle.

**Propriété : Condition de projection**

On considère un objet  $AB$  dont on veut projeter l'image réelle  $A'B'$  à travers une lentille de distance focale  $f'$  sur un écran situé à une distance  $D$  de  $AB$ . La projection est possible si :

$$D \geq 4f'$$

**Démonstration :** On pose  $\overline{AA'} = D$  et  $\overline{OA} = -x$  d'où  $\overline{OA'} = D - x$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \iff \frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \iff x + D - x = f'(D-x)x \iff f'x^2 - f'Dx + D = 0$$

L'équation du second degré possède une ou deux racines réelles si le discriminant  $\Delta = f'^2 D^2 - 4Df' \geq 0$  soit  $D \geq 4f'$

## Ondes 3 : Systèmes optiques

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>1.1. Formation des images</b>	
<b>Modèles de quelques dispositifs optiques</b> L'œil. Punctum proximum, punctum remotum.	Modéliser l'œil comme l'association d'une lentille de vergence variable et d'un capteur plan fixe. Citer les ordres de grandeur de la limite de résolution angulaire et de la plage d'accommodation.
L'appareil photographique.	Modéliser l'appareil photographique comme l'association d'une lentille et d'un capteur. Construire géométriquement la profondeur de champ pour un réglage donné. <b>Étudier l'influence de la focale, de la durée d'exposition, du diaphragme sur la formation de l'image.</b>

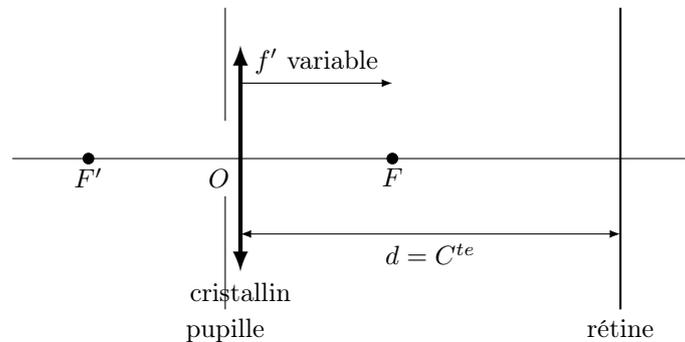
### 1 L'œil

#### Definition : Modélisation

L'œil est composé de différentes parties :

- L'iris composé d'une pupille dont le diamètre est variable (de 2 mm à 8 mm)  $\iff$  diaphragme ;
- Le cristallin est assimilable à une lentille convergente de distance focale image variable ;
- La rétine est constituée de cellules sensible à la lumière (cônes et bâtonnets)  $\iff$  Ecran.

On modélise l'œil par une lentille mince convergente variable formant une image sur un écran fixe :



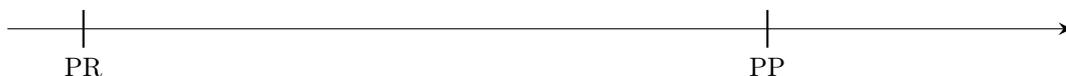
#### Propriété : Plage d'accommodation

On définit la plage d'accommodation comme la zone de l'espace où l'œil peut accommoder pour former une image nette. La plage d'accommodation est située entre :

- Le Punctum Remotum (PR) le point le plus loin que l'on peut voir net au repos ( $f' = f'_{max}$ ) ;
- Le punctum proximum (PP) le point le plus proche que l'on peut voir net en accommodant ( $f' = f'_{min}$ ).

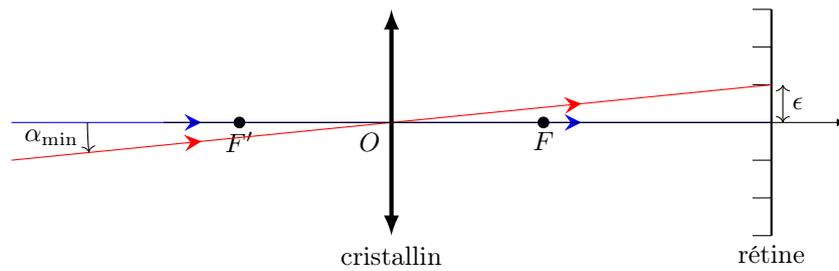
accomoder = faire diminuer la distance focale de l'œil.

au repos = distance focale maximale.



#### Propriété : Limite de résolution angulaire

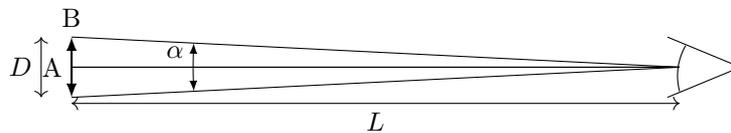
La rétine est composée de cellules qui permettent de détecter l'intensité lumineuse ainsi que la couleur. Ces cellules possèdent une taille caractéristique qu'on nomme  $\epsilon$ . Si deux images se forment sur la même cellule, elles se superposent, donc pour distinguer deux images il faut qu'elles se forment sur deux cellules différentes et qu'elles soient distantes de  $\epsilon$  au minimum et donc les rayons arrivant dans l'œil doivent arriver avec un angle minimum entre eux. Ceci constitue la limite de résolution angulaire.

**Remarque : Ordre de grandeur**

Pour un œil normal, le PR est situé à l'infini et le PP à environ 25 cm pour un adulte. Dans de bonnes conditions d'éclairement (ni trop sombre, ni trop lumineux), l'œil distingue des détails d'environ 1 minute d'arc, soit  $3 \times 10^{-4}$  rad.

**Definition : Diamètre apparent**

On définit le diamètre apparent d'un objet de diamètre  $D$  situé à une distance  $L$  comme l'angle  $\alpha$  sous lequel on voit l'objet :

**Propriété : Le grossissement**

On définit le grossissement  $G$  comme :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

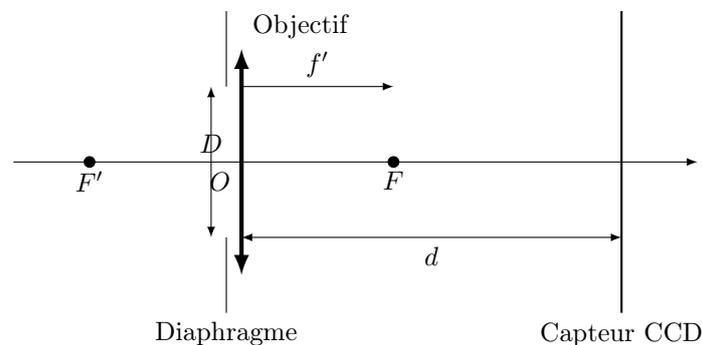
avec  $\alpha'$  le diamètre apparent de l'image vu par l'œil à travers un instrument d'optique, et  $\alpha$  le diamètre apparent de l'objet vu directement par l'œil.

## 2 L'appareil photo

**Definition : Modélisation**

Un appareil photo est constitué :

- D'un objectif, modélisé par une lentille convergente de distance focale  $f'$  ;
- D'un diaphragme, ouverture de forme circulaire de diamètre  $D$  réglable situé juste devant la lentille ;
- D'un capteur CCD modélisé par un écran situé à une distance  $d$  réglable de la lentille.

**Propriété : Mise au point**

Pour obtenir une image nette d'un point  $A$  donné, il faut que l'image  $A'$  soit située sur le capteur. La distance  $d$  doit alors respecter

$$\overline{OA'} = d$$

**Exemple : Mise au point à l'infini**

Pour un appareil photo avec un objectif de focale  $f'$ , lors d'une mise au point sur un objet situé à l'infini. La distance  $d$

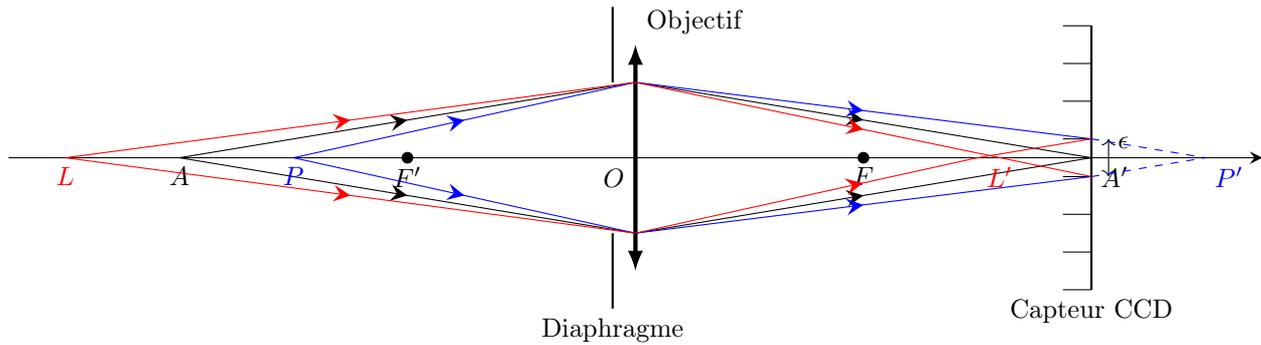
entre l'objectif et le capteur doit valoir

$$d = f'$$

**Propriété : Profondeur de champ**

Le capteur d'un appareil photo possède des cellules de taille  $\epsilon$  qui renvoie la même image que l'image formée sur la cellule soit ponctuelle ou sous forme de tâche lumineuse.

On en déduit que pour un réglage donné tel que  $d = \overline{OA'}$  pour faire la mise au point d'un point objet  $A$ . On peut observer un point  $P$  plus proche et un point  $L$  plus loin tel que les faisceaux lumineux entrant dans l'objectif et convergant en  $P'$  et  $L'$  forment une tâche lumineuse sur le capteur de diamètre inférieur à  $\epsilon$ .



On peut alors voir net sur l'image renvoyée par le capteur l'ensemble des objet situés entre  $P$  et  $L$  ce qui constitue la profondeur de champ de l'appareil. Plus le diaphragme est ouvert, plus la profondeur de champ est réduite.

### 3 Instrument afocal :

**Definition : Instrument afocal**

Un système afocal ne possède pas de foyer, ceux-ci sont positionné en l'infini. Les instruments afocaux permettent d'observer des objets situés à l'infini avec un œil normal sans accommoder.

**Propriété : Modélisation**

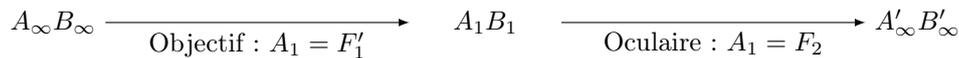
On cherchera souvent à modéliser un instrument afocal comme l'association de 2 lentilles :

- Un objectif de focale  $f'_1$  qui est la lentille la plus proche de l'objet.
- Un oculaire de focale  $f'_2$  qui est la lentille derrière laquelle on vient positionner notre œil.

**Propriété : Image intermédiaire**

L'objectif forme une première image d'un objet  $AB$  à observer. L'objet situé à l'infini est noté  $A_\infty B_\infty$  et forme une image à travers l'objectif notée  $A_1 B_1$  appelée image intermédiaire et située dans le plan focal image de l'objectif.

Cette image est l'objet de vis à vis de l'oculaire qui doit former une image à l'infini notée  $A'_\infty B'_\infty$  pour être vue sans accommoder. L'image intermédiaire est donc également dans le plan focal objet de l'oculaire.



**Propriété : Distance entre les lentilles**

On désigne par  $\Delta = \overline{O_1 O_2}$  la distance entre l'objectif de focale  $f'_1$  et l'oculaire de focale  $f'_2$ . D'après la définition de l'image intermédiaire pour un système afocale on a forcément :

$$\Delta = f'_1 + f'_2$$

**Exemple : La lunette astronomique**

La lunette est composée d'une lentille convergente  $L_1$  de distance focale  $f'_1 = 60$  cm qui sert d'objectif. Ainsi que d'une lentille divergente  $L_2$  de distance focale  $f'_2 = -5$  cm qui sert d'oculaire.

$$A_\infty B_\infty \longrightarrow A_1 B_1 \longrightarrow A'_\infty B'_\infty$$

Etude de l'oculaire : Pour que  $A'_\infty B'_\infty$  soit situé à l'infini, il faut que  $A_1 = F_2$  le foyer objet de la lentille  $L_2$ .

Etude de l'objectif : Or si  $A_\infty B_\infty$  est à l'infini, alors  $A_1 = F'_1$  le foyer image de la lentille  $L_1$ . On a alors  $F'_1 = F_2 = A_1$  le foyer objet de l'oculaire est confondu avec le foyer objet de l'objectif.

Pour tous les systèmes afocaux on a le foyer image de l'objectif  $F'_{ob}$  qui est confondu avec le foyer image de l'oculaire  $F_{oc}$ .

La grossissement vaut  $G = -\frac{f'_1}{f'_2}$  positif donc image droite.

Les rayons incidents de l'objectif sont parallèles avec un diamètre apparent de l'objet  $\alpha$ . Ils sont ensuite déviés par  $L_1$  et convergent vers  $B_1$  l'image intermédiaire. Avant de converger, ils sont déviés par  $L_2$  et les rayons émergents sont parallèles et le diamètre apparent de l'image est  $\alpha'$ .

On peut calculer le grossissement angulaire :  $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$

$\alpha'$  est le diamètre apparent de l'image  $\tan \alpha' = \frac{\overline{A_1 B_1}}{O_2 A_1} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{-f'_2}$ .

Dans les conditions de Gauss :  $\alpha' \ll 1 \implies \tan \alpha' \approx \alpha'$

$\alpha$  est le diamètre apparent de l'objet  $\tan \alpha = \frac{\overline{A_1 B_1}}{O_1 A_1} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{f'_1}$ .

Dans les conditions de Gauss :  $\alpha \ll 1 \implies \tan \alpha \approx \alpha$

On a alors :  $G = \frac{-f'_1}{f'_2} = 12$  l'image est droite.

## Ondes 4 : Propagation d'un signal

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>1.6. Propagation d'un signal</b>	
Exemples de signaux. Signal sinusoïdal.	Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
<b>Propagation d'un signal dans un milieu illimité, non dispersif et transparent</b> Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle non dispersive. Célérité, retard temporel.	Écrire les signaux sous la forme $f(x-ct)$ ou $g(x+ct)$ . Écrire les signaux sous la forme $f(t-x/c)$ ou $g(t+x/c)$ . Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.
Modèle de l'onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle. Vitesse de phase, déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.	Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique. Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase. Relier le déphasage entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation. <b>Mesurer la vitesse de phase, la longueur d'onde et le déphasage dû à la propagation d'un phénomène ondulatoire.</b>
Milieux dispersifs ou non dispersifs.	Définir un milieu dispersif. Citer des exemples de situations de propagation dispersive et non dispersive.
<b>Phénomène d'interférences</b> Interférences entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence.  Interférences entre deux ondes lumineuses de même fréquence. Exemple du dispositif des trous d'Young éclairé par une source monochromatique. Différence de chemin optique. Conditions d'interférences constructives ou destructives. Formule de Fresnel.	Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives. Déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage.  Relier le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique. Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique entre les deux ondes. Exploiter la formule de Fresnel fournie pour décrire la répartition d'intensité lumineuse. <b>Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour visualiser et caractériser le phénomène d'interférences de deux ondes.</b>

## 1 Notion d'onde

### Definition : Onde

Un signal est la variation temporelle et/ou spatiale d'une ou de plusieurs grandeurs physiques.

On appelle onde un phénomène physique dans lequel une perturbation locale se déplace dans l'espace sans qu'il y ait de déplacement de matière en moyenne. Toute grandeur physique, nulle dans l'état de repos et apparaissant avec la perturbation, est appelée signal physique transporté par l'onde.

### Definition : Célérité d'une onde

On appelle célérité d'une onde sa vitesse de propagation.

### Remarque : Grandeurs physiques

- Onde acoustiques : vitesse-masse volumique ;
- Onde électromagnétique : Champ électrique-Champ magnétique ;
- Onde électrique : tension-intensité du courant.

### Definition : Milieu dispersif/non-dispersif

On définit un milieu non-dispersif comme un milieu où toutes les ondes se propagent à la même vitesse.

Par opposition, on définit un milieu dispersif comme un milieu où la vitesse de propagation des ondes dépend de la fréquence. De cette manière une onde composée de plusieurs fréquence va se "dispenser".

**Definition : Onde progressive 1D**

On définit une onde progressive comme une onde se propageant sans transport de matière selon une direction  $\vec{u}_x$  dans un milieu :

- non dispersif : les ondes ne se déforment pas ;
- non dissipatif : l'amplitude de l'onde est constante.

On peut alors modéliser l'enveloppe de l'onde par une fonction  $f$  ou  $g$  tel que :

- Pour une onde  $s_+(x, t)$  se propageant dans le sens des  $x$  croissants :

$$s_+(x, t) = f(x - ct) \text{ ou } s_+(x, t) = g\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

- Pour une onde  $s_-(x, t)$  se propageant dans le sens des  $x$  décroissants :

$$s_-(x, t) = f(x + ct) \text{ ou } s_-(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

où  $c$  la célérité de l'onde.

**Propriété : retard temporel**

Si on considère un signal émis en  $O$  se déplaçant dans le sens des  $x$  croissants. On mesure le signal en  $M$  et en  $N$  on trace respectivement :



- $s_O(t) = s(x = 0, t)$  ;
- $s_M(t) = s(x = x_M, t)$  ;
- $s_N(t) = s(x = x_N, t)$ .



avec  $\tau_M$  et  $\tau_N$  le temps de propagation de l'onde de  $O$  vers  $M$  puis  $N$ . On a alors la relation :

$$s_M(t) = s_O(t - \tau_M) \quad \text{et} \quad s_N(t) = s_O(t - \tau_N) \quad \text{donc} \quad s(x, t) = s_O(t - \tau(x))$$

Comme l'onde se propage dans le sens des  $x$  croissants on peut poser :

$$\tau(x) = \frac{x}{c}$$

Pour une onde qui se propage dans le sens des  $x$  décroissants on peut poser :

$$\tau(x) = -\frac{x}{c}$$

**Propriété : Déplacement spatial**

Si on considère un signal émis en  $O$  se déplaçant dans le sens des  $x$  croissants. On prend une "photo" de l'onde à l'instant  $t_0$ , puis  $t_1 > t_0$  et  $t_2 > t_1$  :

- $s_0(x) = s(x, t = t_0)$  ;
- $s_1(x) = s(x, t = t_1)$  ;
- $s_2(x) = s(x, t = t_2)$ .



avec  $x_0$  la position où le début du signal est reçu à l'instant  $t_0$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  les déplacements de l'onde par rapport à l'instant  $t_0$  aux instants  $t_0$ ,  $t_1$  et  $t_2$ . On a alors la relation :

$$s_1(x) = s_0(x - \delta_1) \quad \text{et} \quad s_2(x) = s_0(x - \delta_2) \quad \text{donc} \quad s(x, t) = s_0(x - \delta(t))$$

Comme l'onde se propage dans le sens des  $x$  croissants on peut poser :

$$\delta(t) = +c(t - t_0)$$

Pour une onde qui se propage dans le sens des  $x$  décroissants on peut poser :

$$\delta(t) = -c(t - t_0)$$

## 2 Ondes progressives harmoniques :

### Definition : Onde progressive sinusoïdale

Une onde progressive sinusoïdale de pulsation temporelle  $\omega$  se propageant dans le sens des  $x$  croissants avec la vitesse  $c$  a pour expression :

$$s(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

avec  $k$  le vecteur d'onde (pulsation spatiale) tel que :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma \quad \sigma \text{ est le nombre d'onde (fréquence spatiale)}$$

### Propriété : Vitesse de phase

La célérité d'une onde progressive harmonique est appelée vitesse de phase et s'exprime en fonction de  $\omega$  et  $k$  ou  $f$  et  $\lambda$  :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \lambda f$$

avec  $f$  la fréquence de l'onde et  $\lambda$  sa longueur d'onde.

### Propriété : Déphasage entre les signaux en deux points

Si on considère une onde émise en  $O$  et qui se propage dans le sens des  $x$  croissants telle que :

$$s(x = 0, t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \implies s(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx) = A_0 \cos(\omega t + \varphi(x))$$

avec  $\varphi(x) = -kx + \varphi_0$  le déphasage de l'onde en  $x$  par rapport à l'onde émise en  $O$  à l'instant  $t$ .

Alors le déphasage entre  $s_1(t)$  l'onde reçue en  $x_1$  et  $s_2(t)$  l'onde reçue en  $x_2$  vaut :

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = -k(x_1 - x_2) = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2)$$

### Propriété : Signaux en phase / en opposition de phase

- Si le déphasage vaut  $m \times 2\pi$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  alors les signaux sont en phase ;
- Si le déphasage vaut  $\left(m + \frac{1}{2}\right) \times 2\pi$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  alors les signaux sont en opposition de phase.

### Remarque : Ordre de grandeur de fréquences

- Ondes acoustiques audibles :  $f = 20 \text{ Hz}$  à  $20 \times 10^3 \text{ Hz}$  ;
- Ondes électromagnétiques téléphoniques :  $f = 900 \text{ MHz}$  à  $2100 \text{ MHz}$  ;
- Ondes électromagnétiques wifi :  $f = 2,4 \text{ GHz}$  à  $5 \text{ GHz}$  ;
- Ondes électromagnétiques EDF :  $f = 50 \text{ Hz}$  ;
- Ondes optiques visibles :  $f \sim 500 \text{ THz}$ .

### Exemple : Milieu dispersif

- La propagation d'ondes élastiques transversales dans un solide lorsque la longueur d'onde est grande devant la dimension transversale du milieu :

$$v_\varphi(k) = \alpha k \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

- La propagation d'ondes à la surface de l'eau :  $v_\varphi(k) = \sqrt{\frac{g}{k}}$
- La propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu matériel (verre) :  $v_\varphi(\lambda) = \frac{c}{n(\lambda)} < c$

**Exemple : Milieu non dispersif**

- La propagation d'ondes acoustiques dans un fluide :  $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$
- La propagation des ondes élastiques longitudinales dans un solide :  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$
- La propagation des ondes électromagnétiques dans la vide :  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

**3 Phénomène d'interférences****Definition : Interférences**

Lorsque deux ondes de même nature se propagent dans une zone de l'espace, elles s'additionnent en tout point et à chaque instant. Lorsque l'onde résultante a une amplitude modulée dans l'espace. On a alors un phénomène d'interférences.

Les conditions d'interférences sont :

- Ondes de même nature ;
- Ondes harmoniques ;
- Ondes de même fréquence.

**Definition : Interférences constructives / destructives**

La superposition de deux ondes harmoniques qui interfèrent ensemble est une onde harmonique de même fréquence et d'amplitude  $A(M)$  qui dépend du point  $M$  où on observe l'onde.

On dit que les interférences sont constructives aux points  $M$  où l'amplitude de l'onde résultante est maximale.

$$A(M) = A_{\max}$$

On dit que les interférences sont destructives aux points où l'amplitude de l'onde résultante est minimale.

$$A(M) = A_{\min}$$

**Propriété : Somme de deux ondes harmoniques**

On considère deux ondes harmoniques de même fréquence qu'on note émis en  $x_1$  et  $x_2$  :

$$s_1(x, t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1(x)) \quad \text{et} \quad s_2(x, t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2(x))$$

On peut montrer que :

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi(x)) \quad \text{avec} \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1(x) - \varphi_2(x))}$$

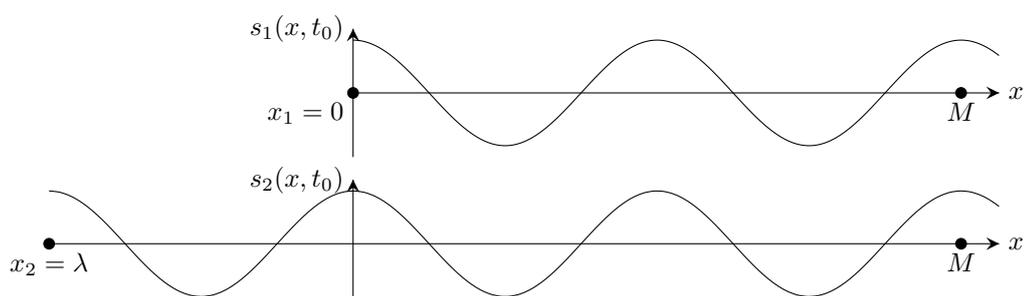
Avec  $\varphi_1(x) = -k(x - x_1)$  et  $\varphi_2(x) = -k(x - x_2)$ , on a alors :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left[\frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}\right]}$$

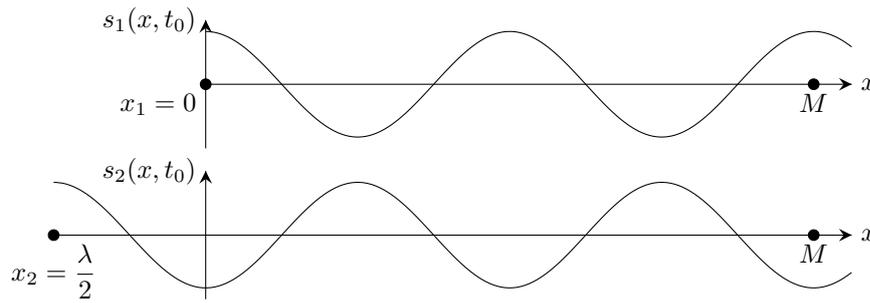
**Propriété : déphasage et interférences**

On montre alors que pour que les interférences soient :

- constructives :  $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = m \times 2\pi$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  soit  $A_{\max} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$  ;



- destructives :  $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times \lambda$  avec  $m \in \mathbb{Z}$  soit  $A_{\min} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$ .



## 4 Interférences lumineuses

### Propriété : Ondes cohérentes

Dans le domaine de l'optique on dit que deux ondes peuvent produire une figure d'interférence elles sont cohérentes. La particularité des ondes lumineuse est que les récepteurs (capteur ou œil) sont sensible à l'intensité lumineuse :

$$I(M) = K \langle s^2(M, t) \rangle = \frac{1}{2} K A^2(M)$$

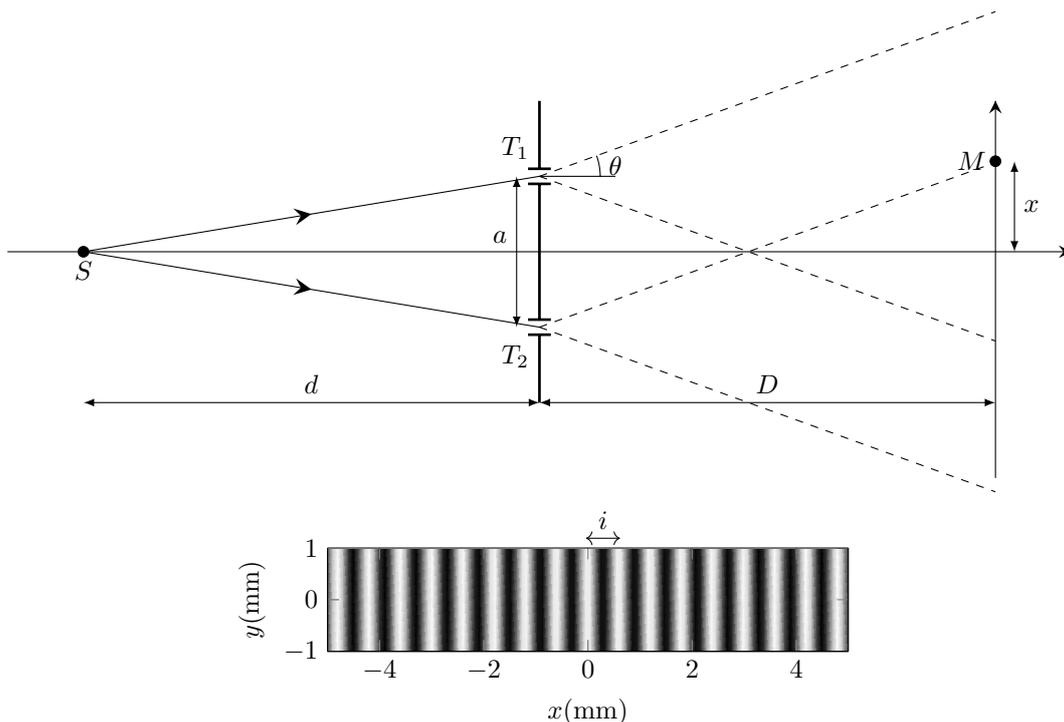
pour une onde harmonique lumineuse.

### Definition : Dispositif des trous de Young

Le dispositif de l'expérience représenté sur la figure suivante comporte :

- Une source ponctuelle  $S$  monochromatique émettant une onde de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide ;
- Un écran opaque percé de deux trous  $S_1$  et  $S_2$  identiques de diamètre très petit (de l'ordre de 0,1 nm) dont la distance  $a = S_1S_2$  est de l'ordre du millimètre ;
- Un écran de projection parallèle à  $S_1S_2$  placé à une distance  $D$  des trous ;  $D$  est de l'ordre du mètre.

La lumière émise par  $S$  arrive en un point  $M$  de l'écran en passant soit par le trou  $S_1$ , soit par le trou  $S_2$ . Ceci nécessite une déviation de la lumière au niveau de chaque trou rendue possible par le phénomène de diffraction provoqué par la très petite taille des trous. Ainsi, les trous de Young se comportent comme des sources ponctuelles appelées sources secondaires.



**Definition : Chemin optique**

On définit le chemin optique ( $OM$ ) comme la distance parcouru par une onde lumineuse dans le vide pendant la durée du trajet de l'onde a  $O$  à  $M$  dans le milieu d'indice  $n$ .

On calcule le chemin optique en multipliant la longueur parcouru par une onde depuis sa source multiplié par l'indice  $n$  du milieu traversé, soit :

$$(OM) = ct_{OM} = \frac{c}{v_\varphi} OM = nOM$$

**Propriété : Différence de marche et interférences**

On définit la différence de marche comme la différence de chemin optique entre deux ondes qui interfèrent au point  $M$ . Sur le dispositif des trous de Young, on compare un rayon provenant de la source  $S$  et passant par  $S_1$  jusqu'en  $M$  à un rayon provenant de  $S$  et passant par  $S_2$  jusqu'en  $M$  :

$$\delta(M) = (SM)_1 - (SM)_2 = [(SS_1) + (S_1M)] - [(SS_2) + (S_2M)] = (S_1M) - (S_2M)$$

On a alors la relation avec le déphasage :

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)$$

On en déduit alors les conditions d'interférence :

- constructive si  $\delta(M) = m \times \lambda_0$  ;
- destructive si  $\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times \lambda_0$ .

On retient la formule de Fresnel :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_2 I_1} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right)$$

**Exemple : Application**

Calculons la différence de marche pour le dispositif des trous de Young :

$$(S_1M) = n\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \quad \text{et} \quad (S_2M) = n\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$$

En sachant que  $D \gg x$  et  $D \gg y$  :

$$(S_1M) \simeq nD + n\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D} \quad \text{et} \quad (S_2M) \simeq nD + n\frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D}$$

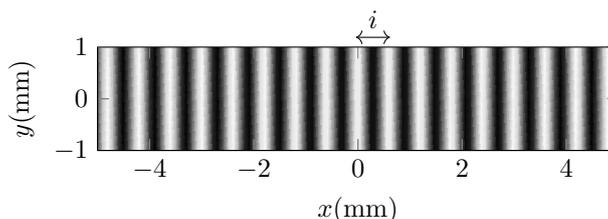
Soit  $\delta(x) \simeq \frac{nax}{D}$ .

On en déduit alors les positions  $x_m$  franges d'interférences constructives :

$$\delta(x_m) = \frac{nax_m}{D} = m \times \lambda_0 \implies x_m = \frac{m\lambda_0 D}{na}$$

On peut en déduire l'interfrange, la distance entre deux franges lumineuse de maximum d'intensité.

$$i = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda_0 D}{na}$$



## Deuxième partie

### Signaux

#### Liste des chapitres Signaux

<b>1 Lois de l'électrocinétique</b>	<b>27</b>
1 Les grandeurs électriques . . . . .	27
2 Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) : . . . . .	28
3 Dipôles linéaires : . . . . .	29
4 Associations de résistance : . . . . .	31
<b>2 Circuits linéaires du premier ordre</b>	<b>33</b>
1 Généralités : . . . . .	33
2 Réponse à un échelon du circuit $RC$ . . . . .	35
3 Régime libre d'un circuit $RC$ . . . . .	38
4 Circuit $RL$ . . . . .	39
5 Capacité numérique : Méthode d'Euler . . . . .	40
<b>3 Circuits linéaires du deuxième ordre</b>	<b>41</b>
1 Modèle de l'oscillateur harmonique électrique . . . . .	41
2 Oscillateur électrique amorti . . . . .	43
3 Régime apériodique . . . . .	44
4 Régime critique . . . . .	45
5 Régime pseudo-périodique . . . . .	46
6 Exemples et remarques . . . . .	48
<b>4 Régime des oscillations forcées</b>	<b>49</b>
1 Régime sinusoïdal forcé (RSF) . . . . .	49
2 Étude d'un circuit : . . . . .	51
3 Exemple de résonance en intensité . . . . .	52
4 Exemple de résonance en tension . . . . .	55
<b>5 Filtrage</b>	<b>57</b>
1 Description d'un filtre . . . . .	57
2 Filtres d'ordre 1 . . . . .	58
3 Filtres d'ordre 2 . . . . .	60
4 Influence du circuit . . . . .	62
5 Signaux périodiques . . . . .	63
6 Capacité numérique : Filtrage numérique d'un signal périodique . . . . .	65
<b>6 Champ magnétique et ses actions</b>	<b>67</b>
1 Champ magnétique . . . . .	67
2 Actions d'un champ magnétique . . . . .	69
<b>7 Circuit fixe dans un champ magnétique variable</b>	<b>71</b>
1 Lois de l'induction . . . . .	71
2 Auto-induction . . . . .	72
3 Induction mutuelle . . . . .	73
<b>8 Conversion électromécanique de puissance</b>	<b>75</b>
1 Rail de Laplace : Conversion mécanique-électrique . . . . .	75
2 Rotation autour d'un axe fixe d'une spire carré . . . . .	76

---

3	Conversion de puissance électrique en puissance mécanique . . . . .	77
---	---	----

## Signaux 1 : Lois de l'électrocinétique

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>1.2. Signaux électriques dans l'ARQS</b>	
Charge électrique, intensité du courant. Potentiel, référence de potentiel, tension. Puissance.	Justifier que l'utilisation de grandeurs électriques continues est compatible avec la quantification de la charge électrique. Exprimer l'intensité du courant électrique en termes de débit de charge. Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence. Relier la loi des nœuds au postulat de la conservation de la charge. Utiliser la loi des mailles. Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur. Citer les ordres de grandeur des intensités et des tensions dans différents domaines d'application.
Dipôles : résistances, condensateurs, bobines, sources décrites par un modèle linéaire.	Utiliser les relations entre l'intensité et la tension. Citer des ordres de grandeurs des composants R, L, C. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance. Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine. Modéliser une source en utilisant la représentation de Thévenin.
Association de deux résistances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente. Établir et exploiter les relations des diviseurs de tension ou de courant.
Résistance de sortie, résistance d'entrée.	<b>Évaluer une résistance d'entrée ou de sortie à l'aide d'une notice ou d'un appareil afin d'appréhender les conséquences de leurs valeurs sur le fonctionnement d'un circuit.</b> <b>Étudier l'influence des résistances d'entrée ou de sortie sur le signal délivré par un GBF, sur la mesure effectuée par un oscilloscope ou un multimètre.</b>

### Remarque : Contexte

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude de circuit électrique simple. On se restreint à des circuits de taille de l'ordre du mètre. Pour ce chapitre on se contentera uniquement d'étudier les régimes continu, c'est-à-dire que toutes les grandeurs seront constante par rapport au temps. Cependant toutes les propriétés restent valable en régime dépendant du temps.

## 1 Les grandeurs électriques

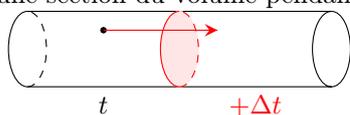
### Definition : La charge électrique

La charge électrique est une grandeur scalaire algébrique (positive ou négative) vérifiant les propriétés suivantes :

- La charge est une grandeur additive.
- La charge est une grandeur conservative.
- La charge est une grandeur quantifiée. On définit la charge élémentaire notée  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C. Une charge ne peut être qu'un multiple de  $e$  de telle sorte que :  $q = \pm Ze$ .

### Definition : L'intensité du courant électrique

On définit l'intensité du courant  $I$  dans un volume où les charges se déplacent comme le nombre de charge positive  $\Delta q$  qui traverse une section du volume pendant une durée  $\Delta t$ .



On peut alors calculer l'intensité du courant  $I$  :

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (\text{A})$$

Comme les porteurs de charges sont les électrons, le sens du courant est opposé au sens de déplacement des électrons.



**Definition : Le potentiel électrique**

Le potentiel électrique est proportionnel à l'énergie potentielle électrique du circuit et s'exprime en V. C'est lui qui met en mouvement les électrons qui sont les porteurs de charges.

On définit généralement comme potentiel nul, la masse ou la borne - d'un générateur ou d'une pile.

**Definition : La tension électrique**

On définit dans un circuit la tension comme la différence de potentiel électrique entre deux points du circuit :

$$U_{AB} = V_B - V_A \quad \text{V}$$

**Definition : Dimension d'une grandeur**

On a défini arbitrairement 7 dimensions fondamentales, à partir desquelles on peut construire toutes les autres :

- la longueur notée  $L$  ;
- le temps noté  $T$  ;
- la masse notée  $M$  ;
- l'intensité du courant électrique notée  $I$  ;
- la température notée  $\Theta$  ;
- la quantité de matière notée  $n$  ;
- l'intensité lumineuse notée  $J$ .

Pour une grandeur quelconque  $G$ , la dimension de  $G$  sera noté  $[G]$ . Si  $[G] = L$  on dira " $G$  est homogène à une longueur". Si  $G$  est sans dimension on notera alors  $[G] = 1$ .

**Remarque : Ordre de grandeurs**

Tensions :

- L'électronique signal :  $U \sim 10 \text{ V}$ .
- L'électrotechnique :  $230 \text{ V}$  ;
- Orages :  $500 \text{ MV}$  ;

Intensité du courant :

- L'électronique signal :  $I \sim 1 \text{ mA}$ .
- L'électrotechnique :  $10^2 \text{ A}$  ;
- Orages :  $10^4 \text{ A}$  ;
- Seuil de perception par le corps :  $1 \text{ mA}$

**Remarque : Notation régime continu/régime variable**

Pour une tension stationnaire (continue), on note  $U$  en majuscule. Pour une tension variable, on note  $u(t)$  en miniscule. Idem pour  $I/i(t)$ .

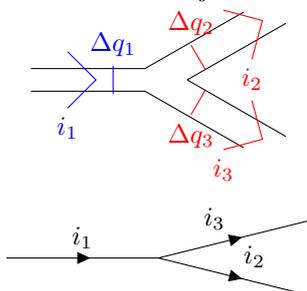
**2 Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) :****Definition : Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)**

L'ARQS consiste à négliger le délai de propagation qui est égal à environ  $\frac{L}{c}$ , où  $L$  est la longueur du fil entre l'interrupteur et la lampe et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.

On peut se placer dans ce cadre si le temps  $\Delta t$  de propagation des ondes dans le circuit est **petit** devant le temps caractéristique  $\tau$  de variation de la source :  $\Delta t = \frac{L}{c} \ll \tau$

**Loi de Kirchhoff des nœuds**

Soit un nœud défini comme la jonction entre plusieurs fil, la conservation de la charge nous permet de dire que :



La charge contenue dans le nœud entre  $t$  et  $t + \Delta t$  varie de  $\Delta q = 0$ .

Par conservation de la charge on peut également écrire :

$$\Delta q = \Delta q_1 - \Delta q_2 - \Delta q_3$$

Si on divise par  $\Delta t$  on obtient la loi des nœuds :

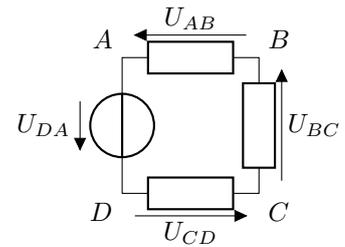
$$i_1 = i_2 + i_3$$

**Loi de Kirchhoff des mailles**

Une maille correspond à une boucle de conducteur dans un circuit.  
On considère un circuit à une seule maille :

$$V_C - V_C = V_C - V_D + V_D - V_A + V_A - V_B + V_B - V_C$$

$$0 = U_{CD} + U_{DA} + U_{AB} + U_{BC}$$

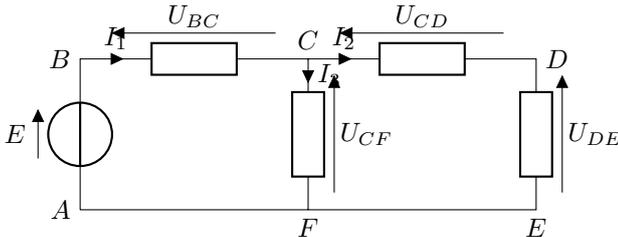


On en déduit également que  $U_{AB} = -U_{BA}$ .

La somme des tensions en convention générateur = la somme des tensions en convention récepteur.

**Exemple : Circuit à deux mailles**

Soit le circuit suivant :



On applique la loi des mailles à la maille ABCF :

$$E = U_{BC} + U_{CF}$$

On applique la loi des mailles à la maille ABDE :

$$E = U_{BC} + U_{CD} + U_{DE}$$

On peut aussi appliquer la loi des mailles à la maille CDEF :

$$U_{CF} = U_{CD} + U_{DE}$$

Pour un circuit à deux mailles on a deux équations indépendante maximum. La troisième équation peut se déduire des deux autres.

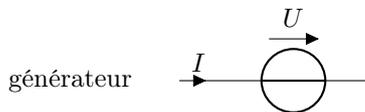
On peut également appliquer la loi des nœuds au nœud C :

$$I_1 = I_2 + I_3$$

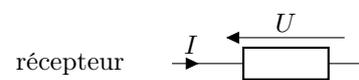
**Définition : Convention générateur/récepteur**

Il n'y a pas de sens naturel pour les tensions a priori. On définit alors les conventions suivantes :

- On définit la convention générateur lorsque le courant et la tension sont fléchés dans le même sens :



- On définit la convention récepteur quand la tension et le courant son fléchés dans des sens opposés :



**3 Dipôles linéaires :**

**Définition : Dipôle linéaire**

En électricité, un dipôle est un élément qui possède deux bornes avec une tension entre les deux bornes  $U$ . Le courant entre par une borne et sort par l'autre avec la même intensité  $I$ .

On peut pour un dipôle tracer la caractéristique statique en régime stationnaire  $I = f(U)$ . On définit un dipôle linéaire si sa caractéristique peut être modélisée par une droite affine.

**Définition : Puissance**

- En convention récepteur on calcule la puissance reçue par le dipôle :

$$P_R(t) = u(t)i(t)$$

- En convention générateur on calcule la puissance fournie par le dipôle :

$$P_G(t) = u(t)i(t)$$

**Propriété : Dimension d'une puissance et d'une tension**

On peut calculer la dimension fondamentale d'une puissance à l'aide des formules de mécanique connues en terme :

$$P = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \implies [P] = [\mathcal{E}]/T \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 \implies [E] = ML^2T^{-2} \implies [P] = ML^2T^{-3}$$

$$[U] = [P]/I = ML^2T^{-3}I^{-1}$$

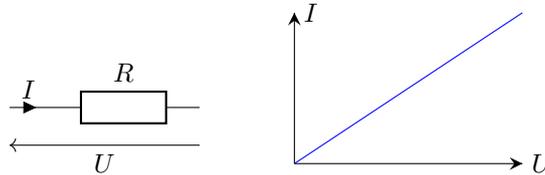
**Propriété : Le conducteur ohmique**

En convention récepteur un conducteur ohmique est caractérisé par une résistance  $R$  qui relie la tension à ses bornes  $U$  à l'intensité du courant  $I$  qui le traverse grâce à la loi d'Ohm :

$$u(t) = Ri(t)$$

La résistance  $R$  s'exprime en Ohm ( $\Omega$ ). Son inverse  $G = \frac{1}{R}$  est la conductance, elle s'exprime en Siemens (S).

On schématise une résistance de la manière suivante et on peut en tracer la caractéristique



La puissance dissipée par effet joule dans une résistance s'exprime en convention récepteur comme la puissance reçue par le dipôle :

$$P = u(t)i(t) = Ri^2(t)$$

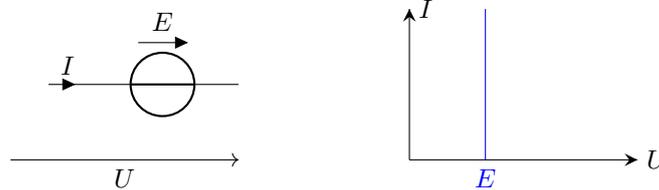
**Propriété : Dimension d'une résistance**

À l'aide de la loi d'Ohm on peut exprimer la dimension d'une résistance  $[R]$  en fonction de la dimension d'une tension  $[U]$  et de la dimension fondamentale de l'intensité du courant  $I$  :

$$[R] = [U]/I = ML^2T^{-3}I^{-2}$$

**Propriété : Générateur idéal de tension**

On définit le générateur idéal de tension de force électromotrice (f.e.m.)  $E$  comme un dipôle dont la tension vaut  $E$  et est constante quelque soit l'intensité du courant délivré. On peut le schématiser et représenter la caractéristique :



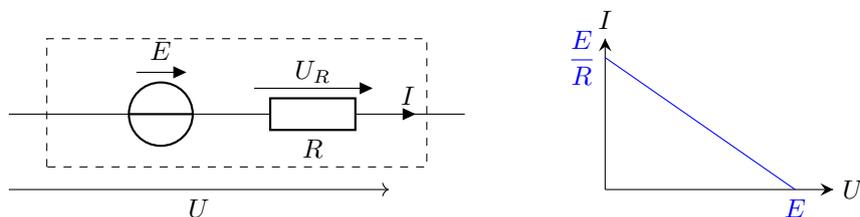
**Propriété : Générateur idéal de courant**

On définit le générateur idéal de courant par un dipôle dont l'intensité du courant  $\eta$  délivrée est constante quelque soit la tension à ses bornes. On le schématise et on donne la caractéristique :



**Propriété : Générateur de Thévenin**

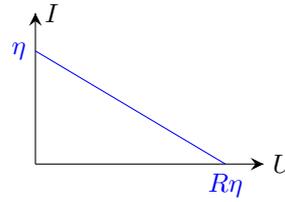
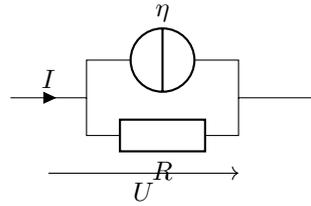
On définit le modèle du générateur de Thévenin par la mise en série d'un générateur idéal de tension de f.e.m.  $E$  et d'une résistance interne  $R$  (appelée résistance de sortie). De schéma et de caractéristique :



On obtient l'équation de la caractéristique en appliquant l'additivité des tensions (loi des mailles) :  $U = E - RI$

**Propriété : Générateur de Norton**

On définit le modèle du générateur de Norton par l'association en parrallèle d'un générateur idéal de courant caractérisé par son courant  $\eta$  et d'une résistance interne  $R$  de schéma et de caractéristique :

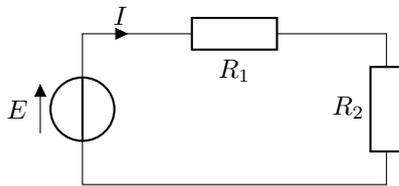


On obtient l'équation de la caractéristique en appliquant la loi des nœuds :  $I = \eta + I' = \eta - \frac{U}{R}$

**4 Associations de résistance :**

**Propriété : Résistances en série**

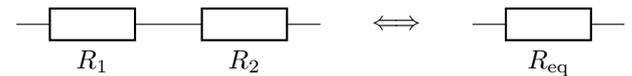
On considère le circuit suivant composé d'un générateur idéal de f.e.m.  $E$  et de 2 résistances en série



On applique la loi des mailles et la loi d'Ohm :

$$E = R_1 I + R_2 I \iff E = (R_1 + R_2) I$$

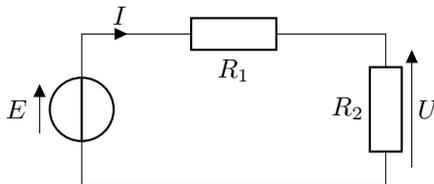
On pose alors  $R_{eq} = R_1 + R_2$  la résistance équivalente à  $R_1$  et  $R_2$  en série et on a :



On généralise l'association en série de  $N$  résistance est équivalente à une résistance de valeur :  $R_{eq} = \sum_{k=1}^N R_k$

**Pont diviseur de tension**

On considère le circuit suivant composé d'un générateur idéal de f.e.m.  $E$  et de 2 résistances en série



On applique la loi des mailles :

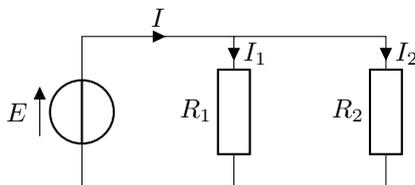
$$E = R_1 I + R_2 I \implies I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

On utilise alors la loi d'Ohm :

$$U = R_2 I \implies U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

**Propriété : Résistances en parallèle**

On considère le circuit suivant composé d'un générateur idéal de f.e.m.  $E$  et de 2 résistances en parallèle :



On applique la loi des nœuds :

$$I = I_1 + I_2 \iff I = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} \iff I = E \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

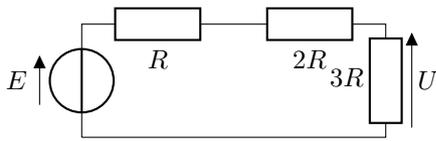
On pose alors  $R_{eq}$  la résistance équivalente à  $R_1$  et  $R_2$  en parallèle tel que :

$$E = R_{eq} I \quad \text{avec} \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



On généralise l'association en parallèle de  $N$  résistances par une résistance équivalente de valeur :  $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}$

**Exemple : Circuit à une maille**



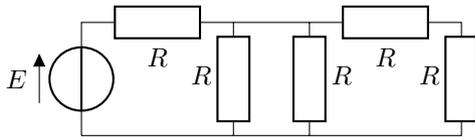
On cherche  $U$  sans forcément calculer  $I$  :

$$U = \frac{3R}{R + 2R + 3R} E$$

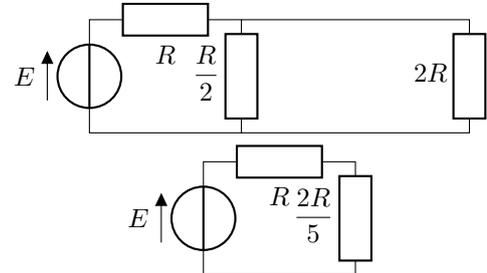
soit  $U = E/2$

**Exemple : Résistance équivalente**

Soit le circuit suivant :



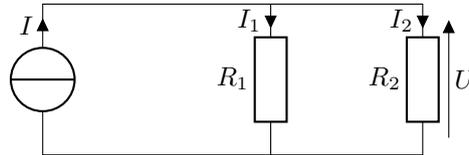
On doit alors procéder étape par étape :



Soit  $R_{eq} = 7R/5$

**Pont diviseur de courant**

On considère le circuit composé d'un générateur idéal de courant  $I$  avec deux résistances en parallèles :



On cherche  $I_2$  en fonction de  $I$ ,  $R_1$  et  $R_2$ . On applique la loi des nœuds :

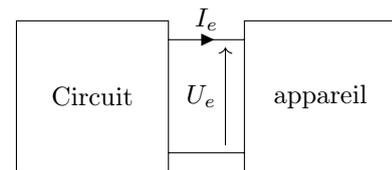
$$I = I_1 + I_2 \quad \text{or} \quad I_1 = \frac{U}{R_1} \quad \text{et} \quad U = R_2 I_2 \implies I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

**Definition : Résistance d'entrée**

Un appareil qui vient se brancher à un circuit peut perturber le circuit (changer la valeur des courants et tensions).

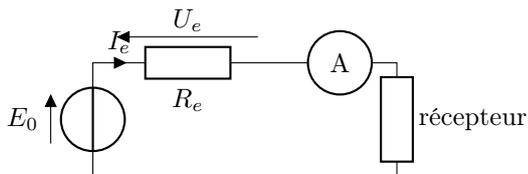
Pour prévoir cet impact on modélise une résistance d'entrée. On définit la résistance d'entrée par :

$$R_e = \frac{U_e}{I_e}$$

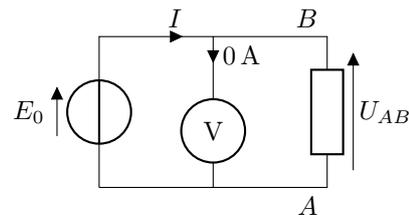


**Propriété : Multimètre non idéal**

On modélise un ampèremètre non idéal par l'association en série d'une résistance d'entrée et un ampèremètre idéal.



On modélise un voltmètre non idéal par l'association en parallèle d'une résistance d'entrée et d'un voltmètre idéal.



**Remarque : Ordre de grandeur**

- Résistance d'entrée d'un oscilloscope ou d'un multimètre en position voltmètre :  $R_e \sim 1 \text{ M}\Omega$
- Résistance d'entrée d'un multimètre en position ampèremètre :  $R_e \sim 1 \Omega$
- Résistance de sortie d'un générateur de fonction :  $R_s \sim 50 \Omega$

## Signaux 2 : Circuits linéaires du premier ordre

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>1.3. Circuit linéaire du premier ordre</b>	
Régime libre, réponse à un échelon de tension.	Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension. Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine. Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. <b>Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques.</b> Capacité numérique : mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.

**Remarque : Contexte**

Dans ce chapitre on s'intéresse aux phénomènes transitoires dans les circuits électroniques. On se contentera de l'étude de circuits simple linéaire d'ordre 1, on reste dans le cadre de l'ARQS, c'est-à-dire que ces phénomènes transitoire n'ont rien à voir avec la propagation d'ondes dans le circuit !

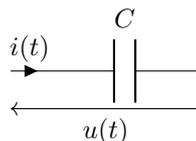
### 1 Généralités :

**Propriété : Le condensateur**

C'est un dipôle linéaire composé de deux plaques conductrices séparées par un isolant. Sous l'effet d'un champ électrique (d'une tension) les porteurs de charges (les électrons) s'accumulent sur une plaque et "chargent" le condensateur. Cette accumulation de charge fait apparaître un courant.

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

où  $C$  est la capacité du condensateur exprimée en farad (F)



$$q(t) = Cu(t)$$

où  $q$  est la charge positive stockée sur l'armature d'entrée du condensateur

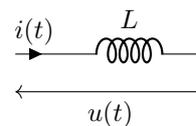
Le condensateur est capable de stocker de l'énergie puis de la fournir au circuit plus tard, l'énergie stockée dans le condensateur s'exprime :  $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}Cu^2(t)$

**Propriété : La bobine**

C'est un enroulement de fil parcouru par un courant. La tension aux bornes d'une bobine s'exprime :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

où  $L$  est l'inductance de la bobine exprimée en henry (H)



La bobine est capable de stocker de l'énergie puis de la fournir au circuit plus tard, l'énergie stockée dans la bobine s'exprime :  $\mathcal{E}_b = \frac{1}{2}Li^2(t)$

**Propriété : Dimensions d'une capacité et d'une inductance**

Soit  $i = C \frac{du}{dt}$  :  $I = [C][u]T^{-1} \implies [C] = TI/[u]$  avec  $[u] = ML^2T^{-3}I^{-1}$  on a  $[C] = I^2T^4M^{-1}L^{-2}$

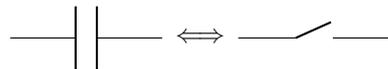
Soit  $u = L \frac{di}{dt}$  :  $[u] = [L]IT^{-1} \implies [L] = T[u]I^{-1}$  avec  $[u] = ML^2T^{-3}I^{-1}$  on a  $[L] = ML^2T^{-2}I^{-2}$

**Remarque : Ordre de grandeur**

- $C \sim 1 \text{ nF}$  à  $1000 \text{ nF}$  ;
- $L \sim 1 \text{ mF}$  à  $1000 \text{ mF}$ .

**Propriété : Comportement en régime permanent**

Lorsqu'on se place en régime permanent, toutes les grandeurs sont constantes par rapport au temps, donc :

- Pour une bobine :  $u_L(t) = 0 \quad \forall i_L$  soit : 
- Pour un condensateur :  $i_C(t) = 0 \quad \forall u_C$  soit : 

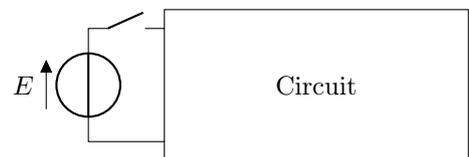
En régime permanent on peut étudier les valeurs des courant et tensions en étudiant le circuit équivalent où on remplace les condensateur par des interrupteur ouvert et les bobines par des fils.

**Definition : Réponse à un échelon de tension**

On branche en série un générateur idéal de f.e.m.  $e(t)$  indépendante du temps, un interrupteur, un résistor de résistance  $R$  et un condensateur de capacité  $C$  initialement déchargé.

À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur. De cette façon on a  $e(t)$  qui est de la forme :

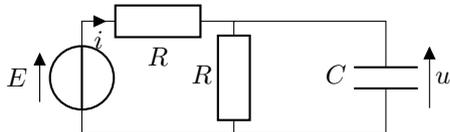
$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



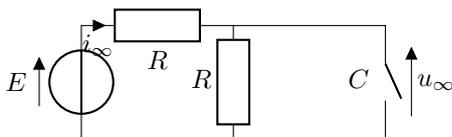
On étudie alors dans un premier temps la réponse du circuit à un échelon de tension en mesurant une tension  $u(t)$  aux bornes d'un dipôle ou le courant  $i(t)$  le traversant.

**Exemple : Régime permanent**

Soit le circuit suivant :



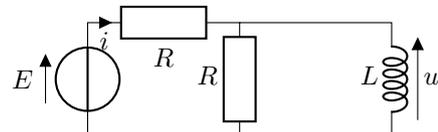
En régime permanent on a :



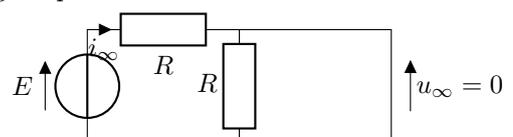
On peut alors appliquer le pont diviseur de tension car le courant est le même dans toute la maille :

$$u_\infty = \frac{ER}{2R} = \frac{E}{2} \quad i_\infty = \frac{E}{2R}$$

Soit le circuit suivant :



En régime permanent on a :



On a alors :

$$i_\infty = \frac{E}{R}$$

**Definition : Équation différentielle d'ordre 1**

Une équation différentielle d'ordre 1, est une équation qui mêle une fonction  $u(t)$  et sa dérivée temporelle  $\frac{du}{dt}$ . On retiendra la forme canonique de l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau}$$

où le terme à droite de l'égalité est appelé second membre.

La solution se met sous la forme :  $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$

- avec  $u_h(t)$  solution de l'équation différentielle homogène :

$$\frac{du_h}{dt} + \frac{u_h(t)}{\tau} = 0 \quad u_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec  $A \in \mathbb{R}$ , une constante à déterminer appelée constante d'intégration.

- où  $u_p(t)$  est appelé solution particulière de l'équation différentielle. Dans le cas particulier où le second membre est constant :

$$u_p = C^{te} \Rightarrow \cancel{\frac{du_p}{dt}} + \frac{u_p}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau} \Rightarrow u_p = u_\infty$$

### Démonstration : Solution équation différentielle d'ordre 1

On commence par démontrer la forme de la solution de l'équation homogène.

$$\begin{aligned} \frac{du_h}{dt} + \frac{u_h(t)}{\tau} = 0 &\Leftrightarrow \frac{du_h}{dt} = -\frac{u_h(t)}{\tau} \\ \frac{du_h(t)}{u_h(t)} = -\frac{dt}{\tau} &\Rightarrow \int_{u_h(t=0)}^{u_h(t)} \frac{1}{u_h} du_h = \int_0^t -\frac{1}{\tau} dt \\ \ln \frac{u_h(t)}{u_h(t=0)} = -\frac{t}{\tau} &\Rightarrow u_h(t) = u_h(t=0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{aligned}$$

On pose alors  $u_h(t=0) = A$  la constante d'intégration et on obtient la solution de l'équation homogène.

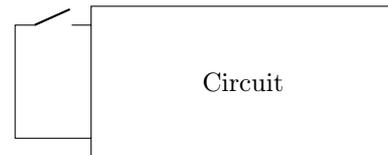
### Definition : Condition initiale

Pour obtenir la solution au problème posé on doit trouver la valeur de la constante d'intégration  $A$ . On obtient  $A$  à partir de la condition initiale :

$$u(t=0^+) = u_0 = A + u_\infty$$

### Definition : Régime libre

On parle de régime libre lors de l'étude d'un circuit où de l'énergie est stockée dans un condensateur ou une bobine et à  $t=0$  on ferme l'interrupteur. Les charges peuvent alors se déplacer dans le circuit et atteindre un nouveau régime permanent.



### Méthode : Étude d'un circuit

Lorsqu'on a un circuit la méthode de résolution complète est la suivante :

- Dessiner le circuit équivalent en régime permanent pour connaître les valeurs des tensions et courants en régime permanent.
- Utiliser la condition initiale donnée pour connaître les valeurs des tensions et courant à  $t=0^+$ .
- Appliquer loi des mailles et ou loi des nœuds pour obtenir l'équation différentielle.
- Mettre l'équation différentielle sous forme canonique et identifier  $\tau$ .
- Résoudre l'équation différentielle en écrivant  $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$ .
- Donner  $u_h(t) = Ae^{-t/\tau}$  avec  $A$  une constante d'intégration.
- Chercher une valeur de  $u_p = C^{te}$  solution de l'équation différentielle.
- Obtenir la valeur de  $A$  avec la condition initiale  $u(t=0^+) = u_0$ .

## 2 Réponse à un échelon du circuit RC

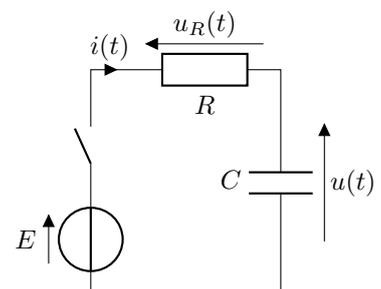
### Exemple : Réponse à un échelon de tension

On branche en série un générateur idéal de f.e.m.  $e(t)$  indépendante du temps, un interrupteur, un résistor de résistance  $R$  et un condensateur de capacité  $C$  initialement déchargé.

À l'instant  $t=0$ , on ferme l'interrupteur. De cette façon on a  $e(t)$  qui est de la forme :

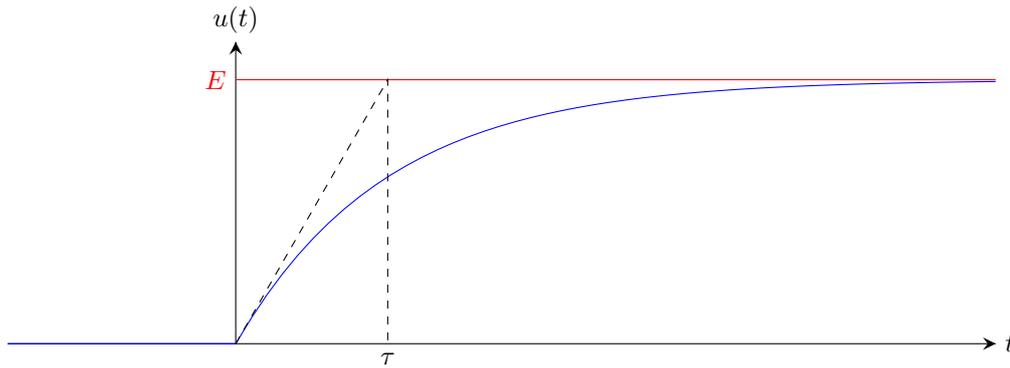
$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

On étudie alors dans un premier temps la réponse du circuit à un échelon de tension en mesurant  $u(t)$  ou  $i(t)$ .



**Remarque : Approche expérimentale**

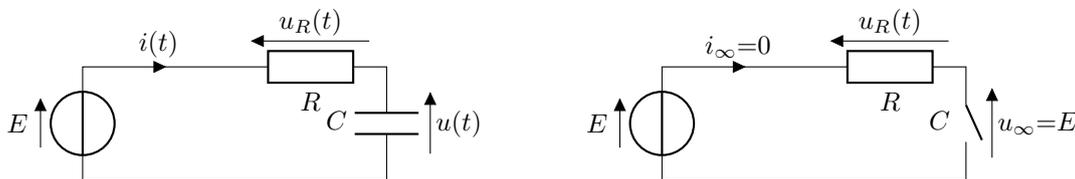
On observe expérimentalement la courbe suivante :



On observe l'évolution de  $u(t)$  pendant un certains temps. On appelle cet intervalle de temps le régime transitoire. Puis on observe l'établissement d'un régime permanent où la tension cesse d'évoluer.

**Exemple : Régime permanent**

On a le circuit équivalent en régime permanent :

**Propriété : Continuité de l'énergie stockée dans le condensateur**

L'énergie stockée dans le condensateur est continue au cours du temps.

$$E_{\text{cond}}(t = 0^-) = E_{\text{cond}}(t = 0^+)$$

Comme on a  $E_{\text{cond}} = \frac{1}{2} C u_C^2(t)$  on a alors  $u_C(t = 0^-) = u_C(t = 0^+)$

On parle de condensateur initialement déchargé lorsque son énergie stockée initiale est nulle, donc  $u_C(t = 0) = 0$ .

**Exemple : Conditions initiales**

On a appliqué la loi des mailles à  $t = 0^+$  avec  $u(t = 0^+) = 0$  :

$$E = u_R(t = 0^+) + \cancel{u(t = 0^+)} = R i(t = 0^+) \implies i(t = 0^+) = E/R$$

**Exemple : Échelon de tension d'un circuit RC série**

Pour étudier le régime transitoire on doit obtenir l'équation différentielle du circuit. On applique la loi des mailles :

$$e(t) = u_C(t) + u_R(t)$$

D'après la loi d'Ohm on a  $u_R(t) = R i(t)$ , or le courant parcourant le condensateur est également  $i(t)$  et s'exprime comme  $i(t) = C \frac{du}{dt}$ . On obtient alors :

$$e(t) = u(t) + RC \frac{du_C}{dt}(t)$$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 avec second membre. En posant  $\tau = RC$  on peut mettre l'équation sous forme canonique :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$$

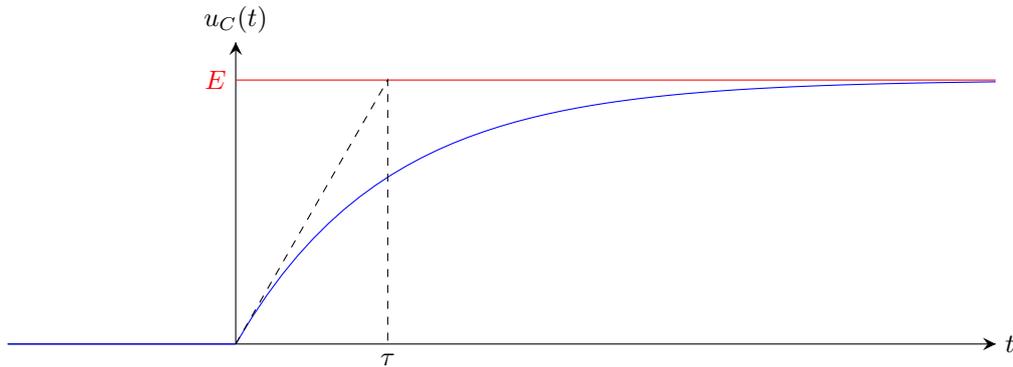
On appelle  $\frac{e(t)}{\tau}$  le second membre de l'équation différentielle.

Initialement le condensateur est déchargé, c'est-à-dire qu'aucunes charges n'est accumulée dedans, et donc son énergie stockée est nulle. On a alors :

$$u(t = 0) = 0 \implies A + E = 0 \implies A = -E$$

On obtient alors :  $u(t) = E \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$

En sachant qu'initialement on a :  $\frac{du}{dt} = \frac{E}{\tau}$  on peut tracer la courbe.



### Propriété : Temps caractéristique

Ici on a  $\tau = RC$ , essayons de voir quelle est la dimension de  $\tau$  :

$$[\tau] = [R][C] = \frac{[u]}{I} \times \frac{I}{[u]} T = T$$

$\tau$  a la dimension d'un temps, ce qui est cohérent avec la forme de l'équation différentielle et on l'appelle temps caractéristique.

### Remarque : Ordre de grandeur

Le régime transitoire a une durée d'ordre de grandeur entre  $3\tau$  et  $5\tau$ .

### Exemple : Temps de réponse à 95%

On cherche l'instant  $t_{95}$  où la variation de  $u(t)$  a atteint 95% de sa valeur finale :

$$u(t_{95}) - u(0) = 0.95(u_{\infty} - u(0)) \implies u(t_{95}) = 0.95E \implies 0.95E = E(1 - e^{-t_{95}/\tau})$$

soit  $t_{95} = \tau \ln(20) \simeq 3\tau$

### Propriété : Bilan de puissance

On multiplie la loi des mailles par  $i(t)$  pour obtenir un bilan de puissance :

$$Ei(t) = Ri^2(t) + u(t)i(t)$$

On identifie les différences puissances :

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_C$$

or pour le condensateur :

$$\mathcal{P}_C = Cu(t) \frac{du}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_C}{dt}$$

### Propriété : Bilan d'énergie lors de la charge

On fait l'intégrale du bilan de puissance entre l'instant  $t = 0$  et  $t \rightarrow +\infty$  :

$$\Delta\mathcal{E}_G = \Delta\mathcal{E}_J + \Delta\mathcal{E}_C$$

avec  $\Delta\mathcal{E}_G = EC(u_{\infty} - u(0))$

avec  $\Delta\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}C(u_{\infty}^2 - u^2(0))$

On en déduit alors  $\Delta\mathcal{E}_J = \frac{1}{2}CE^2$  l'énergie dissipée par effet joule lors de la charge complète.

**Méthode : Bilan énergétique**

- Appliquer la loi des mailles au circuit ;
- multiplier par le courant délivré par le générateur  $i(t)$  ;
- utiliser les deux propriétés du condensateur ou de la bobine :

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} \text{ ou } u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

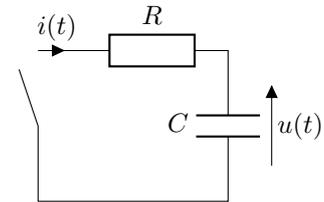
- Intégrer entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow +\infty$  ;
- Identifier l'énergie fournie par le générateur, l'énergie dissipée par effet Joule et l'énergie stockée dans le condensateur ou la bobine.

**3 Régime libre d'un circuit RC****Exemple : Régime libre**

On étudie maintenant le circuit suivant où le condensateur est initialement chargé avec une tension initiale  $u(0) = E$ . À  $t = 0$  on ferme l'interrupteur.

En régime permanent on a :  $u_\infty = 0$ .

La condition initiale nous donne rapidement :  $u(0) + Ri(0^+) = 0 \Rightarrow i(0^+) = E/R$

**Exemple : Équation différentielle en fonction du courant**

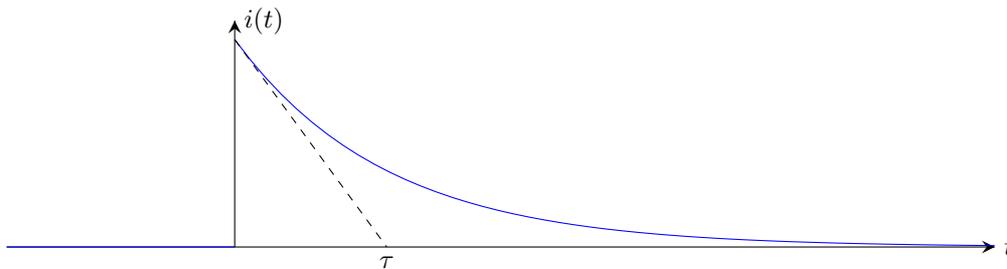
On cherche l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$ . On applique la loi des mailles puis on dérive :

$$u(t) + Ri(t) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} + R \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$$

On a alors une équation différentielle homogène de solution :  $i(t) = Ae^{-t/\tau}$

En utilisant la condition initiale on a :  $i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$

On peut alors tracer la courbe sachant que  $i(t = 0^-) = 0$  !

**Exemple : Temps de réponse à 99%**

On cherche l'instant  $t_{99}$  où la variation de  $i(t)$  à atteint 99% de sa valeur finale :

$$i(t_{99}) - i(0) = 0.99(i_\infty - i(0)) \Rightarrow i(t_{99}) = 0.01E/R \Rightarrow \frac{0.1E}{R} = \frac{E}{R} (e^{-t_{99}/\tau})$$

soit  $t_{99} = \tau \ln(100) \simeq 4,6\tau$

**Exemple : Bilan énergétique lors de la décharge**

On applique la loi des mailles au circuit et on multiplie par  $i(t)$  :

$$u(t) + Ri(t) = 0 \Rightarrow u(t)i(t) + Ri^2(t) = 0$$

On intègre entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow +\infty$  :

$$\mathcal{E}_C(+\infty) - \mathcal{E}_C(0) + \Delta\mathcal{E}_J = 0 \Rightarrow \Delta\mathcal{E}_J = \frac{1}{2}CE^2$$

## 4 Circuit $RL$

### Méthode : Obtenir l'équation différentielle du circuit

- Appliquer la loi des mailles ;
- Appliquer la loi d'Ohm ;
- Si le circuit possède une seconde maille, appliquer la loi des nœuds ;
- Appliquer la propriété de la bobine :

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

- Mettre l'équation différentielle sous forme canonique.

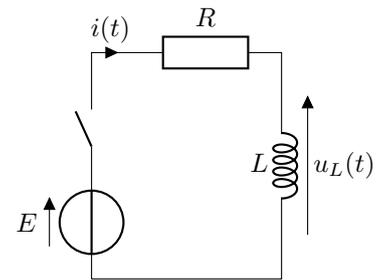
### Exemple : Échelon de tension d'un circuit $RL$ série

On branche en série un générateur idéal de f.e.m.  $e(t)$  indépendante du temps, un interrupteur, un résistor de résistance  $R$  et une bobine d'inductance  $L$  initialement déchargée.

À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur. De cette façon on a  $e(t)$  qui est de la forme :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

On étudie alors dans un premier temps la réponse du circuit à un échelon de tension.



### Exemple : Étude du régime transitoire

Pour étudier le régime transitoire on doit obtenir l'équation différentielle du circuit. On applique la loi des mailles :

$$e(t) = u_L(t) + u_R(t)$$

D'après la loi d'Ohm on a  $u_R(t) = Ri(t)$ , or la tension aux bornes d'une bobine est  $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$ , on obtient alors :

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}(t)$$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 avec second membre. En posant  $\tau = \frac{L}{R}$  on peut mettre l'équation sous forme canonique :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{R\tau}$$

La solution de cette équation différentielle d'ordre 1 est :

$$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

### Propriété : Continuité de l'énergie stockée dans la bobine

L'énergie stockée dans la bobine est continue au cours du temps.

$$E_{\text{bob}}(t = 0^-) = E_{\text{bob}}(t = 0^+)$$

Comme on a  $E_{\text{bob}} = \frac{1}{2}Li_L^2(t)$  on a alors

$$i_L(t = 0^-) = i_L(t = 0^+)$$

On parle de condensateur initialement déchargé lorsque son énergie stockée initiale est nulle, donc  $i_L(t = 0) = 0$ .

### Exemple : Utilisation de la condition initiale

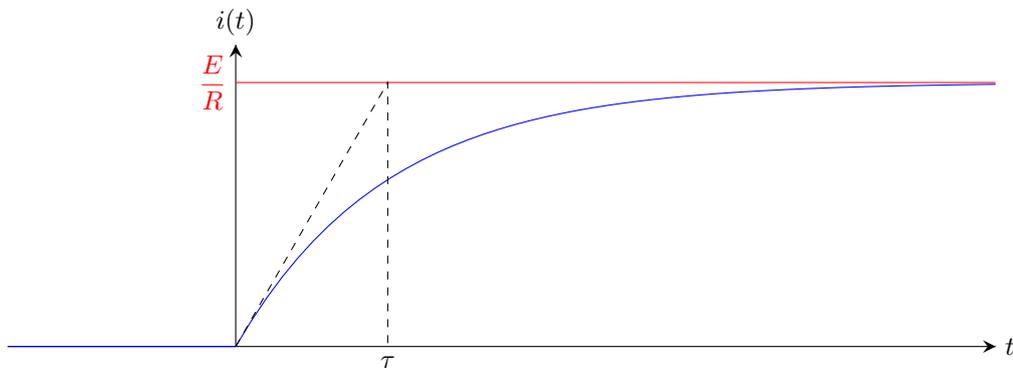
Comme l'équation différentielle est d'ordre 1, on a une seule constante d'intégration et il nous faut une condition initiale. L'énergie stockée dans la bobine est continue au cours du temps. Comme on a  $E_{\text{bob}} = \frac{1}{2}Li_L^2(t)$  on a alors continuité de  $i(t)$ . On utilise alors comme condition initiale  $i(t = 0)$ .

Initialement la bobine est déchargée, c'est-à-dire son énergie stockée est nulle. On a alors :

$$i(t=0) = 0 \implies A + \frac{E}{R} = 0 \implies A = -\frac{E}{R}$$

On obtient alors :  $i(t) = \frac{E}{R} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$

En sachant qu'initialement on a :  $\frac{di}{dt} = \frac{E}{R\tau}$  on peut tracer la courbe.



## 5 Capacité numérique : Méthode d'Euler

### Definition : Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler est une méthode itérative qui calcule numériquement une solution approchée de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dt}(t) = F(y(t), t) \quad \text{avec } t \in [t_i, t_f] \quad \text{et } y(t_i) = y_i$$

On utilise l'expression approchée de la dérivée suivante :

$$\frac{dy}{dt}(t) \simeq \frac{y(t + \delta t) - y(t)}{\delta t}$$

On peut alors construire les suites de  $N$  nombres suivantes :

- $t_k = t_0 + k \times \delta t$  avec  $k \in [0; N - 1]$  et  $\delta t = \frac{t_f - t_0}{N - 1}$
- $y_{k+1} = y_k + F(y_k, t_k) \times \delta t$  avec  $y_0 = y_i$

Les  $N$  couples de points  $(t_k, y_k)$  représentent les coordonnées des  $N$  points approchés de la courbe  $y(t)$ .

### Propriété : Capacité numérique 1

Mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide de python pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.

### Propriété : Création fonction Euler

On cherche à définir une nouvelle fonction python qui prendra en paramètre  $y_i, t_i, t_f, F$  les paramètres mathématiques et  $N$  le paramètre numérique.

```
import numpy as np
def Euler(y0,t0,tf,F,N):
    y=[]
    dt=(tf-t0)/(N-1)
    t=[t0+k*dt for k in range(N)]
    y[0]=y0
    for k in range(1,N):
        y[k]=y[k-1]+F(y[k-1],t[k-1])*dt
    return t,y
def F(y,t):
    return (e(t)-y)/Tau
```

## Signaux 3 : Circuits linéaires du deuxième ordre

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>1.4. Oscillateurs libres et forces</b>	
Oscillateur harmonique. Exemples du circuit LC et de l'oscillateur mécanique.	Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. Réaliser un bilan énergétique.
Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. <b>Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique.</b> <b>Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.</b>
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.

### Remarque : Contexte

On est toujours sur l'étude des régimes transitoires dans les circuits électroniques. On enrichit dans ce chapitre nos capacités à résoudre des systèmes en abordant l'ordre 2, c'est à dire un mélange de condensateur et de bobine dans un circuit.

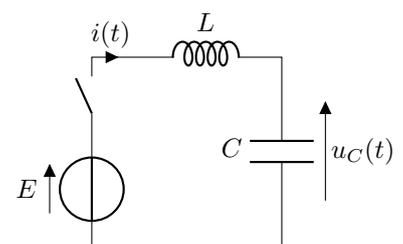
## 1 Modèle de l'oscillateur harmonique électrique

### Exemple : Description du circuit

On étudie la circuit  $LC$  série composé d'un générateur de idéal de tension de f.e.m.  $E$ , d'un interrupteur, d'un condensateur de capacité  $C$  et d'une bobine d'inductance  $L$ .

la bobine et le condensateur sont initialement déchargés, et à  $t = 0$  on ferme l'interrupteur de manière à avoir :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



### Exemple : Équation différentielle

On applique la loi des mailles on a alors :

$$e(t) = u_L(t) + u_C(t) \quad \text{or : } u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$e(t) = L \frac{di}{dt} + u_C(t) \quad \text{or : } i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

$$e(t) = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C(t)$$

Soit avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  et  $u_{Ceq} = E$  on obtient l'équation sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 u_{C\infty}$$

**Definition : Oscillateur harmonique (OH)**

On appelle oscillateur harmonique un système dont la grandeur  $u$  satisfait l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty$$

avec  $\omega_0$  la **pulsation propre du système** en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Propriété : Solution de l'équation d'un OH**

La solution de cette équation différentielle peut se mettre sous la forme suivante :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

avec  $u_h(t)$  solution de l'équation différentielle homogène :

$$\frac{d^2u_h}{dt^2} + \omega_0^2 u_h = 0$$

et  $u_p(t)$  solution particulière de l'équation différentielle.

On retiendra que :

$$u_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ , deux constantes d'intégration. Pour  $u_\infty = C^{te}$  on a  $u_p(t) = u_\infty$  :

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + u_\infty$$

**Propriété : Autre forme trigonométrique**

On utilise souvent une autre forme pour exprimer la solution :

$$u(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) + u_\infty$$

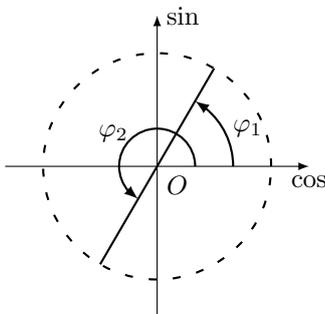
avec  $C \in \mathbb{R}^+$  appelé **amplitude de l'oscillation** et  $\varphi \in [-\pi; \pi]$  appelé **phase initiale**.

Grâce aux relations mathématiques à connaître par cœur on obtient :

$$\begin{aligned} A &= C \cos \varphi & B &= -C \sin \varphi \\ C &= \sqrt{A^2 + B^2} \\ \cos \varphi &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} & \sin \varphi &= \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

**Méthode : Calcul de  $\varphi$** 

Pour connaître  $\varphi$  à partir de  $\cos \varphi$  et  $\sin \varphi$  il est recommandé de tracer un cercle trigonométrique :



Si  $\cos(\varphi) \geq 0$  alors  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  on peut alors calculer :

$$\tan(\varphi) = \frac{-B}{A} \implies \varphi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

Si  $\cos(\varphi) \leq 0$  alors  $\varphi - \pi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  on peut alors calculer :

$$\tan(\varphi - \pi) = \frac{-B}{A} \implies \varphi = \pi - \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

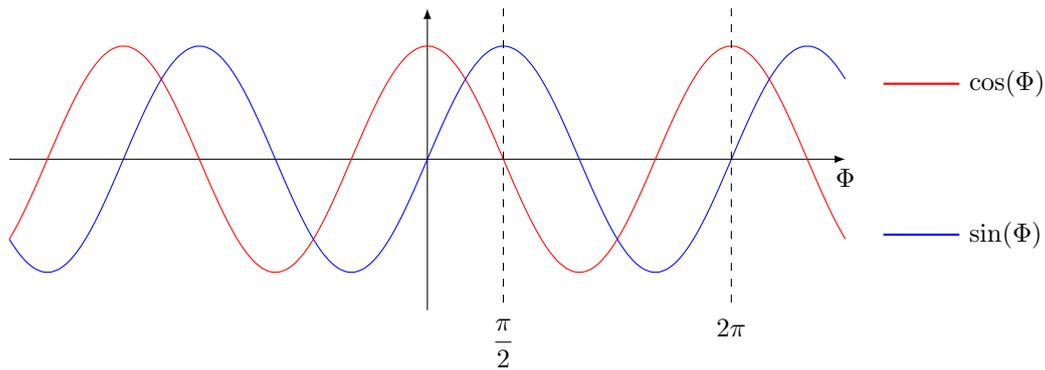
**Propriété : Rappel sur les fonctions sin et cos**

Pour les fonctions sinusoïdales on définit la phase  $\Phi$  comme l'argument de la fonction cos ou sin. L'argument d'une fonction en physique doit être sans dimension on a alors :

$$[\Phi] = 1$$

La phase s'exprime généralement en angle radian noté rad.

Si on trace les fonction  $\cos(\Phi)$  et  $\sin(\Phi)$  en fonction de  $\Phi$  on obtient :



Dans notre cas on a  $\Phi(t) = \omega_0 t - \varphi$

### Propriété : Relation pulsation, fréquence, période

La période d'un signal est la plus petite durée  $T$  non nulle de répétition d'un motif tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, s(t+T) = s(t)$$

La fréquence est définie comme l'inverse de la période, c'est un nombre de motif répété par unité de temps et s'exprime en Hertz (Hz).

La pulsation  $\omega$  correspond à une variation de phase par unité de temps. Son unité est le  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et on a les relations avec  $T$  et  $f$  :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

On a alors par analyse dimensionnelle :  $[\omega t] = [\varphi]$

### Propriété : Conditions initiales

Pour résoudre totalement l'équation différentielle, il est nécessaire de trouver les valeurs des deux constantes d'intégrations. Pour ça on utilise les deux conditions initiales :

- La tension aux bornes du condensateur est continue donc :  $u_C(t=0) = u_0$  ;
- Le courant qui traverse la bobine est continue donc :  $i_L(t=0) = i_0$ .

### Exemple : Résolution

Soit  $u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + E$ , on a utilisé comme condition initiale que  $u(t=0)$  et  $i(t=0)$  :

$$u(0) = 0 \implies A + E = 0 \implies A = -E$$

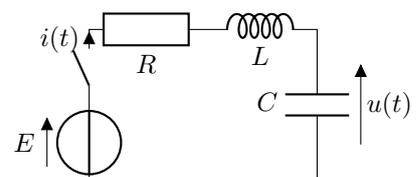
$$i(0) = 0 \implies B\omega_0 = 0 \implies B = 0$$

Soit  $u(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))$

## 2 Oscillateur électrique amorti

### Exemple : Description du circuit

On étudie la circuit  $RLC$  série composé d'un générateur de idéal de tension de f.e.m.  $E$ , d'un interrupteur, d'une résistance  $R$ , d'un condensateur de capacité  $C$  et d'une bobine d'inductance  $L$ . La bobine et le condensateur sont initialement déchargés, et à  $t = 0$  on ferme l'interrupteur.



### Exemple : Équation différentielle

On applique la loi des mailles on a alors :

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u(t) \quad \text{or : } u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + u(t) \quad \text{or : } i(t) = C \frac{du}{dt}$$

$$e(t) = RC \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2} + u(t)$$

Soit avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ ,  $u_\infty = E$  et  $\lambda = \frac{R}{2L}$  on obtient l'équation sous forme canonique :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 u_\infty$$

Il existe une deuxième forme canonique de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 u_\infty$$

Avec  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  le facteur de qualité et  $\lambda$  le coefficient d'amortissement.

### Definition : Équation différentielle d'ordre 2

On appelle équation différentielle d'ordre 2 une équation qui relie une fonction  $u(t)$ , sa dérivée temporelle  $\frac{du}{dt}$  et sa dérivée temporelle seconde  $\frac{d^2u}{dt^2}$ . On retiendra les deux formes canoniques de l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty \quad \text{ou} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + 2\omega_0 \xi \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty$$

La solution se met sous la forme :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

avec  $u_h(t)$  solution de l'équation différentielle homogène :

$$\frac{d^2u_h}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_h}{dt} + \omega_0^2 u_h = 0$$

et  $u_p(t)$  solution particulière de l'équation différentielle.

Pour  $u_\infty = C^{te}$  on a  $u_p(t) = u_\infty$ .

## 3 Régime apériodique

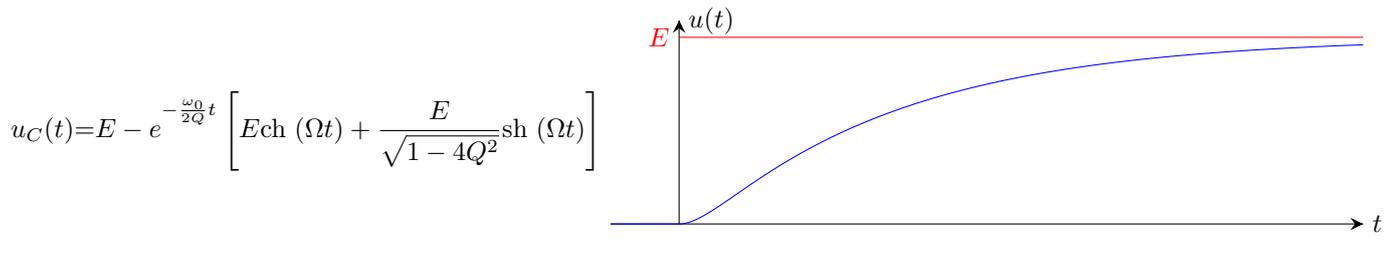
### Propriété : Régime apériodique

Dans le cas où  $Q < \frac{1}{2}$ , le régime est dit alors apériodique on a alors la solution homogène qui est :

$$u_h(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \operatorname{ch}(\Omega t) + B \operatorname{sh}(\Omega t)] \quad \text{avec} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \quad \text{et} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

### Exemple : Cas apériodique de réponse à un échelon

Si on considère le circuit  $RLC$  série avec une bobine et un condensateur initialement déchargés, on obtient la solution suivante dans le cas apériodique :



### Démonstration : Solution aperiodique

Pour trouver la solution homogène on cherche des solutions de la forme  $u(t) = A \exp(rt)$ , on doit alors résoudre l'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Pour résoudre cette équation et trouver les racines on calcule le déterminant :

$$\Delta = \left( \frac{\omega_0}{Q} \right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

Dans le cas où  $\Delta > 0$  et où  $Q < \frac{1}{2}$ , on a les racines de l'équation caractéristique :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} + \Omega$$

$$r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} - \Omega$$

On a alors la solution homogène qui est  $u_h(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A e^{\Omega t} + B e^{-\Omega t})$

On peut mettre cette solution sous une autre forme en utilisant les fonctions hyperboliques, on utilise  $e^x = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)$  :

$$u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left( \underbrace{(A+B)}_{A'} \operatorname{ch}(\Omega t) + \underbrace{(A-B)}_{B'} \operatorname{sh}(\Omega t) \right) \quad \text{avec} \quad \boxed{\Omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}}$$

### Exemple : Détermination de A et B

On considère que la bobine et le condensateur sont initialement déchargés soit  $i(0) = 0$  et  $u(0) = 0$  :

$$u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \operatorname{ch}(\Omega t) + B \operatorname{sh}(\Omega t)] + E$$

$$u(0) = 0 = A + E \implies A = -E$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q}(u(t) - E) + \Omega e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A \operatorname{sh}(\Omega t) + B \operatorname{ch}(\Omega t))$$

$$\frac{du}{dt}(0) = 0 \implies -\frac{\omega_0}{2Q}(u(0) - E) + B\Omega \implies B = -\frac{\omega_0 E}{\Omega 2Q}$$

## 4 Régime critique

### Propriété : Régime critique

Dans le cas où  $Q = \frac{1}{2}$ , le régime est dit alors critique on a alors la solution homogène qui est :

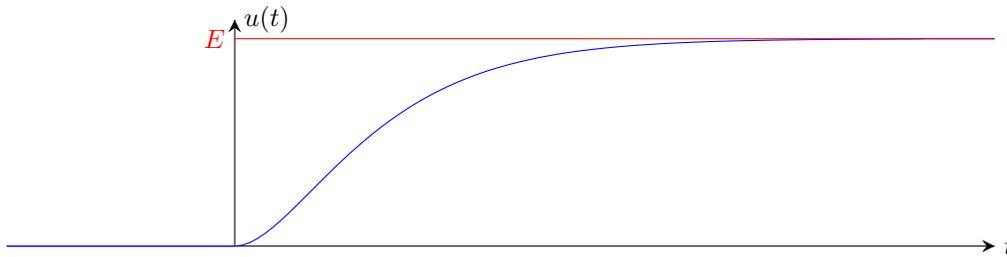
$$\boxed{u_h(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}}$$

avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exemple : Cas critique de réponse à un échelon**

Si on considère le circuit  $RLC$  série avec une bobine et un condensateur initialement déchargés, on obtient la solution suivante dans le cas critique :

$$u_C(t) = E - E \left( 1 + \frac{\omega_0 t}{2Q} \right) e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t}$$

**Démonstration : Solution critique**

Pour trouver la solution homogène on cherche des solutions de la forme  $u(t) = A \exp(rt)$ , on doit alors résoudre l'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

Pour résoudre cette équation et trouver les racines on calcule le déterminant :

$$\Delta = \left( \frac{\omega_0}{Q} \right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

Dans le cas où  $\Delta = 0$  et où  $Q = \frac{1}{2}$ , on a la racine double de l'équation caractéristiques :

$$r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q}$$

On a alors la solution homogène qui est :

$$u_h(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t}$$

**Exemple : Calcul de A et B**

Soit  $u(t) = E + (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$  avec  $u(0) = 0$  et  $i(0) = 0$  donc  $\frac{du}{dt}(0) = 0$  :

$$u(0) = 0 = E + A \implies A = -E$$

$$\frac{du}{dt} = (B - A\omega_0 - \omega_0 Bt)e^{-\omega_0 t}$$

$$\frac{du}{dt}(0) = 0 = B - A\omega_0 \implies B = -E\omega_0$$

## 5 Régime pseudo-périodique

**Propriété : Régime pseudo-périodique**

Dans le cas où  $Q > \frac{1}{2}$ , le régime est dit alors pseudo-périodique on a alors la solution homogène qui est :

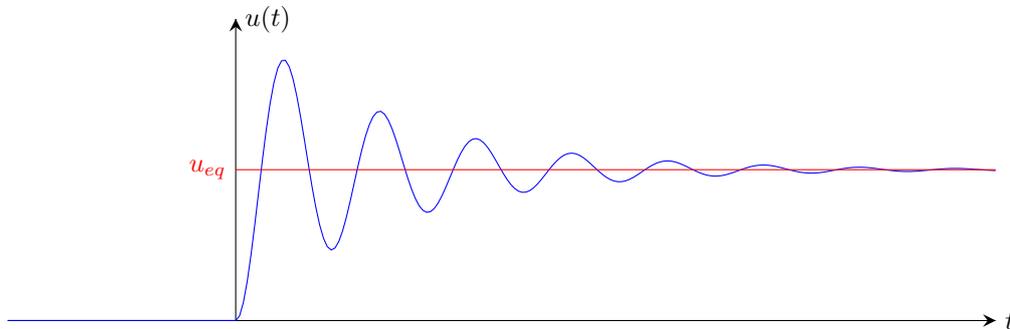
$$u_h(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

avec  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$  et  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exemple : Cas pseudo-périodique de réponse à un échelon**

Si on considère le circuit  $RLC$  série avec une bobine et un condensateur initialement déchargés, on obtient la solution suivante dans le cas pseudo-périodique :

$$u_C(t) = E - e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[ E \cos(\omega t) + \frac{E}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin(\omega t) \right]$$

**Démonstration : Solution pseudo-périodique**

Pour trouver la solution homogène on cherche des solutions de la forme  $u(t) = A \exp(rt)$ , on doit alors résoudre l'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Pour résoudre cette équation et trouver les racines on calcule le déterminant :

$$\Delta = \left( \frac{\omega_0}{Q} \right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

Dans le cas où  $\Delta < 0$  et où  $Q > \frac{1}{2}$ , on a les racines de l'équation caractéristiques :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + j\sqrt{\omega_0^2 \left( 4 - \frac{1}{Q^2} \right)}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega \\ r_2 &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - j\sqrt{\omega_0^2 \left( 4 - \frac{1}{Q^2} \right)}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega \end{aligned}$$

On a alors la solution homogène qui est :

$$u_h(t) = \underline{A}e^{r_1 t} + \underline{B}e^{r_2 t} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left( \underline{A}e^{j\omega t} + \underline{B}e^{-j\omega t} \right)$$

On peut mettre cette solution sous une autre forme en utilisant les fonctions hyperboliques, on utilise  $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$  :

$$u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left( \underbrace{(\underline{A} + \underline{B})}_{A'} \cos(\omega t) + \underbrace{j(\underline{A} - \underline{B})}_{B'} \sin(\omega t) \right)$$

On peut alors renommer les constantes  $A' = \underline{A} + \underline{B}$  et  $B' = j(\underline{A} - \underline{B})$  et alors :

$$u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t))$$

avec  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

## 6 Exemples et remarques

### Méthode : Résolution d'un circuit linéaire d'ordre 2

- Utiliser le circuit équivalent en régime permanent pour prévoir les valeurs des tensions et courant lors du régime permanent.
- Utiliser la loi des mailles et la loi des nœuds ainsi que les conditions initiales pour connaître les valeurs initiales des différentes tensions et courants.
- Appliquer la loi des mailles et la loi des nœuds pour obtenir l'équation différentielle demandée.
- Mettre l'équation différentielle sous forme canonique et identifier  $\omega_0$  et  $Q$ .
- Calculer le discriminant de l'équation caractéristique et les racines. En déduire le régime et proposer la forme de la solution homogène adéquate.

### Remarque : Durée du régime transitoire

On évalue la durée du régime transitoire grâce à l'exponentielle décroissante  $\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$ , on peut alors dire que l'ordre de grandeur du régime transitoire  $T_R$  est :

$$T_R \sim 10 \frac{Q}{\omega_0}$$

### Remarque : Analogie oscillateur électrique/mécanique

On a l'analogie entre les grandeurs suivantes :

Grandeurs électriques	$E$	$q(t)$	$L$	$C$	$R$
Grandeurs mécaniques	$F_0$	$x(t)$	$m$	$\frac{1}{k}$	$\mu$

## Signaux 4 : Régime des oscillations forcées

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>1.4. Oscillateurs libres et forces</b>	
Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale.	Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.
Impédances complexes.	Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Résonance.	Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase. <b>Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.</b>

### Remarque : Contexte

On s'intéresse dans ce chapitre au cas où le second membre d'une équation différentielle n'est pas constant. On s'intéresse ici à un cas particulier très simple et très utile en maths et en physique, l'excitation sinusoïdale.

## 1 Régime sinusoïdal forcé (RSF)

### Exemple : Excitation sinusoïdale

On étudie la circuit  $RC$  série composé d'un générateur basse fréquence de tension de f.e.m.  $e(t)$ , d'un interrupteur, d'une résistance  $R$  et d'un condensateur de capacité  $C$ .

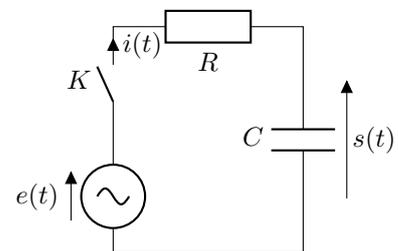
Le condensateur est initialement déchargé, et à  $t = 0$  on ferme l'interrupteur de manière à avoir :

$$e(t) = \begin{cases} E_m \cos(\omega t) & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

On applique la loi des mailles on a alors :  $e(t) = RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C(t)$  On a alors l'équation différentielle sous forme canonique suivante :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{E_m}{\tau} \cos(\omega t)$$

On a alors  $s(t) = s_h(t) + s_p(t)$  avec  $s_h(t)$  la solution homogène et  $s_p(t)$  la solution particulière.



### Exemple : Régime transitoire

On sait que  $s_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$  donc on obtient :  $s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + s_p(t)$

Or au bout d'une durée de l'ordre de  $5\tau$  On sait que  $s_h(t) \approx 0$  donc on aura :  $s(t) \approx s_p(t)$

Lors d'un régime sinusoïdal forcé, la durée de l'observation est forcément supérieure à plusieurs  $\tau$ . On cherche donc simplement à connaître la réponse en régime permanent.

### Definition : Régime sinusoïdal forcé

On appelle régime sinusoïdal forcé la réponse en régime permanent à une excitation sinusoïdale d'un système. Cette réponse correspond à la solution particulière de l'équation différentielle du système, de forme sinusoïdale et de même fréquence que l'excitation.

$$s(t) = S_m(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega))$$

Ici l'amplitude de la réponse  $S_m(\omega)$  et sont retard de phase  $\varphi(\omega)$  dépendent de la pulsation de l'excitation  $\omega$ .

### Exemple : Régime permanent

On a alors les expressions suivantes :

$$s(t) = S_m(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) \quad \frac{ds}{dt} = -\omega S_m(\omega) \sin(\omega t - \varphi(\omega))$$

et on injecte dans l'équation canonique :  $\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{E_m}{\tau} \cos(\omega t)$

$$\begin{aligned} -\omega S_m(\omega) \sin(\omega t - \varphi(\omega)) + \frac{S_m(\omega)}{\tau} \cos(\omega t - \varphi(\omega)) &= \frac{E_m}{\tau} \cos(\omega t) \\ S_m(\omega) [A(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) - B(\omega) \sin(\omega t - \varphi(\omega))] &= E_m \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Avec  $A(\omega) = 1$  et  $B(\omega) = \tau\omega$ . On sait qu'une fonction de cette forme pouvait aussi se mettre sous la forme :

$$A(\omega) \cos(\Phi(\omega)) - B(\omega) \sin(\Phi(\omega)) = C(\omega) \cos(\Phi(\omega) + \psi(\omega))$$

avec  $C(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$  et  $\psi(\omega) = \arctan(\tau\omega)$ . Ici on a  $\Phi(\omega) = \omega t - \varphi(\omega)$  :

$$\underbrace{S_m(\omega) \sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}_{=E_m} \cos(\omega t - \varphi(\omega) + \underbrace{\psi(\omega)}_{=0}) = \omega_0^2 E_m \cos(\omega t)$$

On en déduit donc :

$$S_m(\omega) = \frac{E_m}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \arctan(\tau\omega)$$

On sait résoudre ce problème, mais c'est long et assez dur.

### Definition : L'amplitude complexe

On utilise une méthode très classique en mathématiques pour résoudre des équations différentielles. Comme les équations différentielles que nous étudions sont linéaires, on définit pour une tension  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$  et un courant  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$  :

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re}(\underline{u}(t)) & \text{avec : } \underline{u}(t) &= U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{U}_m e^{j\omega t} \\ i(t) &= \operatorname{Re}(\underline{i}(t)) & \text{avec : } \underline{i}(t) &= I_m e^{j(\omega t + \psi)} = \underline{I}_m e^{j\omega t} \end{aligned}$$

avec  $U_m$  et  $I_m$  les amplitudes réelles du courant et de la tension, et  $\underline{U}_m$  et  $\underline{I}_m$  les amplitudes complexes. et on a :

$$\varphi = \arg \underline{U}_m \quad \text{et} \quad \psi = \arg \underline{I}_m$$

### Remarque : La notation complexe

En physique, on note le nombre imaginaire pure  $j$  tel que  $j^2 = -1$  pour ne pas confondre avec  $i$  l'intensité du courant.

On note les nombre complexe en souligné :  $\underline{u}$ ,  $\underline{i}$ , ...

La loi des mailles, la loi des nœuds et les ponts diviseurs de tension et de courant sont toujours valable en notation complexe.

### Propriété : Équation différentielle complexe

On utilise les définitions du courant complexe et des tensions complexes suivantes :

$$s(t) = \mathcal{R}e(\underline{s}(t)) \quad \text{avec : } \underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t - \varphi)} = \underline{S}_m e^{j\omega t}$$

De la même manière on a :  $e(t) = \mathcal{R}e(\underline{e}(t))$  avec :  $\underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$

L'équation différentielle réelle devient alors :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{E_m}{\tau} \cos(\omega t) \iff \mathcal{R}e\left(\frac{d\underline{s}}{dt} + \frac{\underline{s}}{\tau} = \frac{\underline{e}}{\tau}\right)$$

On étudie alors l'équation différentielle :  $\frac{d\underline{s}}{dt} + \frac{\underline{s}}{\tau} = \frac{\underline{e}}{\tau}$

**Propriété : Dérivation d'une grandeur complexe**

On peut alors calculer les dérivées suivantes :  $\frac{ds}{dt} = j\omega S_m e^{j(\omega t - \varphi)} = j\omega \underline{s}(t)$  On retiendra :  $\frac{d^n \underline{s}}{dt^n} = (j\omega)^n \underline{s}$

**Exemple : Résolution en complexe**

L'équation différentielle complexe peut alors se simplifier :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{e}{\tau} \iff \left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right) \underline{s} = \frac{e}{\tau} \iff \underline{s} = \frac{e}{1 + j\tau\omega}$$

On obtient alors deux égalités, l'égalité de module et l'égalité d'argument :

$$|\underline{s}| = S_m = \frac{E_m}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \text{ et } \arg \underline{s} = \omega t - \varphi = \arg e - \arg 1 + j\tau\omega \implies \varphi = \arctan(\tau\omega)$$

**Remarque : La puissance**

On définit la puissance instantanée comme :

$$P(t) = u(t)i(t) = \Re(u(t)) \times \Re(i(t)) \neq \Re(u \times i) \text{ !!!!!}$$

Il faut toujours calculer la puissance à partir des grandeurs réelles !

## 2 Étude d'un circuit :

**Definition : Impédance**

En régime permanent pour un dipôle linéaire, on peut relier la relation entre la tension complexe  $\underline{u}(t)$  à ses bornes en convention récepteur, et l'intensité complexe du courant  $\underline{i}(t)$  qui traverse le dipôle.

On définit alors  $\underline{Z}$ , l'impédance complexe du dipôle comme le rapport :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$$

L'impédance complexe peut se mettre sous forme algébrique :

$$\underline{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

La partie réelle de l'impédance complexe est appelée résistance du dipôle  $R(\omega)$ , la partie imaginaire de l'impédance complexe est appelée réactance du dipôle  $X(\omega)$ .

**Propriété : Impédances à connaître**

Pour une résistance on a :

$$u(t) = Ri(t) \\ \underline{u}(t) = R\underline{i}$$

On a alors  $\underline{Z}_R = R$ .

Pour une bobine on a :

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \\ \underline{u}_L = L \frac{d\underline{i}}{dt} \\ = jL\omega \underline{i}$$

On a alors :  $\underline{Z}_L = jL\omega$

Pour un condensateur on a :

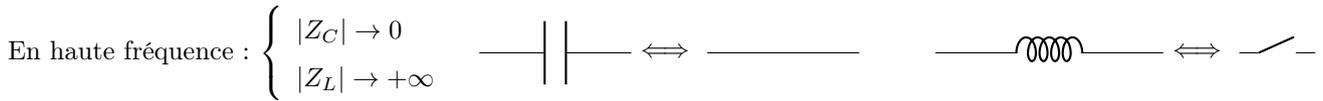
$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} \\ \underline{i}(t) = C \frac{d\underline{u}_C}{dt} \\ = jC\omega \underline{u}_C(t)$$

On a alors :  $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

**Propriété : Comportement haute fréquence/basse fréquence**

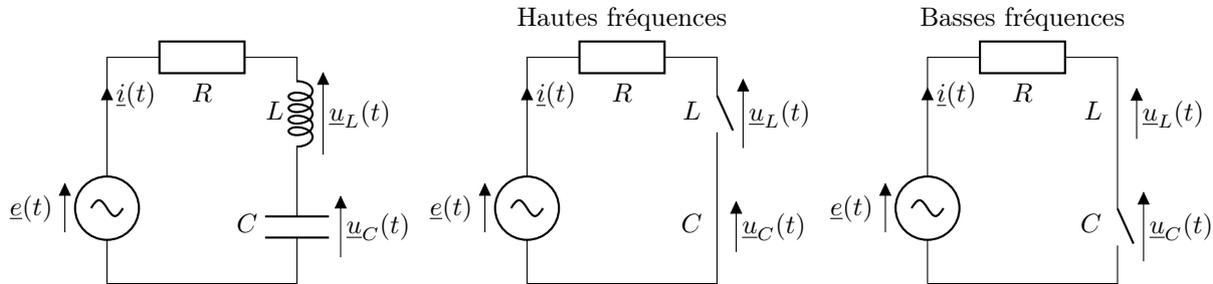
On peut faire l'approximation du comportement du condensateur dans la limite des hautes fréquences (lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ ) et des basses fréquences (lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ).

En basse fréquence :  $\begin{cases} |Z_C| \rightarrow +\infty \\ |Z_L| \rightarrow 0 \end{cases}$  



**Exemple :**

Soit un circuit *RLC* série, on donne les circuits équivalent en hautes fréquences et basses fréquences :



**Remarque : Association d'impédances**

Toutes les lois d'associations restent valable en complexe avec les impédances. On peut notamment utiliser le pont diviseur de tension sur des circuits avec bobine et condensateur. C'est le point fort de la notation complexe.

**Exemple : Circuit RC**

Soit le circuit *RC* série suivant, alimenté par un générateur basse fréquence de f.e.m :

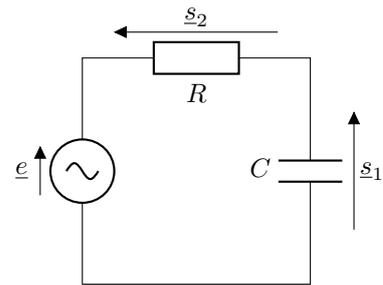
$$e(t) = E_m \cos(\omega t)$$

En notation complexe on applique le pont diviseur de tension pour obtenir directement :

$$s_1 = \frac{Z_c}{Z_c + R} e \implies s_1 = \frac{e}{1 + jRC\omega}$$

Ou bien :

$$s_2 = \frac{R}{Z_c + R} e \implies s_2 = \frac{jRC\omega e}{1 + jRC\omega}$$



### 3 Exemple de résonance en intensité

**Définition : Phénomène de résonance**

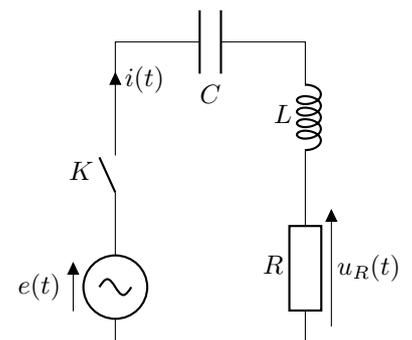
En régime sinusoïdal forcé, lorsque l'excitation sinusoïdale est d'amplitude constante, si on observe un maximum d'amplitude pour une fréquence  $f_r \neq 0$ , on appelle ce phénomène la résonance et  $f_r$  la fréquence de résonance.

**Exemple : Circuit RLC série**

On étudie un circuit *RLC* série alimenté par un GBF en régime sinusoïdale forcé de f.e.m.  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$  avec  $E_m$  fixé et on fait varier  $\omega$ .

On souhaite observer l'image de l'intensité du courant dans le circuit, on observe donc la tension  $u_R(t) = Ri(t)$ . On calcule alors :

$$\begin{aligned} u_R(t) &= \frac{R}{R + Z_L + Z_C} e = \frac{R e}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \\ &= \frac{jRC\omega e}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0} Q e}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{\omega_0} Q} \\ &= \frac{e}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$



En posant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  on obtient :  $i = \frac{u_R}{R} = \frac{e}{R} \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$

### Exemple : Recherche de la fréquence de résonance

On cherche  $x_r$  telle que la pulsation de résonance  $\omega_r = x_r \omega_0$  pour laquelle l'amplitude réelle de l'intensité du courant est maximale. L'amplitude de l'intensité du courant s'exprime :

$$I_m = |i| = \left| \frac{e}{R} \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \right| = \frac{|e|}{R} \frac{1}{\left| 1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right) \right|} = \frac{E_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

On cherche alors  $x_r = \frac{\omega_r}{\omega_0}$  tel que :  $\frac{dI_m}{dx}(x = x_r) = 0 \iff x_r = 1$

On a résonance en intensité lorsque la fréquence d'excitation est la fréquence propre du système. Soit  $\omega_r = \omega_0$ .

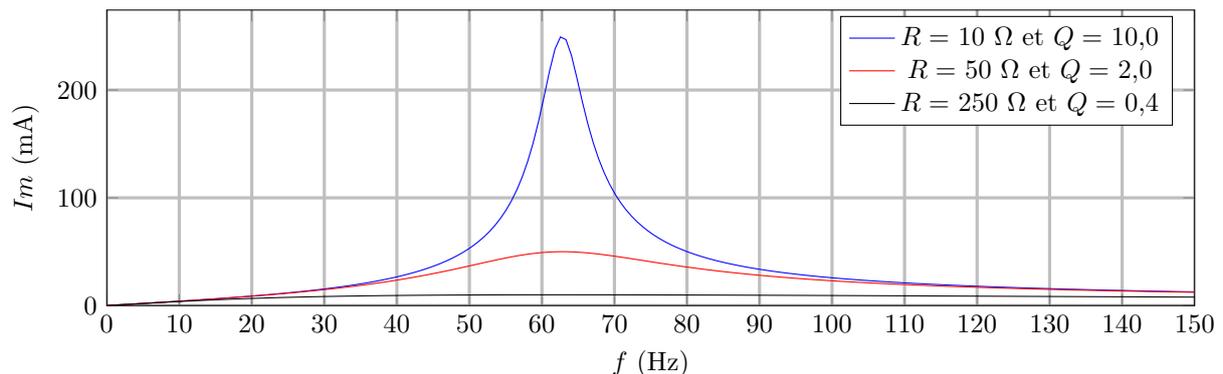
### Exemple : Amplitude de résonance

L'amplitude de résonance  $I_m(\omega_r)$  est donc :  $I_m(\omega_r) = \frac{E_m}{R}$

### Exemple : Influence de $R$

On trace la courbe de résonance en fonction de  $f$  pour différentes valeurs de  $R$  :

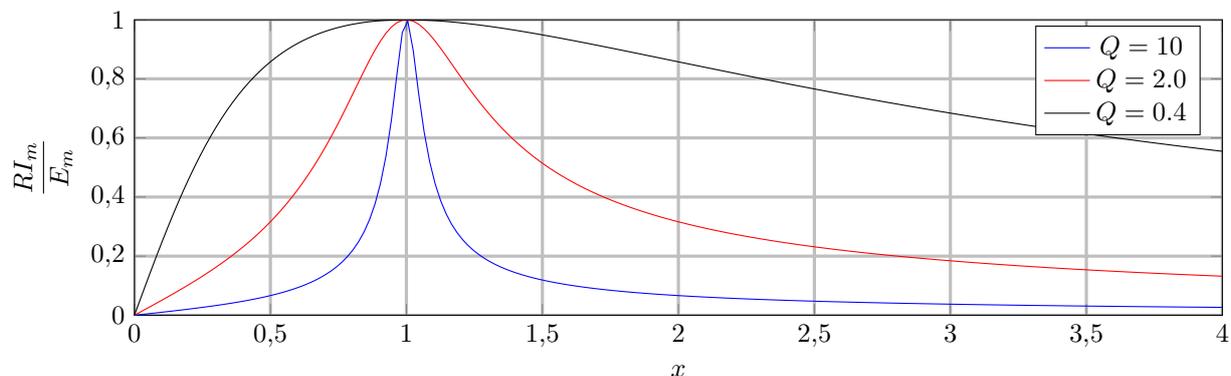
$$L = 10 \text{ mH} ; C = 1 \text{ }\mu\text{F} ; E_m = 2,5 \text{ V}$$



On constate que plus  $R$  diminue, plus  $Q$  augmente et plus l'amplitude de résonance augmente.

### Exemple : Influence de $Q$

On trace la courbe de résonance normalisée  $\frac{I_m}{\max(I_m)}$  en fonction de  $x$  pour différentes valeurs de  $Q$  :



On constate que plus  $Q$  augmente, plus la largeur du pic augmente.

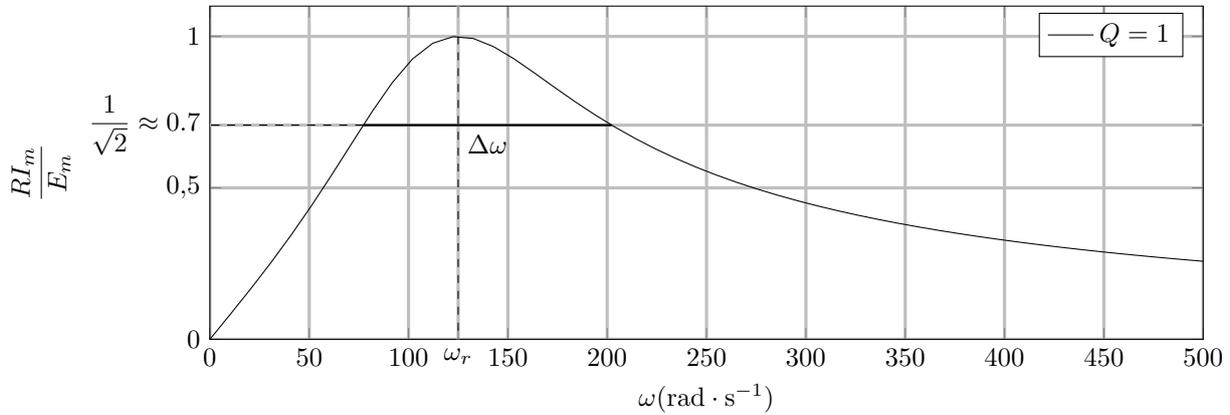
**Definition : Acuité d'une résonance**

Si on définit  $\Delta f = f_2 - f_1$  (ou  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  ou  $\Delta x = x_2 - x_1$ ) comme la plage de fréquence pour lequel l'amplitude du signal respecte :

$$I_m(\omega) \geq \frac{\max(I_m)}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{2}} \quad \text{avec} \quad I_m(\omega_{1/2}) = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}$$

On définit l'acuité d'un résonance par le rapport :

$$\frac{f_r}{\Delta f} = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{x_r}{\Delta x}$$



**Propriété : Relation acuité-facteur de qualité**

On cherche à exprimer l'acuité de la résonance en fonction de Q, pour cela on cherche  $x_1$  et  $x_2$  tel que :

$$I_m(x_{1/2}) = \frac{I_m(x_r)}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}$$

Ce qui revient à calculer :  $Q^2 \left( x_{1/2} - \frac{1}{x_{1/2}} \right)^2 = 1$

On a alors deux équations du second degré :

$$\left. \begin{aligned} Q \left( x_1 - \frac{1}{x_1} \right) = 1 &\iff x_1^2 - \frac{1}{Q}x_1 - 1 = 0 \\ Q \left( x_2 - \frac{1}{x_2} \right) = -1 &\iff x_2^2 + \frac{1}{Q}x_2 - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > \frac{1}{Q^2} > 0$$

Chaque équation possède une solution positive :  $x_1 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$        $x_2 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$

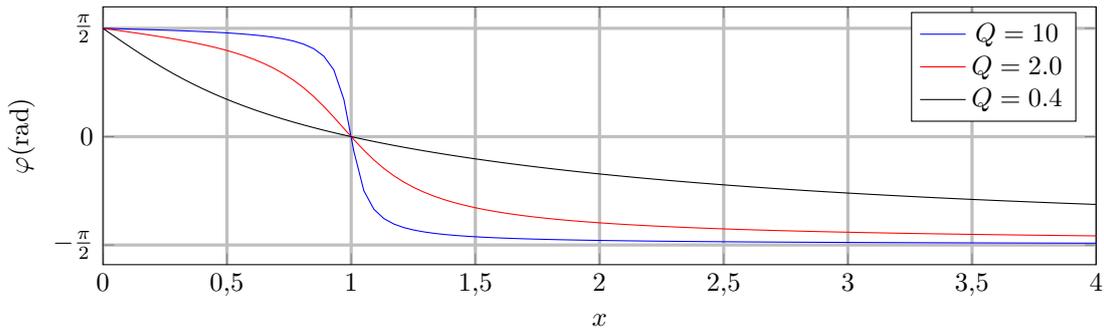
On obtient la relation :  $Q = \frac{f_r}{\Delta f} = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{x_r}{\Delta x}$

**Exemple : Déphasage**

On cherche à regarder la différence de phase entre l'intensité du courant  $i$  et la f.e.m  $e$  du générateur. Soit  $\underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$  et  $\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t - \varphi)}$  :

$$\underline{i} = \frac{u_R}{R} = \frac{\underline{e}}{R} \frac{1}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)} \iff I_m e^{-j\varphi} = \frac{E_m}{R} \frac{1}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)} \implies \varphi = \arg 1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)$$

Comme  $\Re \left( 1 + \left( x - \frac{1}{x} \right) \right) = 1 > 0$  alors on peut exprimer le déphasage :  $\varphi(x) = -\arctan \left[ Q \left( x - \frac{1}{x} \right) \right]$



On remarque également que pour  $\omega = \omega_0$  le courant est en phase avec la tension du générateur.

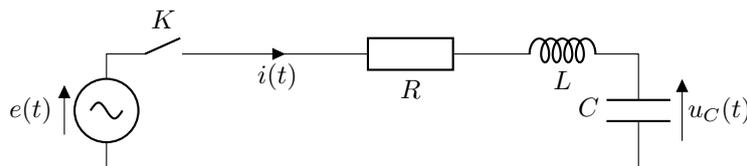
**Propriété : Déphasage et pulsation propre**

Lorsque le système oscille à  $\omega = \omega_0$  la pulsation propre du système. L'intensité du courant et la tension du générateur sont en phase  $\forall Q$ .

### 4 Exemple de résonance en tension

**Exemple : Circuit RLC série**

On étudie un circuit RLC série alimenté par un GBF en régime sinusoïdale forcé de f.e.m.  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$  avec  $E_m$  fixé et on fait varier  $\omega$ .



On cherche cette fois à mesurer la tension aux bornes du condensateur  $u_C(t)$  :

$$\underline{u}_C(t) = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} e = \frac{\frac{1}{jC\omega} e}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{e}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

En posant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  on obtient :  $\underline{u}_C = \frac{e}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$

**Exemple : Recherche de la fréquence de résonance**

On cherche la pulsation de résonance  $\omega_r$  pour laquelle l'amplitude réelle de la tension aux bornes du condensateur est maximale. L'amplitude de  $u_C$  s'exprime :

$$U_{Cm} = |\underline{u}_C| = \left| \frac{e}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} \right| = \frac{|e|}{\left| 1 - x^2 + j \frac{x}{Q} \right|} = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

On cherche alors  $x_r = \frac{\omega_r}{\omega_0}$  tel que :

$$\frac{dU_{Cm}}{dx}(x = x_r) = 0 \iff \frac{d\left((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}\right)}{dx}(x = x_r) = 0 \iff x_r = 0 \text{ ou } x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Exemple : Amplitude de résonance**

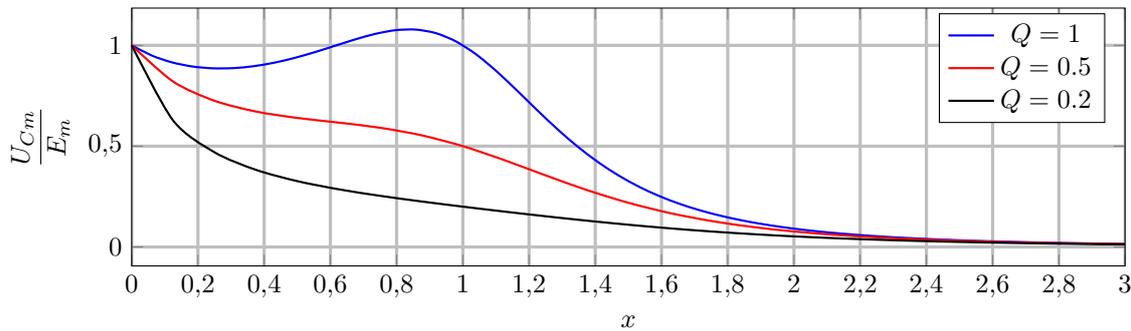
L'amplitude de résonance  $U_{Cm}(\omega_r)$  est donc :

$$U_{Cm}(\omega_r) = \frac{E_m}{\sqrt{\left(1 - 1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1 - \frac{1}{2Q^2}}{Q^2}}} = \frac{E_m}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}}} = \frac{E_m Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Dans le cas d'un système faiblement amorti où  $Q \gg 1$ , on a  $U_{Cm}(\omega_r) \approx E_m Q$

**Exemple : Influence de  $Q$**

On peut alors tracer en fonction de  $x$  pour différentes valeurs de  $Q$  la fonction  $U_{Cm}$  :



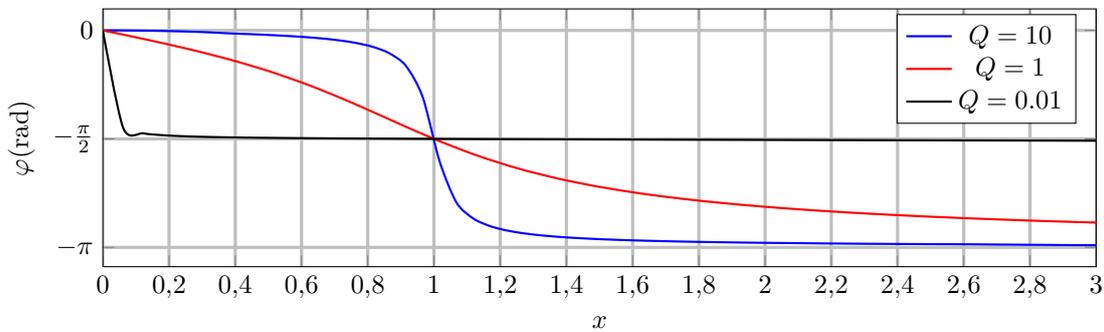
**Exemple : Déphasage**

Soit  $\underline{e}(t = E_m e^{j\omega t})$  et  $\underline{u}_C(t) = U_{Cm} e^{j(\omega t + \varphi)}$ . On peut également calculer le déphasage de l'intensité du courant par rapport à la source de tension :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{e}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \iff U_{Cm} e^{j\varphi} = \frac{E_m}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \implies \varphi = -\arg 1 - x^2 + j\frac{x}{Q}$$

Comme  $\Re e \left( 1 - x^2 + j\frac{x}{Q} \right) = 1 - x^2$  alors on peut exprimer le déphasage :

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\arctan \left( \frac{x}{Q(1 - x^2)} \right) & \text{pour } x < 1 \\ -\pi - \arctan \left( \frac{x}{Q(1 - x^2)} \right) & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$



On remarque également que pour  $\omega = \omega_0$  le courant est en phase avec la tension du générateur.

**Propriété : Déphasage et pulsation propre**

Lorsque le système oscille à  $\omega = \omega_0$  la pulsation propre du système. La tension aux bornes du condensateur et la tension du générateur sont déphasés de  $-\frac{\pi}{2} \forall Q$ .

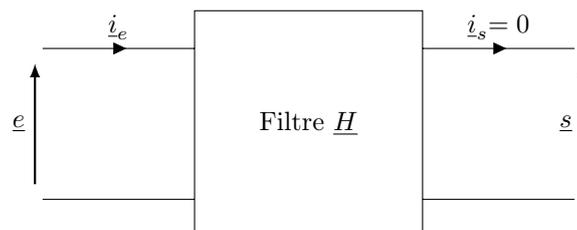
## Signaux 5 : Filtrage

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>1.5. Filtrage linéaire</b>	
Signaux périodiques.	Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales. Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal. Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1. Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert. <b>Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.</b>
Modèles de filtres passifs : passe-bas et passe-haut d'ordre 1, passe-bas et passe-bande d'ordre 2.	Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges. Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée. <b>Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.</b> <b>Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.</b> <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

## 1 Description d'un filtre

### Definition : Fonction de transfert

On considère un circuit quadripôle avec 2 bornes pour un signal d'entrée  $e(t)$  et 2 bornes pour le signal de sortie  $s(t)$ .



En RSF  $\underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$  et  $\underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ , on définit la fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$  à la pulsation  $\omega$  en circuit ouvert avec  $i_s = 0$  :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{S}{E} = \frac{S_m}{E_m} e^{j\varphi}$$

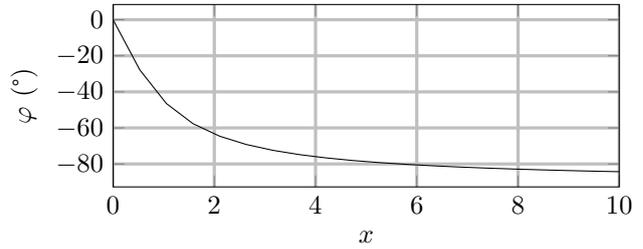
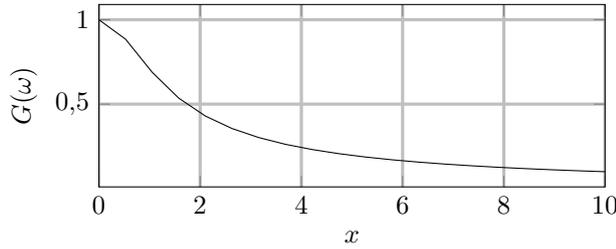
On peut alors exprimer le rapport des amplitudes réelle :  $|\underline{H}| = S_m/E_m$

et le déphasage  $\varphi = \arg(\underline{H})$

**Propriété : Représentation graphique**

On définit  $G(\omega) = |\underline{H}|$  le gain et  $\varphi = \arg \underline{H}$  la phase, dont on trace la représentation graphique en fonction de  $\omega$  :

Exemple avec  $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jx}$  avec  $x = \frac{\omega}{\omega_{ref}}$



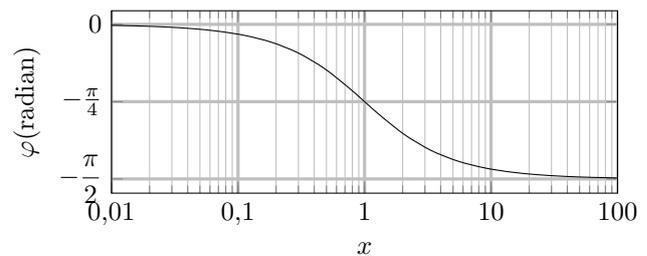
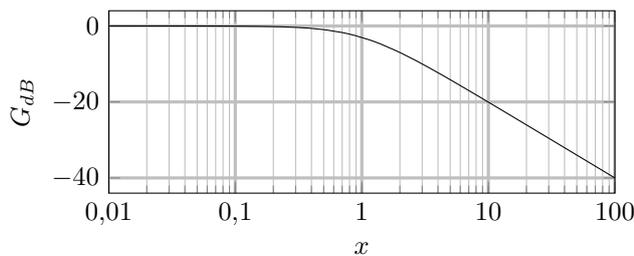
**Definition : Diagramme de Bode**

On définit le gain en décibel :

$$G_{dB} = 20 \log(G(\omega))$$

On utilise alors le diagramme de Bode pour représenter la variation de l'action d'un filtre en fonction de la fréquence. Le diagramme de Bode est composé de deux figures, on représente le  $G_{dB}$  et le déphasage  $\varphi$  en fonction de  $\omega$  en échelle logarithmique. Une échelle logarithmique est une échelle où l'augmentation d'une graduation consiste à une multiplication par 10 de l'abscisse. On a par exemple :

Exemple avec  $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jx}$  avec  $x = \frac{\omega}{\omega_{ref}}$



**Propriété : Courbes asymptotiques**

Dans une zone de fréquence où la courbe d'amplitude du diagramme de Bode est quasiment rectiligne, de pente  $p$  en dB/décade, le gain du filtre  $G(\omega)$  est quasiment proportionnel à  $\omega^{\frac{p}{20}}$ .

**Propriété : Domaine dérivateur**

Un filtre se comporte comme un dérivateur dans un domaine de pulsation sur lequel la courbe d'amplitude a une pente de +20dB/dec.

**Propriété : Domaine intégrateur**

Un filtre se comporte comme un intégrateur dans un domaine de pulsation sur lequel la courbe d'amplitude a une pente de -20dB/dec.

**Definition : Pulsation de coupure**

On définit conventionnellement la pulsation de coupure  $\omega_c$  du filtre comme :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \iff G_{dB}(\omega_c) = G_{db,max} - 3 \text{ dB}$$

## 2 Filtres d'ordre 1

**Definition : Passe-bas d'ordre 1**

La forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 1 est :  $\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\tau\omega}$

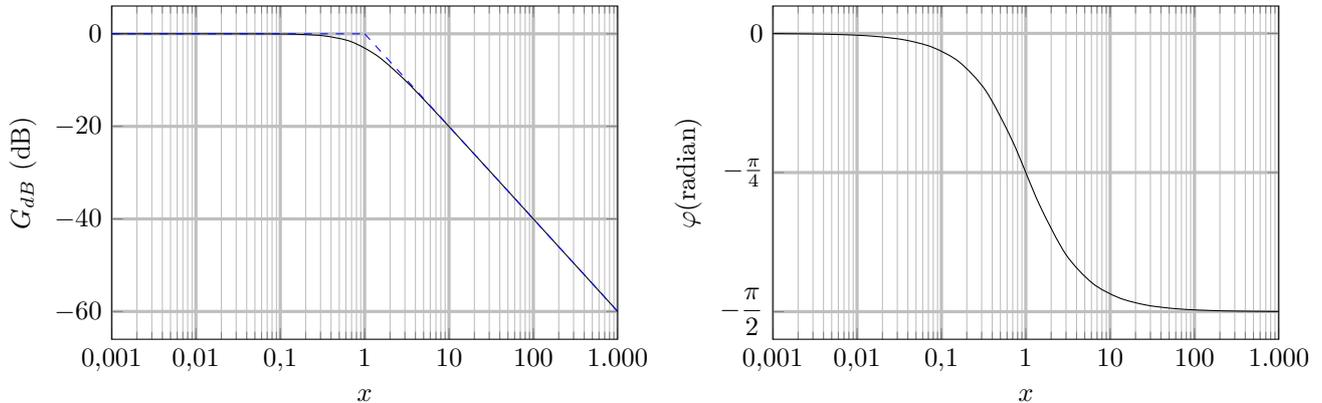
On peut alors poser  $x = \tau\omega$  et on obtient :  $\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + jx}$

**Propriété : Diagramme de Bode d'un PB d'ordre 1**

On calcule les asymptotes du diagramme de Bode du filtre :

- $x \rightarrow 0$  alors  $G_{dB} \approx 20 \log(H_0)$  et  $\varphi \approx 0$ ;
- $x \rightarrow +\infty$  alors  $G_{dB} \approx 20 \log(H_0) - 20 \log(x)$  et  $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$ .

On trace alors le diagramme de Bode et ses asymptotes :



Pour cette fonction de transfert l'amplitude du signal de sortie est du même ordre de grandeur que l'amplitude du signal d'entrée en basse fréquence. Elle est atténuée en haute fréquence. On appelle alors ce filtre un filtre passe-bas.

**Propriété : Caractère intégrateur**

Lorsque  $\omega \gg \omega_c$  on a  $|\underline{H}| \approx \left| \frac{H_0 \omega_c}{j\omega} \right|$  et  $\varphi \approx -\frac{\pi}{2} = \arg \frac{H_0 \omega_c}{j\omega}$  on peut alors faire l'approximation en haute fréquence :

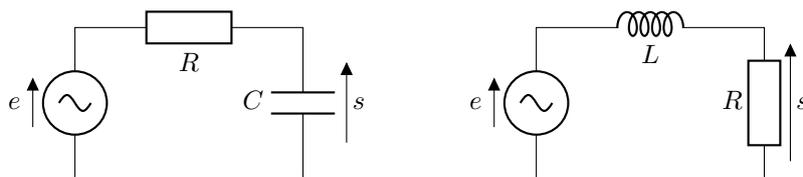
$$\underline{H} \approx \frac{\omega_c H_0}{j\omega}$$

or une fonction de transfert de la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0 \omega_c}{j\omega} = \frac{s}{e} \iff \frac{ds(t)}{dt} = H_0 \omega_c e(t)$$

On a alors le signal  $s(t)$  qui correspond au signal  $e(t)$  intégré au cours du temps. On dit que le filtre présente un caractère intégrateur en haute fréquence.

**Exemple : Circuit PB d'ordre 1**



**Définition : Passe-haut d'ordre 1**

La forme canonique d'un filtre passe-haut d'ordre 1 est :  $\underline{H}(\omega) = \frac{H_0 j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$

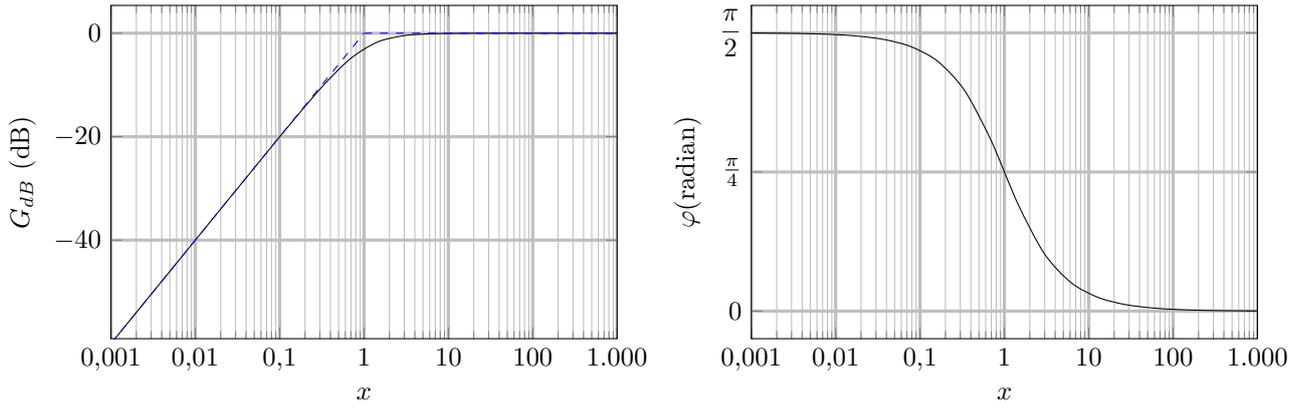
On peut alors poser  $x = \tau\omega$  et on obtient :  $\underline{H}(x) = \frac{H_0 jx}{1 + jx}$

**Propriété : Diagramme de Bode d'un PH d'ordre 1**

On calcule les asymptotes du diagramme de Bode du filtre :

- $x \rightarrow 0$  alors  $G_{dB} \approx 20 \log(H_0) + 20 \log(x)$  et  $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$ ;
- $x \rightarrow +\infty$  alors  $G_{dB} \approx 20 \log(H_0)$  et  $\varphi \approx 0$ .

On trace alors le diagramme de Bode et ses asymptotes :



Pour cette fonction de transfert l'amplitude du signal de sortie est du même ordre de grandeur que l'amplitude du signal d'entrée en haute fréquence. Elle est atténuée en basse fréquence. On appelle alors ce filtre un filtre passe-haut.

**Propriété : Caractère dérivateur**

Lorsque  $\omega \ll \omega_c$  on a  $|\underline{H}| \approx \left| H_0 j \frac{\omega}{\omega_c} \right|$  et  $\varphi \approx \frac{\pi}{2} = \arg \frac{H_0 j \omega}{\omega_c}$  on peut alors faire l'approximation en haute fréquence :

$$\underline{H} \approx \frac{j\omega H_0}{\omega_c}$$

or une fonction de transfert de la forme :

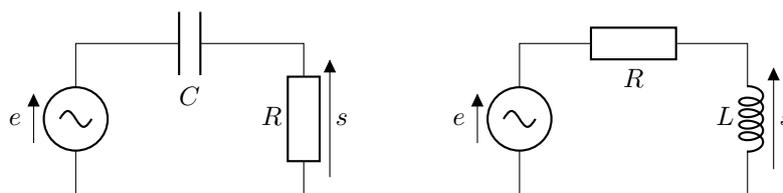
$$\underline{H} = \frac{j\omega H_0}{\omega_c} = \frac{s}{\underline{e}} \iff s(t) = \frac{H_0}{\omega_c} \frac{de}{dt}$$

On a alors le signal  $s(t)$  qui correspond au signal  $e(t)$  dérivé au cours du temps. On dit que le filtre présente un caractère dérivateur en basse fréquence.

**Propriété : Pulsation de coupure**

L'intersection des deux asymptotes se fait à  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$  pour  $x_c = 1$ . La pulsation de coupure sépare les deux régimes, le régime des basses fréquences et des hautes fréquences.

**Exemple : Circuit PH ordre 1**



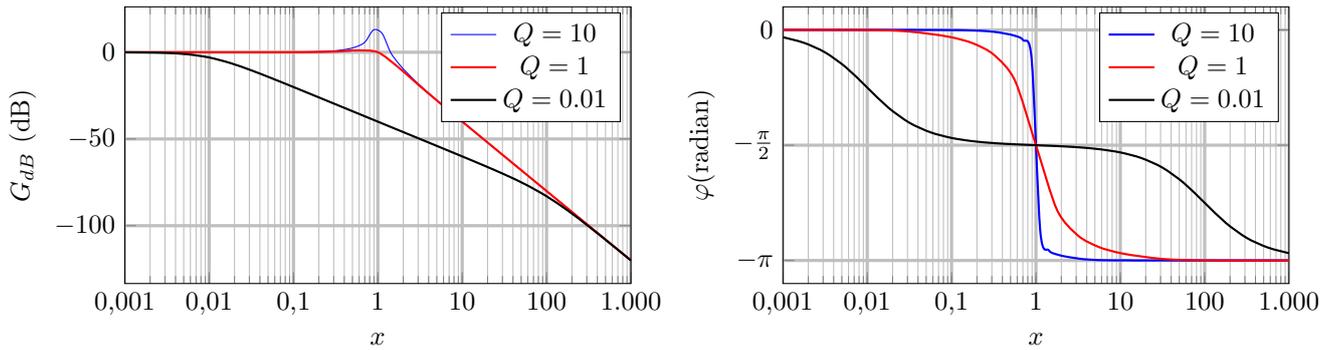
### 3 Filtres d'ordre 2

**Définition : Passe-bas d'ordre 2**

La forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 2 est :  $\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \iff \underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$

**Propriété : Diagramme de Bode d'un PB d'ordre 2**

On trace le diagramme de Bode :



On calcule les asymptotes du diagramme de Bode du filtre :

- $\omega \ll \omega_0$  : on a  $G_{dB} \approx 20 \log(H_0)$  et  $\varphi \approx 0$ ;
- $\omega_0 \ll \omega$  : on a  $G_{dB} \approx 20 \log(H_0) - 40 \log(x)$  et  $\varphi \approx -\pi$ .

**Definition : Passe-bande d'ordre 2**

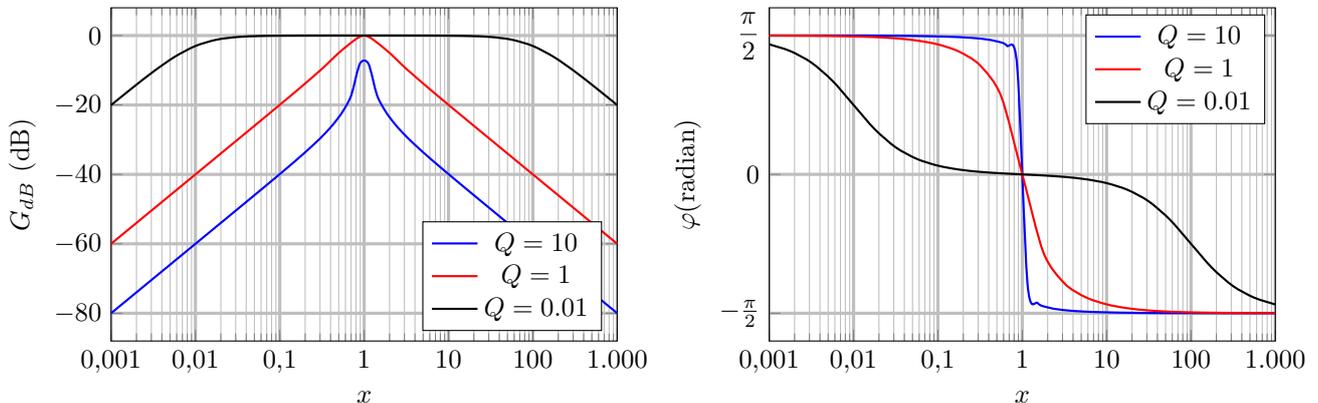
La forme canonique d'un filtre passe-bande d'ordre 2 est : 
$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

On peut alors poser  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  et on obtient : 
$$\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)}$$
 ou 
$$\underline{H}(x) = \frac{H_0 \frac{jx}{Q}}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$$

**Propriété : Diagramme de Bode d'un Passe-bande d'ordre 2**

On calcule les asymptotes du diagramme de Bode du filtre :

- $\omega \ll \omega_0$  : on a  $G_{dB} \approx 20 \log \left( \frac{H_0}{Q} \right) + 20 \log x$  et  $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$ ;
- $\omega_0 \ll \omega$  : on a  $G_{dB} \approx 20 \log \left( \frac{H_0}{Q} \right) - 20 \log x$  et  $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$ .



**Definition : Passe-haut d'ordre 2**

La forme canonique d'un filtre passe-haut d'ordre 2 est :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \times \frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}} \implies \underline{H}(jx) = \frac{-H_0 x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

**Propriété : Diagramme de Bode d'un Passe-haut d'ordre 2**

On a alors : 
$$|\underline{H}(x)| = \frac{H_0 x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

et  $\varphi = \arg \underline{H} = \arg -H_0x^2 - \arg 1 - x^2 + j\frac{x}{Q} = \pi - \arg 1 - x^2 + j\frac{x}{Q}$

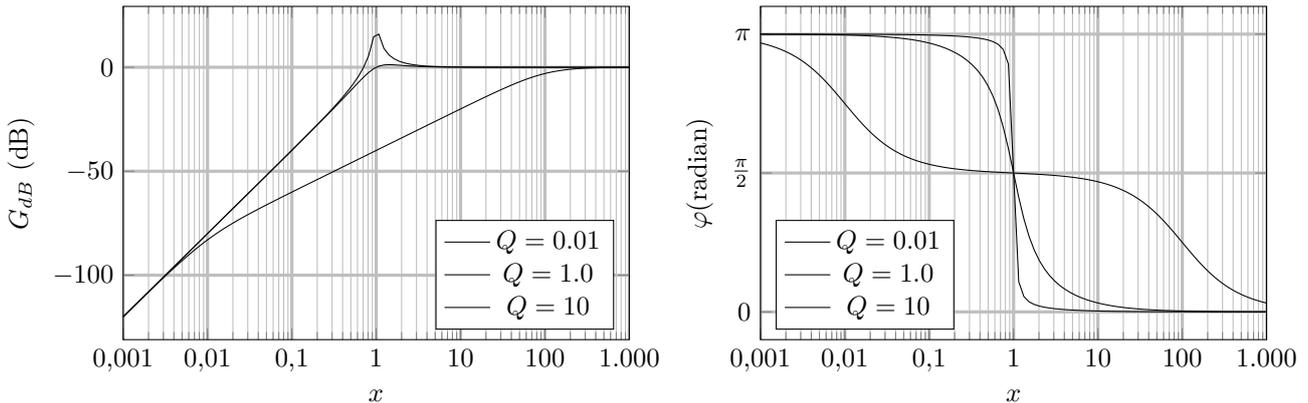
En basse fréquence  $\omega \ll \omega_0$  et  $x \ll 1$  on a :

$$|\underline{H}(x)| \approx \frac{H_0x^2}{1} \implies G_{dB} \approx 20 \log(H_0) + \underbrace{40 \log(x)}_{+40dB/dec} \text{ et } \varphi \approx \pi - 0$$

En haute fréquence  $\omega \gg \omega_0$  et  $x \gg 1$  on a :

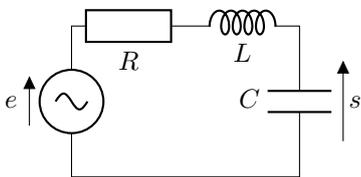
$$|\underline{H}(x)| \approx \frac{H_0x^2}{x^2} \implies G_{dB} \approx 20 \log(H_0) = C^{te} \text{ et } \varphi \approx \pi - \pi = 0$$

On obtient alors le diagramme de Bode suivant :

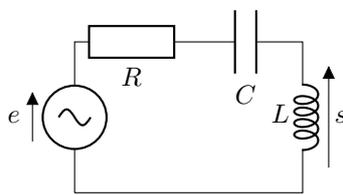


**Exemple : Circuits à connaître**

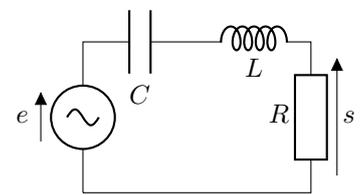
Circuit passe-bas d'ordre 2 :



Circuit passe-haut d'ordre 2 :



Circuit passe-bande d'ordre 2 :



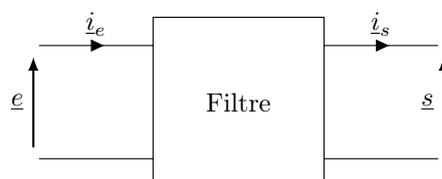
**Méthode : Étude d'un filtre**

- Utiliser les circuits équivalents en HF et BF pour prévoir la nature du filtre.
- Appliquer le pont diviseur de tension et éventuellement calculer une impédance équivalente pour obtenir la fonction de transfert.
- Mettre la fonction de transfert sous forme canonique en factorisant pour obtenir  $1 + \dots$  au dénominateur.
- Calculer la pulsation de coupure.
- Calculer les équations des asymptotes du diagramme de Bode ( $G_{dB}$  et  $\varphi$ ).
- Tracer le diagramme de Bode asymptotique, préciser les pentes des asymptotes et les valeurs à l'intersection entre les asymptotes.

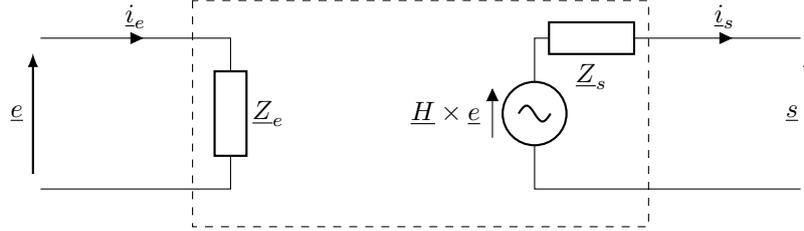
**4 Influence du circuit**

**Definition : Impédance de sortie/entrée d'un filtre**

Soit un filtre modélisé par un quadripôle :



On peut modéliser le quadripôle comme deux circuits :



On définit alors :

L'impédance d'entrée du filtre :

$$Z_e = \frac{e}{i_e}$$

La fonction de transfert du filtre à vide ( $i_s = 0$ ) :

$$H = \frac{s}{e}$$

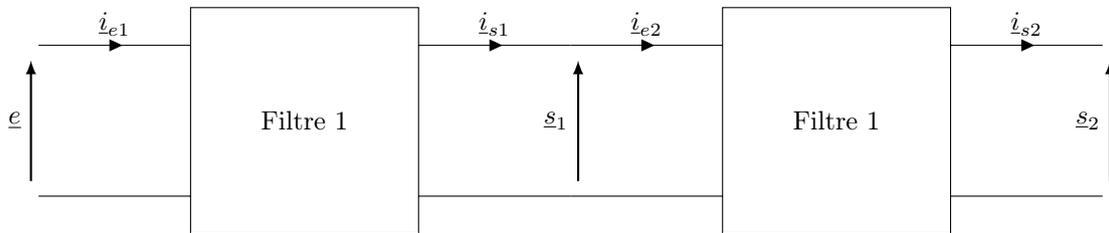
L'impédance de sortie du filtre :

$$Z_s = \frac{s - H \times e}{i_s}$$

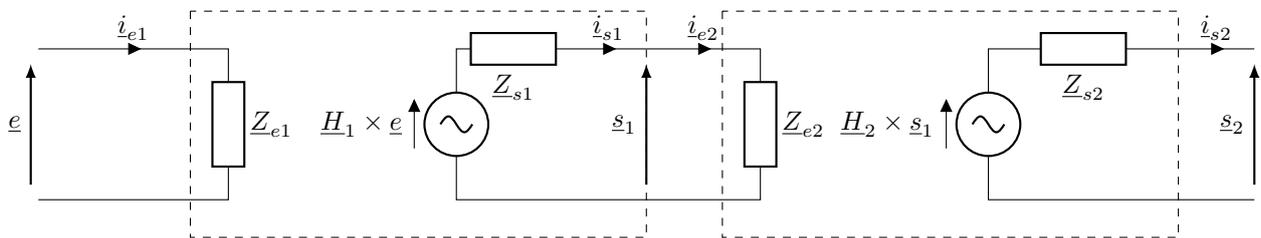
En dehors de la fonction de transfert, les expressions de  $Z_e$  et  $Z_s$  dépendent forcément des composant branché après le filtre car ils dépendent des courants.

**Propriété : Mise en cascade de filtres**

On considère la mise en cascade de deux filtres :



En définissant les fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  pour  $i_{s1} = 0$  et  $i_{s2} = 0$  on obtient la modélisation suivante :



En observant qu'on a forcément  $i_{s1} = i_{e2}$  on obtient alors rapidement :

$$s_1 = H_1 \times e - \frac{Z_{s1}}{Z_{s1} + Z_{e2}} \times H_1 \times e = H_1 \times e \times \left( \frac{1}{1 + \frac{Z_{s1}}{Z_{e2}}} \right)$$

Si  $i_{s2} = 0$ , on a également :  $s_2 = H_2 s_1$  Si  $\left| \frac{Z_{s1}}{Z_{e2}} \right| \ll 1$ . On peut alors obtenir :  $s_2 \approx H_2 \times H_1 \times e$

## 5 Signaux périodiques

**Propriété : Décomposition**

Soit un signal  $s(t)$  périodique de période  $T_S = \frac{1}{f_S}$ . Un théorème mathématique découvert par Joseph Fourier indique que :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n)$$

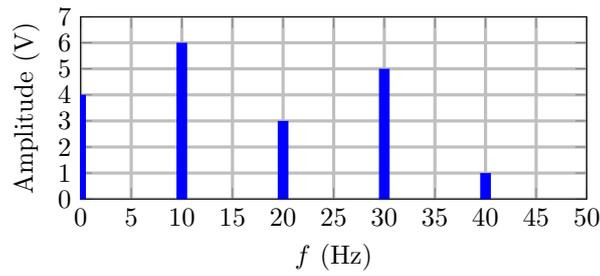
avec  $A_n$  des constantes positives et  $\varphi_n$  des constantes.

On peut donc décomposer n'importe quel signal périodique en son développement en série de Fourier.  $A_n$  et  $\varphi_n$  représentent l'amplitude et la phase initiale de la  $n^{\text{ième}}$  composante sinusoïdale du signal  $s(t)$ .

$A_0$  est la composante continue du signal, c'est aussi sa valeur moyenne. La composante pour  $n = 1$  est appelée fondamentale. Les composantes  $n > 1$  sont appelées harmoniques de rang  $n$ .

**Propriété : Spectre**

On peut caractériser un signal périodique par son spectre, la courbe des amplitudes associée à chaque fréquence :



**Definition : Valeur moyenne**

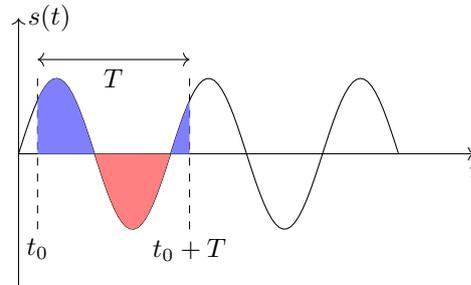
On peut calculer la valeur moyenne d'un signal périodique  $s(t)$  de période  $T$  :

$$S_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$$

**Propriété : Valeur moyenne d'un signal sinusoïdal**

Pour un signal sinusoïdal de la forme  $s(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$  on a comme valeur moyenne :

$$S_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A_1 \cos(\omega t + \varphi) dt = 0$$



**Propriété : Valeur moyenne d'un signal périodique**

Pour un signal périodique quelconque  $s(t)$  de période  $T$ , on a alors grâce à la décomposition en série de Fourier :

$$S_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) dt = A_0$$

**Definition : Valeur efficace**

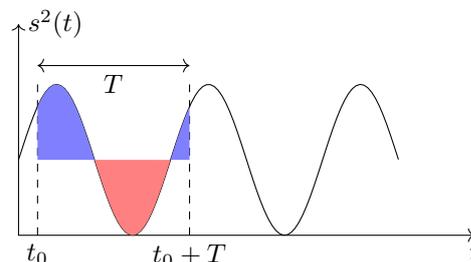
On peut calculer la valeur efficace d'un signal périodique  $s(t)$  de période  $T$  :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt}$$

**Propriété : Valeur efficace d'un signal sinusoïdal**

Pour un signal sinusoïdal de la forme  $s(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$  on a comme valeur moyenne :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A_1^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} = \frac{A_1}{\sqrt{2}}$$



**Propriété : Linéarité d'un filtre**

On définit un filtre linéaire un opérateur qui permet de sélectionner des signaux utiles, sur un critère fréquentiel. Il est composé d'un circuit électrique recevant un signal d'entrée  $e(t)$  et délivrant un signal de sortie  $s(t)$  tous deux analogiques.



On considère un filtre linéaire lorsque la relation entre le signal d'entrée  $e(t)$  et le signal de sortie  $s(t)$  est une équation différentielle linéaire de la forme :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de}{dt}$$

L'ordre de l'équation différentielle est également appelé ordre du filtre.

Le filtre étant linéaire, comme un signal d'entrée peut être décomposé suivant son spectre, on a pour :

$$e(t) = \sum_{\omega_1}^{\omega_n} E_i \cos(\omega_i t)$$

Pour chaque  $\omega_i$  on a la réponse  $s_i(t) = \mathcal{R}e(\underline{H}(\omega_i) \underline{e}_i(t)) = S_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ . On peut alors calculer :

$$s(t) = \sum_{\omega_1}^{\omega_n} \mathcal{R}e\left(\underline{H}(\omega_i) E_i e^{j\omega_i t}\right)$$

**6 Capacité numérique : Filtrage numérique d'un signal périodique****Propriété : Capacité numérique**

Simuler, à l'aide de python, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

**Définition : Spectre d'un signal périodique**

Soit un signal  $e(t)$  périodique de période  $T_S = \frac{1}{f_S}$ . Un théorème mathématique découvert par Joseph Fourier indique que :

$$e(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n)$$

avec  $C_n$  des constantes positives et  $\varphi_n$  des constantes.

On peut donc décomposer n'importe quel signal périodique en son développement en série de Fourier.  $C_n$  et  $\varphi_n$  représentent l'amplitude et la phase initiale de la  $n^{\text{ième}}$  composante sinusoïdale du signal  $s(t)$ .

**Exemple : Signal rectangulaire**

Soit un signal rectangulaire  $e(t)$  d'amplitude  $E$  et de période  $T$ , défini sur  $[0; T[$  comme :  $e(t) = \begin{cases} E & \text{pour } t \in [0; T/2[ \\ -E & \text{pour } t \in [T/2; T[ \end{cases}$

```
def Crenau(t, nmax):
    e=np.zeros(len(t))
    N=np.array([n for n in range(1,nmax,2)])
    En=np.array([4/(np.pi*n) for n in N])
    phin=np.array([3*np.pi/2 for n in N])
    for k in range(len(N)):
        n=N[k]
        e=e+En[k]*np.cos(2*np.pi*n*f1*t+phin[k])
    return e,N,En,phin
```

**Définition : Linéarité d'un filtre**

Si on considère un filtre de fonction de transfert  $\underline{H}(f)$ . Si le signal d'entrée est périodique de fréquence  $f_1$ , et de décom-

position qui donne les suites  $C_n$  et  $\varphi_n$  alors le signal de sorti sera :

$$e(t) = |H(0)| C_0 \cos(\arg \underline{H}(0)) + \sum_{n=1}^{+\infty} |H(nf_1)| C_n \cos(2\pi n f_1 t + \varphi_n - \arg \underline{H}(n f_1))$$

### Propriété : Fonction transfert

On peut écrire des fonctions pour simuler l'action d'un filtre pour chaque type de filtre :

- Filtre passe-bas d'ordre 1 :

```
def gainPB1(f,fc):
    return 1/np.sqrt(1+(f/fc)**2)
def argPB1(f,fc):
    return -np.arctan(f/fc)
```

### Propriété : Action du filtre

Pour connaître la signal de sorti, on utilise la linéarité du filtre, et en utilisant les fonctions définies ci-dessus :

```
def PB1(N,En,phin,t,f,fc):
    s=np.zeros(len(t))
    for k in range(len(N)):
        n=N[k]
        s=s+En[k]*gainPB1(n*f1,fc)*np.cos(2*np.pi*n*t+phin[k]+argPB1(n*f1,fc))
    return s
nmax=100
n=10000
f1=1
dt=2/(f1*(n-1))
t=np.array([k*dt for k in range(n)])
plt.figure()
e,N,En,phin=Crenau(t,nmax)
plt.plot(t,e)
fc=0.1*f1
s=PB1(N,En,phin,t,f1,fc)
plt.plot(t,s)
fc=1*f1
s=PB1(N,En,phin,t,f1,fc)
plt.plot(t,s)
fc=10*f1
s=PB1(N,En,phin,t,f1,fc)
plt.plot(t,s)
plt.legend(['e(t)', 's(t) pour fc=f1/10', 's(t) pour fc=f1', 's(t) pour fc=10f1'])
plt.xlabel(['t en s'])
plt.ylabel(['e et s en V'])
plt.show()
```

## Signaux 6 : Champ magnétique et ses actions

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>1.7.1. Champ magnétique</b>	
Sources de champ magnétique ; cartes de champ magnétique.	Exploiter une représentation graphique d'un champ vectoriel, identifier les zones de champ uniforme, de champ faible et l'emplacement des sources. Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, une spire circulaire et une bobine longue. Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme. Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre.
Symétries et invariances des distributions de courant.	Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.
Lien entre le champ magnétique et l'intensité du courant.	Évaluer l'ordre de grandeur d'un champ magnétique à partir d'expressions fournies.
Milieux dispersifs ou non dispersifs.	Définir un milieu dispersif. Citer des exemples de situations de propagation dispersive et non dispersive.
Moment magnétique.	Définir le moment magnétique associé à une boucle de courant plane. Associer à un aimant un moment magnétique par analogie avec une boucle de courant. Citer un ordre de grandeur du moment magnétique associé à un aimant usuel.
<b>1.7.2. Actions d'un champ magnétique</b>	
Densité linéique de la force de Laplace dans le cas d'un élément de courant filiforme.	Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme.
Résultante et puissance des forces de Laplace.  Couple et puissance des actions mécaniques de Laplace dans le cas d'une spire rectangulaire, parcourue par un courant, en rotation autour d'un axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe.	Établir et citer l'expression de la résultante des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire. Exprimer la puissance des forces de Laplace.  Établir et exploiter l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique. Exprimer la puissance des actions mécaniques de Laplace.
Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant. Positions d'équilibre et stabilité.  Effet moteur d'un champ magnétique tournant.	<b>Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour étudier l'action d'un champ magnétique uniforme sur une boussole.</b>  <b>Créer un champ magnétique tournant à l'aide de deux ou trois bobines et mettre en rotation une aiguille aimantée.</b>

## 1 Champ magnétique

### Definition : Champ magnétique

Le champ magnétique noté  $\vec{B}$  est défini par la force magnétique s'exerçant sur une particule chargée de charge  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel d'étude :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} \text{ avec } \vec{B} \text{ en T}$$

**Propriété : Source de champ magnétique**

On retiendra qu'un champ magnétique peut être produit par :

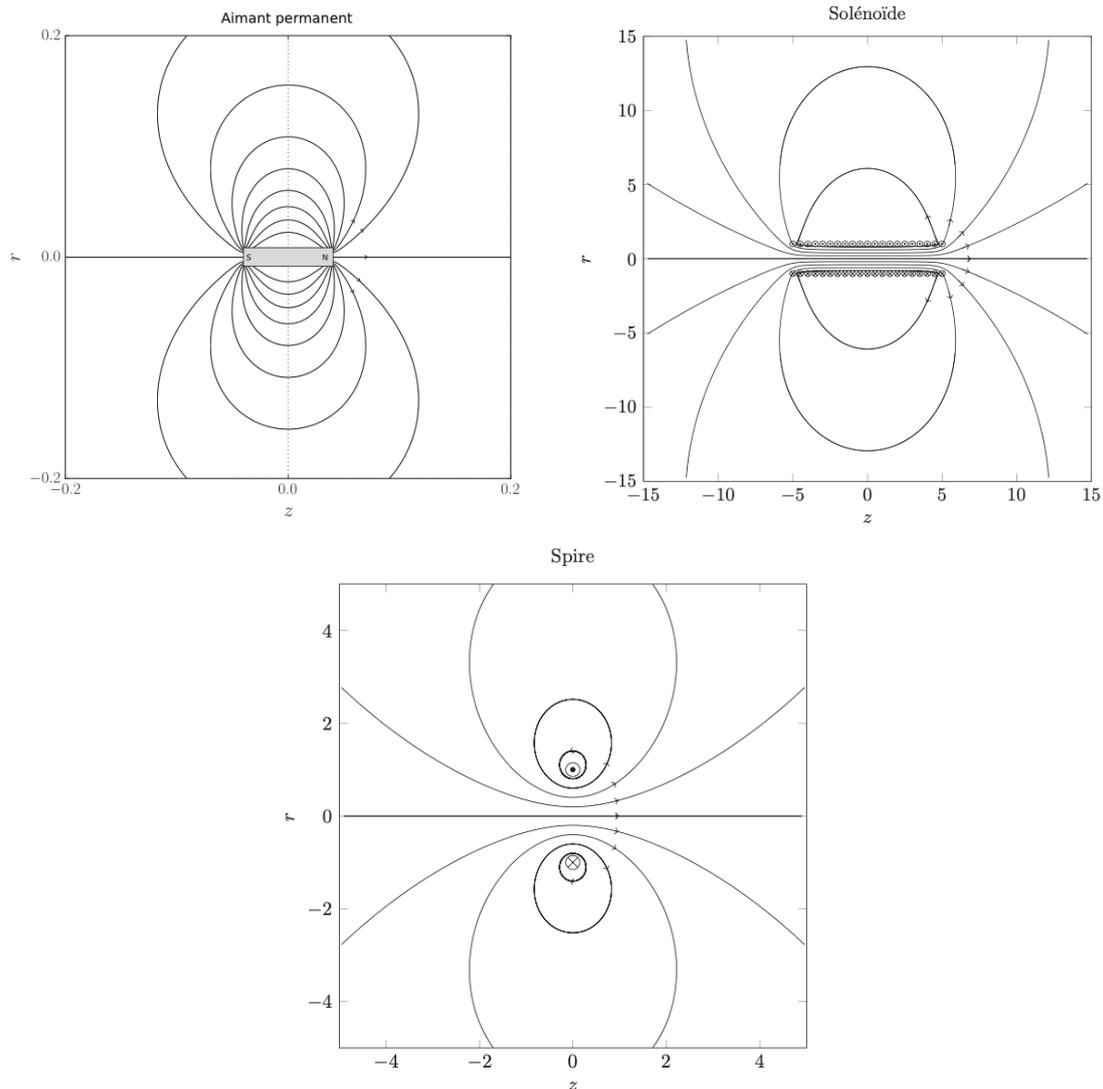
- Un aimant permanent possédant deux pôles magnétiques.
- Une boucle (circuit électrique fermé) parcouru par un courant.

**Definition : Lignes de champ**

Les lignes de champ magnétique sont tangentes en chaque point au vecteur champ magnétique en ce point et sont orientées dans le sens de ce champ.

**Definition : Carte de champ**

Une carte de champ est un ensemble de lignes de champ. On montre par exemple :

**Propriété : Lecture d'une carte de champ**

En lisant une carte de champ on obtient les informations suivantes :

- Le sens du courant : en utilisant la règle de la main droite, les lignes de champ tournent autour d'une boucle de courant.
- Le pôle nord et le pôle sud : sur un aimant permanent, les lignes partent du pôle nord pour aller vers le pôle sud.
- Les zones de champ intense/faible : plus les lignes de champs sont proches, plus le champ magnétique est intense.
- Les zones de champ uniforme : lorsque les lignes de champs sont parallèles et équitablement espacées, le champ dans la zone le champ est uniforme et de direction constante.

**Definition : Moment magnétique**

Soit un circuit filiforme plan constitué d'une boucle de courant parcourue par un courant d'intensité  $I$ . Le moment magnétique  $\vec{m}$  du circuit (en  $A \cdot m^2$ ) est défini par :

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

où  $\vec{S} = S \vec{n}$  est le vecteur surface de norme  $S$  (aire du circuit) et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire :

- orthogonal au plan contenant le circuit,
- orienté par le sens d'orientation du courant et donné par la règle de la main droite (coordonnées cylindriques avec  $\vec{u}_\theta$  tangent au courant).

Dans le cas d'un aimant permanent, comme la carte de champ magnétique ressemble à celle d'une bobine, on considère que le moment magnétique est celui d'une bobine qui produirait le même champ.

**Propriété : Symétrie des sources de champ magnétique**

Soit un point  $M$  de l'espace, on considère :

- si  $M \in \mathcal{P}$  où  $\mathcal{P}$  désigne un plan de symétrie des courants, alors le champ magnétique créé par les courants au point  $M$  est orthogonal au plan  $\mathcal{P}$ .

$$\vec{B}(M) \perp \mathcal{P}$$

- si  $M \in \mathcal{P}'$  où  $\mathcal{P}'$  désigne un plan d'antisymétrie des courants passant par  $M$  alors le champ magnétique créé par les courants au point  $M$  est contenu dans le plan  $\mathcal{P}'$ .

$$\vec{B}(M) \in \mathcal{P}'$$

**Propriété : Réalisation d'un champ magnétique uniforme**

On retiendra les dispositifs suivants pour réaliser une zone de champ quasi-uniforme :

- bobine longue (solénoïde) : zone de champ uniforme à l'intérieur de la bobine ;
- deux bobines de Helmholtz : deux bobines placées face à face, le champ entre les deux est quasi-uniforme ;
- Aimant permanent en U : zone de champ uniforme entre les deux pôles.

**Remarque : Ordre de grandeur**

On donne les ordres de grandeurs de champs magnétiques :

- Au voisinage d'un aimant : 0,01 T à 1 T
- Dans un IRM : 1 T à 10 T
- Du champ magnétique terrestre :  $5 \times 10^{-5}$  T

On donne les ordres de grandeurs de moment magnétique :

- Boussole :  $10^{-2} A \cdot m^2$
- Aimant permanent :  $1 A \cdot m^2$
- Terre :  $7,5 \times 10^{22} A \cdot m^2$

## 2 Actions d'un champ magnétique

**Definition : Force de Laplace**

On considère une portion de longueur  $dl$  de conducteur parcouru par un courant  $i(t)$ . En présence d'un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_0$  l'élément de conducteur est soumis à la force linéique de Laplace :

$$d\vec{F}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B}_0$$

où le vecteur  $d\vec{l}$  est orienté dans le sens algébrique choisi pour l'intensité du courant.

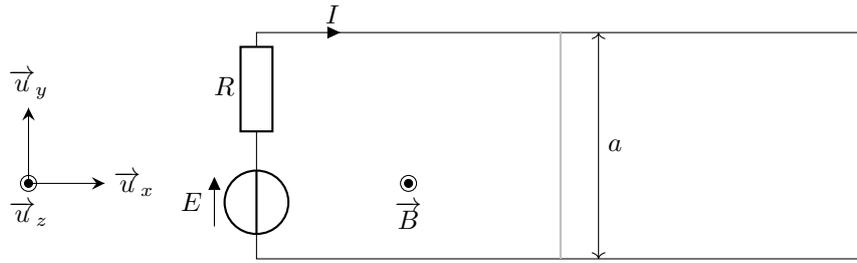
Si le champ  $\vec{B}_0$  est uniforme et le conducteur rectiligne de longueur  $L$  :

$$\vec{F} = i \vec{L} \wedge \vec{B}_0$$

où  $\vec{L}$  est orienté dans le sens algébrique du courant et de norme  $L$ .

**Propriété : Rail de Laplace**

On considère un circuit ouvert composé d'un générateur de tension idéale et d'une résistance. On ferme le circuit à l'aide d'un conducteur métallique de longueur  $a$  posé sur le circuit.



Le circuit est placé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$  avec  $B_0 > 0$ .

Le conducteur métallique est soumis à la force de Laplace :

$$\vec{F}_L = -IB_0 a \vec{u}_x$$

La force de Laplace met alors en mouvement le conducteur métallique qui se dirige vers le générateur.

La puissance fournie au conducteur métallique de vitesse  $\vec{v} = v \vec{u}_x$  vaut alors :

$$\mathcal{P} = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -IB_0 v$$

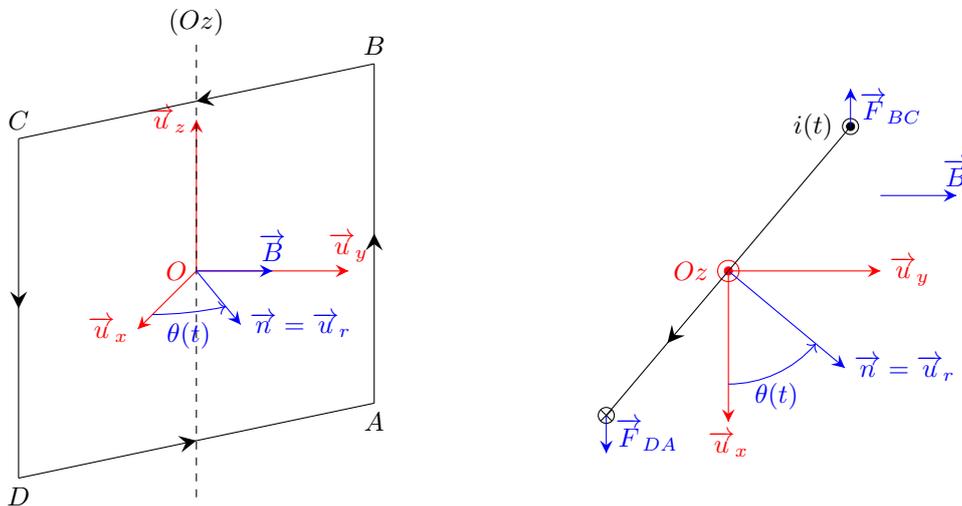
**Definition : Couple de Laplace**

Soit un circuit rectangulaire de côtés  $a$  et  $b$  fermé parcouru par un courant  $i$  et de moment magnétique  $\vec{m} = i \vec{S}$  plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , le circuit est soumis au couple de Laplace :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

**Propriété : Spire carré en rotation**

On considère une spire carrée de côté  $a$  parcourue par un courant  $i(t)$ . La spire est en liaison pivot idéale d'axe  $(Oz)$  qui passe par son centre. Elle est plongée dans un champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_y$ .



On calcule le couple de Laplace en utilisant la formule :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{m} \wedge \vec{B} = ia^2 \vec{n} \wedge (B_0 \vec{u}_y) = ia^2 B_0 \cos(\theta) \vec{u}_z$$

**Démonstration** : on calcule la force de Laplace exercée sur chaque segment puis le moment scalaire de la force par rapport à l'axe  $(Oz)$

- Segment  $AB$  :  $\vec{F}_{AB} = iaB_0 \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = -iaB_0 \vec{u}_x$  soit  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{AB}) = +\frac{a}{2} \cos(\theta) iaB_0$
- Segment  $BC$  :  $\vec{F}_{BC} = iB_0 \vec{BC} \wedge \vec{u}_y = +iaB_0 \sin(\theta) \vec{u}_z$  soit  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{BC}) = 0$
- Segment  $CD$  :  $\vec{F}_{CD} = -iaB_0 \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = +iaB_0 \vec{u}_x$  soit  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{CD}) = +\frac{a}{2} \cos(\theta) iaB_0$
- Segment  $DA$  : idem qu'en  $BC$  soit  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{DA}) = 0$

On obtient à la fin le même résultat que précédemment.

## Signaux 7 : Circuit fixe dans un champ magnétique variable

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>1.7.3. Lois de l'induction</b>	
<b>Flux d'un champ magnétique</b> Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté.	Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
<b>Loi de Faraday</b> Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit.	<b>Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.</b>
Loi de modération de Lenz.	Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
Force électromotrice induite, loi de Faraday.	Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation.
<b>1.7.4. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps</b>	
<b>Auto-induction</b> Flux propre et inductance propre.	Différencier le flux propre des flux extérieurs. Utiliser la loi de modération de Lenz. Évaluer et citer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur. <b>Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.</b>
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.
<b>Cas de deux bobines en interaction</b> Inductance mutuelle entre deux bobines.  Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.	Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale »  Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante. Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie.

## 1 Lois de l'induction

### Definition : Flux d'un champ magnétique

Soit une spire  $\mathcal{C}$  fermée dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$ . Le flux  $\Phi$  du champ  $\vec{B}$  à travers la spire  $\mathcal{C}$  est défini par :

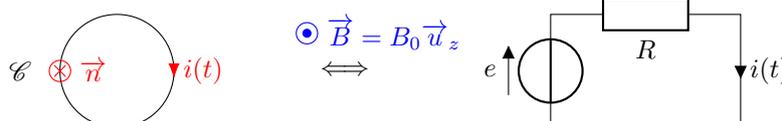
$$\Phi = \int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{Si le champ magnétique est uniforme : } \boxed{\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}}$$

où  $d\vec{S} = dS \vec{n}$  est le vecteur surface élémentaire,  $\vec{n}$  le vecteur normal à la surface orienté en fonction de l'orientation de  $i(t)$  en utilisant la règle de la main droite.

### Loi de Faraday

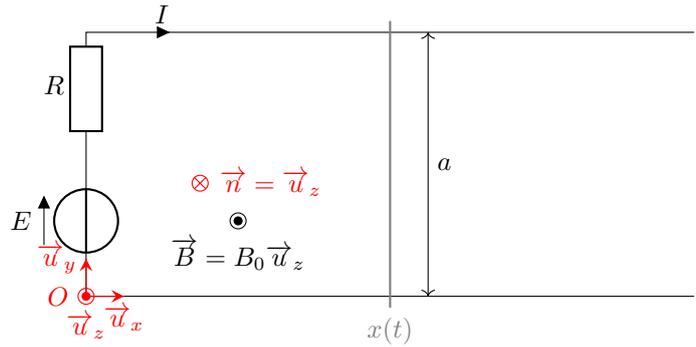
Soit un circuit conducteur fermé  $\mathcal{C}$  de résistance  $R$  plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  et dont le flux à travers le circuit fermé est noté  $\Phi$ . Le circuit voit apparaître une f.e.m. à ses bornes :  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$

où  $e$  est la f.e.m. d'un générateur équivalent orientée en convention générateur dans le circuit électrique vis à vis du sens du courant choisi.

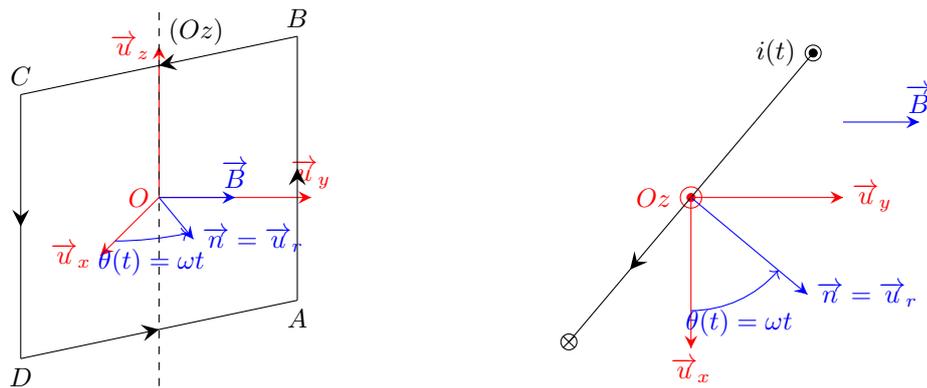


**Exemple : Calculs de  $\Phi$**

- Rail de Laplace :  $\Phi = B_0 a x(t) \vec{n} \cdot \vec{u}_z = -B_0 a x(t)$



- Une spire carrée en rotation à la vitesse  $\omega$  :  $\Phi = B_0 a^2 \vec{n} \cdot \vec{u}_y = B_0 a^2 \sin(\omega t)$



**Loi de modération de Lenz**

Les phénomènes d'induction tendent à s'opposer, par leurs effets, aux causes qui leur ont donné naissance.

**Propriété : Courant induit**

Lors d'un phénomène d'induction dans un circuit fermé, la force électromotrice induite entraîne l'apparition d'un courant induit ayant deux effets :

- création d'un champ magnétique propre qui s'oppose à la variation du flux ;
- création d'une force de Laplace dans le circuit qui tend à s'opposer à la variation du flux, dans le cas de circuits mobiles.

## 2 Auto-induction

**Definition : Flux propre et inductance propre**

Un circuit électrique filiforme parcouru par un courant d'intensité  $i$  crée un champ magnétique, dont le flux à travers le circuit est proportionnel à  $i$  :

$$\Phi_p = Li$$

Le coefficient  $L$  est appelé coefficient d'auto-inductance, ou inductance propre du circuit. Il s'exprime en henry (H).

**Exemple : Inductance propre d'une bobine**

Considérons une bobine d'axe  $\vec{u}_z$  longue de longueur  $l$  et composé de  $N$  spires de rayon  $R$ . On peut montrer que le champ magnétique à l'intérieure de la bobine vaut :

$$\vec{B}(t) = \mu_0 \frac{N}{l} i(t) \vec{u}_z$$

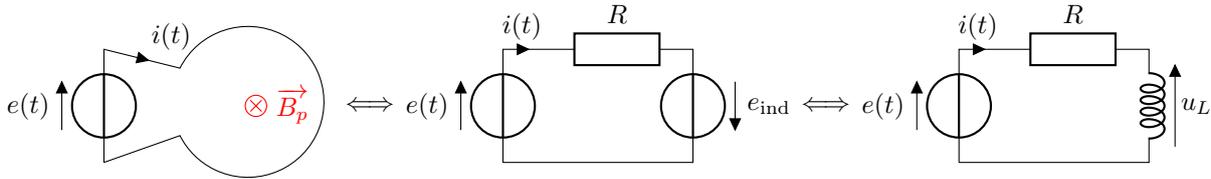
On note  $S$  la surface d'une spire, le flux propre à travers la bobine vaut :

$$\Phi_p = NSB(t) = NS\mu_0 \frac{N}{l} i(t) = Li(t) \implies L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

avec  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $R = 3 \text{ cm}$ ,  $l = 30 \text{ cm}$  et  $N = 1000$  spires on a :  $L = 12 \text{ mH}$

**Propriété : Schéma électrique équivalent**

On considère un circuit électrique  $\mathcal{C}$  de résistance  $R$  parcouru par un courant  $i$  et de coefficient d'auto-induction  $L$ , le circuit est alimenté par un générateur de tension de f.e.m.  $e(t)$ , il produit donc un champ magnétique propre  $\vec{B}_p$  et n'est en présence d'aucun champ magnétique extérieur :



En utilisant la loi de Faraday, on obtient : 
$$e_{\text{induit}} = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt} = -u_L$$

**Remarque : Loi de Lenz**

L'augmentation du courant  $i$  dans la bobine génère une force électromotrice qui doit, d'après la loi de Lenz, s'opposer à cette augmentation, c'est-à-dire être négative.

**Propriété : Bilan de puissance**

À partir du schéma électrique équivalent on peut réaliser un bilan de puissance en appliquant la loi des mailles :

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} \implies e(t)i(t) = Ri^2(t) + i(t)L\frac{di}{dt} \iff \mathcal{P}_G = P_J + \frac{d\mathcal{E}_{\text{magn}}}{dt}$$

avec  $\mathcal{P}_G$  la puissance fournie par le générateur,  $\mathcal{P}_J$  la puissance dissipée par effet joule et  $\mathcal{E}_{\text{magn}} = \frac{1}{2}Li^2(t)$  l'énergie magnétique produite par le circuit.

### 3 Induction mutuelle

**Definition : Inductance mutuelle**

On considère un circuit  $\mathcal{C}_1$  de résistance  $R_1$  et le coefficient d'auto-induction  $L_1$  alimenté par un générateur de tension de f.e.m.  $e(t)$ .

On place en face un circuit  $\mathcal{C}_2$  fermé de résistance  $R_2$  et de coefficient d'auto-induction  $L_2$ .

On suppose que les deux circuits  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont parcourus respectivement par les courants  $i_1$  et  $i_2$ . Les deux circuits électriques créent chacun un champ propre  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$ .

On calcule le flux du champ magnétique total  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  à travers le circuit électrique  $\mathcal{C}_1$  :

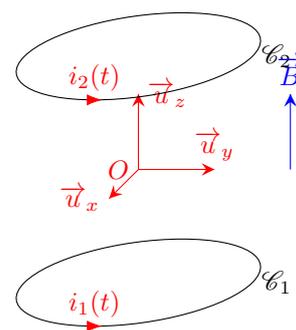
$$\Phi_1 = \Phi_{p1} + \Phi_{2 \rightarrow 1}$$

On calcule le flux du champ magnétique total  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  à travers le circuit électrique  $\mathcal{C}_2$  :

$$\Phi_2 = \Phi_{p2} + \Phi_{1 \rightarrow 2}$$

On définit l'inductance mutuelle comme le coefficient qui dépend du couplage  $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$  :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = Mi_2 \text{ et } \Phi_{1 \rightarrow 2} = Mi_1$$



**Exemple : Couplage de deux bobines longues**

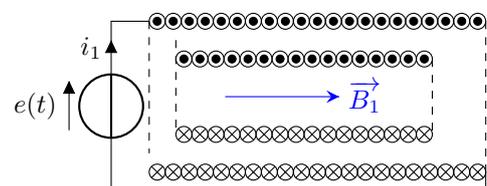
On considère une bobine  $\mathcal{C}_1$  de rayon  $a_1$ , de résistance  $R_1$  et de coefficient d'auto-induction  $L_1$  alimentée par un générateur de tension de f.e.m.  $e(t)$  qui délivre un courant  $i_1$ .

On place en face une bobine  $\mathcal{C}_2$  de rayon  $a_2 < a_1$ , de résistance  $R_2$  et de coefficient d'auto-induction  $L_2$ . On suppose que la bobine est fermée et parcourue par un courant  $i_2$ .

On calcule alors :

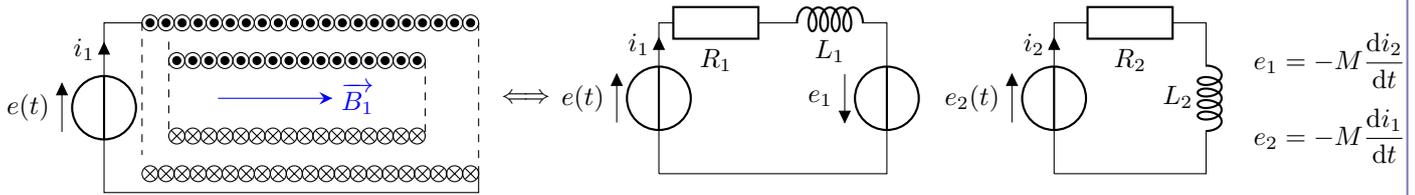
$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 = N_2 \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 \pi a_2^2 = Mi_1$$

avec 
$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi a_2^2}{l_1}$$



**Propriété : Schéma électrique équivalent**

On peut alors modéliser les deux bobines par les circuit électriques suivant :



**Propriété : Bilan de puissance**

On peut établir un bilan de puissance sur chaque circuit :

$$\left. \begin{aligned} e(t) - M \frac{di_2}{dt} &= R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} \\ e(t) i_1(t) - M i_1(t) \frac{di_2}{dt} &= R_1 i_1^2(t) + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -M \frac{di_1}{dt} &= R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt} \\ -M i_2(t) \frac{di_1}{dt} &= R_2 i_2^2(t) + L_2 i_2(t) \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

On fait alors la somme et on obtient :

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_{J1} + \mathcal{P}_{J2} + \frac{d \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)}{dt}$$

**Exemple : Table à induction**

On place un anneau métallique assimilé à une spire de rayon  $r = 2,5 \text{ cm}$  et de résistance  $R = 0,1 \Omega$  dans la bobine que l'on considérera comme infiniment longue possédant une densité linéique de spires  $n$ .

On alimente la bobine par un courant sinusoïdal de la forme  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ . La bobine et l'anneau ont le même axe de révolution ( $Oz$ ).

Le champ à l'intérieur de la bobine infiniment longue, appelé solénoïde, vaut :  $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$ .

1. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans l'anneau en fonction du temps. En déduire la puissance dissipée en moyenne.
2. Sachant que la bobine possède 200 spires par mètre et que l'on alimente avec une fréquence de 100 kHz, calculer l'amplitude du courant  $I_0$  nécessaire pour chauffer avec une puissance de 500 MW dans l'anneau.

On calcule le flux du champ  $\vec{B}$  produit par la bobine à travers l'anneau :  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \mu_0 n i(t) \pi r^2$

On en déduit alors la puissance dissipée par effet joule dans l'anneau :  $\mathcal{P}_J = R i_{\text{induit}}^2 = \frac{\mu_0^2 n^2 \pi^2 r^4 \omega^2 I_0^2}{R} \cos^2(\omega t)$

En moyenne sur une période on a donc :  $\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\mu_0^2 n^2 \pi^2 r^4 \omega^2 I_0^2}{2R} \iff I_0 = 8,1 \text{ A}$

**Propriété : Découplage en RSF**

Si on a  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$  on peut passer en complexe :

$$\begin{aligned} \underline{e} &= (R_1 + j\omega L_1) \underline{i}_1 + jM\omega \underline{i}_2 \\ 0 &= (R_2 + j\omega L_2) \underline{i}_2 + jM\omega \underline{i}_1 \end{aligned}$$

On peut alors découpler les équations pour obtenir :

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{\underline{e}}{\underline{i}_1} = R_1 + jL_1\omega + \frac{(M\omega)^2}{R_1 + jL_2\omega}$$

**Remarque : Transfert d'énergie sans contact**

L'inductance mutuelle permet de faire un transfert d'énergie sous forme magnétique sans contact. Ce transfert est utile lors :

- D'un chauffage d'une casserole sur une plaque à induction ;
- De l'utilisation d'un transformateur pour adapter l'énergie transportée par le réseau électrique à une utilisation domestique.

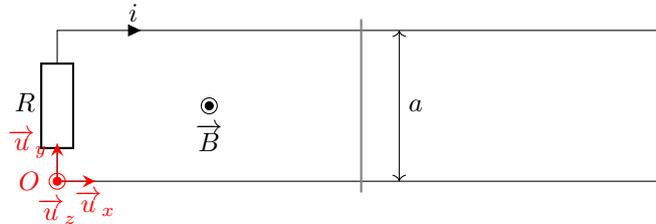
## Signaux 8 : Conversion électromécanique de puissance

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>1.7.5. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire</b>	
<b>Conversion de puissance mécanique en puissance électrique</b> Rail de Laplace. Spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique.	Interpréter qualitativement les phénomènes observés. Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Effectuer un bilan énergétique. Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.
Freinage par induction.	Expliquer l'origine des courants de Foucault et en citer des exemples d'utilisation. <b>Mettre en évidence qualitativement les courants de Foucault.</b>

### 1 Rail de Laplace : Conversion mécanique-électrique

#### Definition : Rail de Laplace

On considère une tige métallique de masse  $m$  conductrice soumise à une force extérieure  $\vec{F} = F_{op} \vec{u}_x$  et qui glisse sans frottement à la vitesse  $\vec{v} = v(t) \vec{u}_x$  sur deux rails conducteurs. Le circuit est plongé dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_0$  stationnaire orthogonal au circuit :

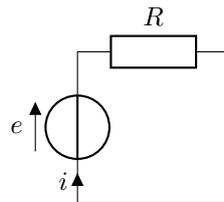


#### Propriété : Équation électrique

On calcule le flux du champ magnétique à travers la surface formée par le circuit :  $\Phi = \vec{B}_0 \cdot \vec{S} = -B_0 a x(t)$

On a alors une f.e.m. induite donnée par la loi de Faraday :  $e = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 a \frac{dx}{dt} = B_0 a v(t)$

On trace le circuit électrique équivalent :



L'application de la loi des mailles nous donne alors :  $e(t) = R i(t) \implies i(t) = \frac{B_0 a v(t)}{R}$

#### Remarque :

Dans cet exemple on néglige totalement le flux propre qui en pratique est négligeable lorsque l'inductance du circuit est faible, ce qui est le cas lorsqu'on n'a qu'une seule spire en général.

#### Propriété : Équation mécanique

**Système** :  $\{M(m)\}$  tige conductrice assimilée à un point  $M$

**Référentiel** : Terrestre supposé galiléen de repère  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

**Bilan** :

- $\vec{F}_{op} = F_{op} \vec{u}_x$  force constante de l'opérateur qui met la tige en mouvement tout au long de l'expérience.
- $\vec{F}_L$  la force de Laplace qui s'exerce sur la tige lors de l'apparition du courant  $i$  dans le circuit.

$$\vec{F}_L = i(t) a B_0 \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = i(t) B_0 a \vec{u}_x$$

- Le poids  $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$  ;

- La réaction normale aux rails  $\vec{R}_N$

**PFD :**  $m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{F}_{op} + \vec{F}_L + \vec{P} + \vec{R}_N$

On projette le principe fondamental de la dynamique sur  $\vec{u}_x$  :

$$m\ddot{x} = F_{op} + i(t)B_0a$$

**Propriété : Découplage des équations électro-mécanique**

Sachant que  $i(t) = -\frac{B_0av(t)}{R}$  on obtient l'équation du mouvent :

$$m \frac{dv}{dt} = f - \frac{(B_0a)^2}{R}v(t)$$

On voit alors que la force de Laplace agit comme une force de frottement fluide qui vient s'opposer au mouvement qui la cause. C'est une manifestation de la loi de Lenz.

**Propriété : Bilan de puissance**

On fait un bilan de puissance sur deux équations électrique et mécanique :

$$-B_0av(t)i(t) = Ri^2(t)$$

$$m \frac{dv}{dt}v(t) = f + aB_0i(t)v(t)$$

On obtient alors :

$$\frac{dE_c}{dt} + Ri^2 = fv(t)$$

La puissance fournie par l'opérateur est transformée en énergie cinétique et dissipée par effet joule.

**Propriété : Freinage par induction**

On a vu que la force de Laplace s'oppose au mouvement, on retiendra :

Dans tous les dispositifs où il y a conversion de puissance mécanique en puissance électrique, l'action mécanique de Laplace est une action de freinage.

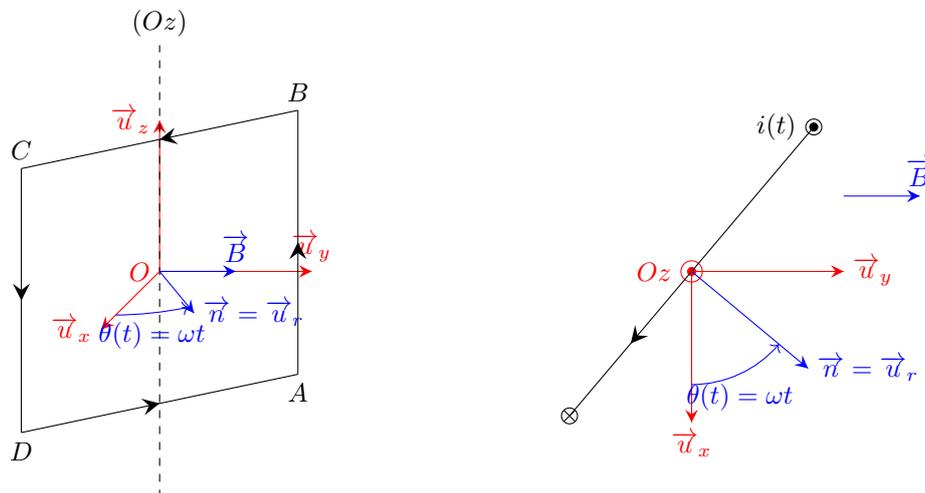
## 2 Rotation autour d'un axe fixe d'une spire carré

**Definition : Alternateur**

Un alternateur sert à transformer une puissance mécanique de rotation en une puissance électrique. L'alternateur est modélisé par une spire carré  $\mathcal{C}$ , de surface  $a^2$ , conductrice de résistance électrique  $R$ .

Cette spire est en liaison pivot d'axe  $(Oz)$  par rapport à un stator. Elle est en rotation autour de l'axe  $(Oz)$  à la vitesse angulaire  $\omega$  constante. Son moment d'inertie par rapport à l'axe est noté  $J_{Oz}$ .

Le circuit est plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B}$  perpendiculaire à  $(Oz)$ .



**Propriété : Équation électrique**

On calcul le flux du champ magnétique à travers la surface formée par le circuit :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = Bab \sin(\omega t)$$

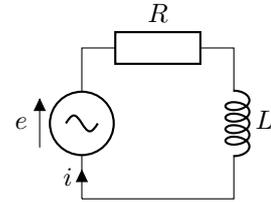
On a alors une f.e.m. induite donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bab \cos(\omega t)$$

On prend en compte le phénomène d'auto-inductance en considérant que la spire possède une inductance propre  $L$ , on trace le circuit électrique équivalent.

L'application de la loi des mailles nous donne alors :

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} \implies -Bab \cos(\omega t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}$$



**Propriété : Équation mécanique**

On effectue le bilan des actions mécaniques sur le conducteur en mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

- $\vec{\Gamma}_{ext} = \Gamma_{ext} \vec{u}_y$  couple extérieur qui maintient la rotation constante.
- $\vec{\Gamma}_L$  le couple de Laplace qui s'exerce sur la spire lors de l'apparition du courant  $i$  dans le circuit.

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{m} \wedge \vec{B} = i(t) \vec{S} \wedge \vec{B} = iSB \cos(\omega t) \vec{u}_y$$

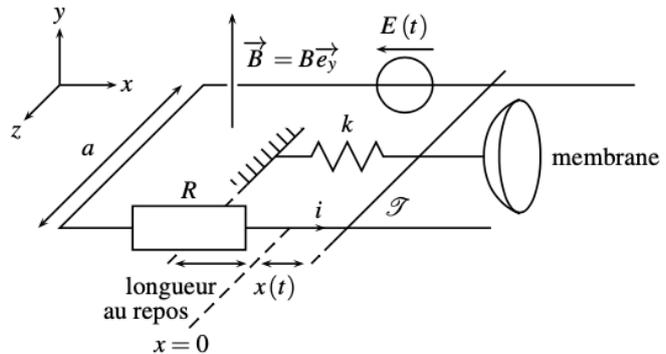
On applique la loi scalaire du moment cinétique à la pire suivant l'axe  $(Oy)$  :

$$J_{Oy} \dot{\omega} = \Gamma_{ext} + iSB \cos(\omega t) = 0$$

### 3 Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

**Definition : Principe du haut parleur**

Un haut-parleur est un appareil électromécanique qui transforme un signal électrique en signal sonore. On décide de modéliser le haut-parleur par une tige conductrice posée sur un rail de Laplace de résistance  $R$  et reliée via à une membrane élastique de raideur  $k$  au châssis. Le haut-parleur est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B} = B \vec{u}_y$ . Un générateur de tension impose une f.e.m.  $E(t)$  au circuit.



**Propriété : Équation mécanique**

On effectue le bilan des actions mécaniques sur le système {Bobine / membrane} en mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

- $\vec{T} = -kx \vec{u}_x$  avec  $z = 0$  pour  $E(t) = 0$ .
- $\vec{f} = -\alpha \dot{x} \vec{u}_z$  la force de frottement fluide.
- $\vec{F}_L$  la force de Laplace qui s'exerce sur la bobine lors de l'apparition du courant  $i$  dans le circuit.

$$\vec{F}_L = iaB \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = i(t) aB \vec{u}_x$$

On applique le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe  $(Oz)$  :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x} + aBi(t)$$

**Propriété : Équation électrique**

On calcule le flux du champ magnétique à travers la surface formée par le circuit :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = Ba(b + x(t))$$

On a alors une f.e.m. induite donnée par la loi de Faraday :  $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba\dot{x}$

L'application de la loi des mailles nous donne alors :  $e(t) + E(t) = Ri(t) \implies -Ba\dot{x} + E(t) = Ri(t)$

**Propriété : Bilan de puissance**

On fait un bilan de puissance sur deux équations électrique et mécanique :

$$\begin{aligned} -Bav(t)i(t) + E(t)i(t) &= Ri^2(t) \\ m\dot{v} &= -kxv - \alpha v^2 + aBi(t)v(t) \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\frac{d(E_c + E_p)}{dt} + Ri^2 + \alpha v^2 = E(t)i(t)$$

La puissance fournie par le générateur est transformée en énergie mécanique et dissipée par effet joule et converti en énergie acoustique par l'intermédiaire de la force de frottement fluide.

**Propriété : Régime sinusoïdal forcé**

En régime sinusoïdal forcé on peut découpler les équations :

$$\begin{aligned} -Bav + \underline{E} &= R\underline{i} \\ m\dot{\underline{v}} &= -k\underline{x} - \alpha\underline{v} + aB\underline{i} \end{aligned}$$

Qui deviennent :

$$\begin{aligned} -Bav + \underline{E} &= R\underline{i} \\ jm\omega\underline{v} &= -\frac{k}{j\omega}\underline{v} - \alpha\underline{v} + aB\underline{i} \end{aligned}$$

On élimine  $\underline{v}$  et on obtient :

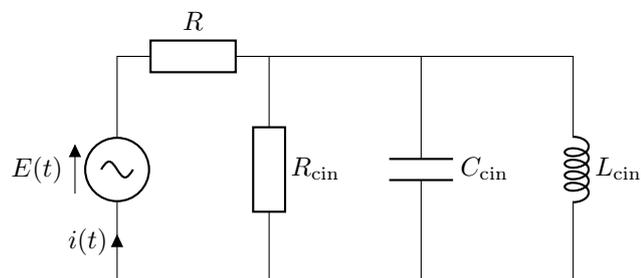
$$\underline{E} = \left( R + \frac{(Ba)^2}{jm\omega + \frac{k}{j\omega} + \alpha} \right) \underline{i} = (R + \underline{Z}_{\text{cin}})\underline{i}$$

On peut alors modéliser le couplage électromécanique par une impédance d'origine cinétique  $\underline{Z}_{\text{cin}}$  qu'on modélise par l'association en parallèle d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{cin}}} = jC_{\text{cin}}\omega + \frac{1}{jL_{\text{cin}}\omega} + \frac{1}{R_{\text{cin}}}$$

avec :

$$\begin{aligned} C_{\text{cin}} &= \frac{m}{(Ba)^2} \\ L_{\text{cin}} &= \frac{(Ba)^2}{k} \\ R_{\text{cin}} &= \frac{(Ba)^2}{\alpha} \end{aligned}$$



## Troisième partie

### Mécanique

#### Liste des chapitres Mécanique

<b>1 Cinématique du point matériel</b>	<b>81</b>
1 Relativité du mouvement . . . . .	81
2 Repérage d'un point . . . . .	83
3 Vitesse d'un point . . . . .	85
4 Accélération d'un point . . . . .	86
5 Exemples : . . . . .	87
<b>2 Dynamique du point matériel</b>	<b>89</b>
1 Principe d'inertie . . . . .	89
2 Principe fondamental de la dynamique . . . . .	90
3 Le mouvement dans un champ de pesanteur uniforme . . . . .	93
4 Mouvement avec forces de frottements fluides . . . . .	94
5 Mouvement circulaire . . . . .	96
<b>3 Les oscillateurs mécanique</b>	<b>97</b>
1 Le système masse-ressort . . . . .	97
2 Les oscillateurs amorti . . . . .	98
3 Les oscillations forcées . . . . .	99
4 Capacité numérique . . . . .	100
<b>4 Énergie, travail, puissance</b>	<b>101</b>
1 Les grandeurs énergétiques . . . . .	101
2 Le théorème de l'énergie cinétique . . . . .	102
3 Étude qualitative de mouvements à une dimension . . . . .	106
4 Application : Oscillation proche de l'équilibre . . . . .	107
<b>5 Mouvement de particules chargées</b>	<b>109</b>
1 Force de Lorentz et notions de champs . . . . .	109
2 Aspect énergétique . . . . .	110
3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme . . . . .	111
4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme . . . . .	113
<b>6 Loi du moment cinétique d'un point et d'un solide</b>	<b>115</b>
1 Théorème du moment cinétique d'un point . . . . .	115
2 Cinématique du solide . . . . .	118
3 Loi du moment cinétique scalaire . . . . .	119
4 Énergie cinétique d'un solide en rotation . . . . .	120
5 Le pendule pesant . . . . .	121
6 Capacité numérique . . . . .	121
<b>7 Champ de force centrale conservatif</b>	<b>123</b>
1 Champ newtonien . . . . .	123
2 Force centrale conservative . . . . .	124
3 Aspects énergétiques . . . . .	125
4 Trajectoire circulaire . . . . .	126
5 Trajectoire elliptique . . . . .	127

---

6	Satellites terrestres . . . . .	128
7	Capacité numérique . . . . .	129

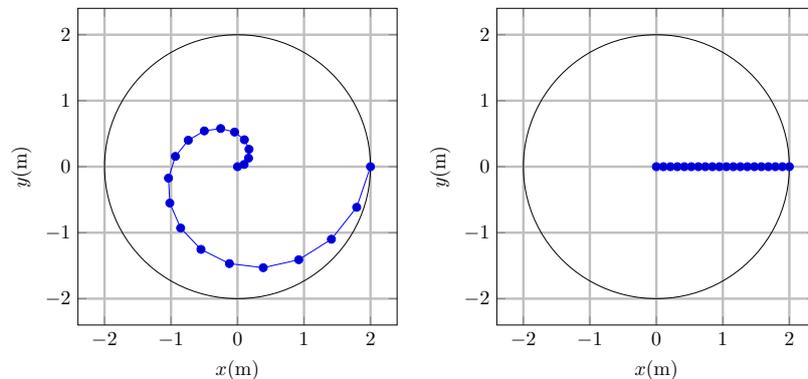
# Mécanique 1 : Cinématique du point matériel

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point</b>	
<b>Repérage dans l'espace et dans le temps</b> Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
<b>Cinématique du point</b> Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques. Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue. Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.	Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. <b>Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.</b>

## 1 Relativité du mouvement

On considère un homme qui marche sur un manège en rotatin du centre vers le bord en ligne droite :

- une caméra située sur le plafond du manège filme ;
- une caméra située sur un arbre filme



**Question :** Quelle figure correspond à quel point de vue? On voit alors que le mouvement est relatif à l'observateur.

### Definition : Référentiel

C'est un solide qu'on considère comme fixe et auquel est lié l'observateur du mouvement.

Le référentiel est caractérisé par :

- un repère  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  ;
- une horloge qui définit une origine des temps  $t = 0$  et la mesure des instants suivants  $t$ .

**Remarque :**

- Un instant  $t$  ou  $t_1$ , qui correspond à une coordonnée temporelle par rapport à son origine.
- Une durée  $\Delta t = t_2 - t_1$  qui correspond à la variation de temps séparant deux instants  $t_1$  et  $t_2$ .
- Les trois vecteurs  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$  peuvent être quelconques tant qu'ils ne sont pas colinéaires et qu'ils sont fixes dans  $\mathcal{R}$ .
- Définir un référentiel est la première étape lors d'une étude de mécanique. On ne peut étudier un mouvement si on ne sait pas dans quel référentiel on se place. Pour le définir, il faut préciser à quel objet le référentiel est lié, et donner une origine et trois axes.

**Definition : Base orthonormée directe (BOND)**

Une base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est orthonormée directe si :

- Vecteurs normés :  $\|\vec{u}_x\| = \|\vec{u}_y\| = \|\vec{u}_z\| = 1$
- Vecteurs orthogonaux :  $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_x \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = 0$
- Base directe :  $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$  (règle de la main droite)

**Propriété : Produit scalaire**

Pour deux vecteur  $\vec{P}$  et  $\vec{Q}$  qu'on exprime dans une BOND  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  :

$$\vec{P} = P_x \vec{u}_x + P_y \vec{u}_y + P_z \vec{u}_z \text{ et } \vec{Q} = Q_x \vec{u}_x + Q_y \vec{u}_y + Q_z \vec{u}_z$$

Le produit scalaire de  $\vec{P}$  et  $\vec{Q}$  s'écrit :

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{Q} \cdot \vec{P} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = \|\vec{P}\| \|\vec{Q}\| \cos(\alpha) \text{ avec } \alpha(\vec{P}, \vec{Q})$$

**Propriété : Hypothèses non-relativistes**

Lors d'une description classique on a :

- les durées  $\Delta t = t_2 - t_1$  qui ne dépendent pas du référentiel d'étude ;
- les distances entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  :  $\|\overrightarrow{M_1 M_2}\| = \sqrt{\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}}$  qui ne dépendent pas du référentiel d'étude.

Ces deux propriétés ne sont valables que lorsqu'on peut décrire de manière classique le mouvement. Si la vitesse des objets devient non négligeable devant la vitesse de la lumière  $c$ , on assiste à une dilatation du temps et de l'espace en fonction du référentiel d'observation. C'est la mécanique relativiste d'Einstein.

**Propriété : Produit vectoriel**

Pour deux vecteur  $\vec{P}$  et  $\vec{Q}$  qu'on exprime dans une BOND  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  on définit le produit vectoriel :

$$\vec{P} \wedge \vec{Q} = -\vec{Q} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_y Q_z - P_z Q_y \\ P_z Q_x - P_x Q_z \\ P_x Q_y - P_y Q_x \end{pmatrix} = \vec{W}$$

avec  $\vec{W}$  qui est orthogonal au plan défini par  $\vec{P}$  et  $\vec{Q}$ . On a également

$$\|\vec{W}\| = \|\vec{P}\| \|\vec{Q}\| \sin(\alpha) \text{ avec } \alpha(\vec{P}, \vec{Q})$$

**Exemple : Référentiel héliocentrique**

Lié au centre du Soleil et à trois étoiles «fixes», c'est-à-dire suffisamment lointaines pour nous paraître fixes sur la durée du problème. Le soleil tourne dans le référentiel mais son centre est fixe. Noté  $\mathcal{R}_K$ .

**Exemple : Référentiel géocentrique**

Lié au centre de la Terre et à trois étoiles «fixes». En translation par rapport au référentiel héliocentrique. La Terre tourne dans le référentiel mais son centre est fixe. Noté  $\mathcal{R}_G$ .

**Exemple : Référentiel Terrestre**

Lié à la Terre, il peut se présenter en un point quelconque de la planète. Il est en rotation autour du centre de la Terre par rapport au référentiel géocentrique. C'est très souvent le référentiel classique en laboratoire. Noté  $\mathcal{R}_T$ .

**Definition : Trajectoire**

La trajectoire d'un point  $M$ , dans un référentiel donné, est l'ensemble des positions de ce point au cours du temps, rapportées à un repère fixe dans ce référentiel.

## 2 Repérage d'un point

**Definition : Point matériel**

Un point matériel est un solide dont on peut négliger l'extension spatiale et la rotation sur lui-même.

**Definition : vecteur position**

La position du point  $M$ , par rapport au point  $O$  fixe dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , à un instant donné, est défini par la vecteur position :

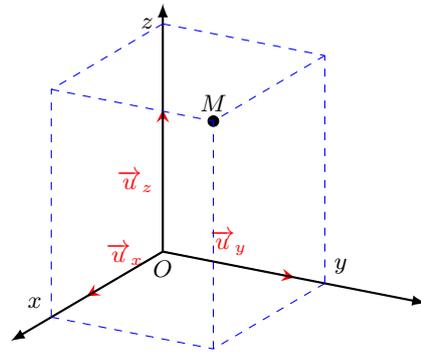
$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$$

**Definition : Coordonnées Cartésiennes**

C'est le repère fixe par définition dans le référentiel d'étude. Il est défini à partir d'une origine  $O$  fixe et d'une BOND  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  fixe également.

Le vecteur position s'exprime dans ce repère en fonction des coordonnées cartésienne  $(x, y, z)$  :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$$



**Propriété :**

Pour un vecteur  $\vec{P}$  quelconque dans le repère cartésien, on peut calculer ses coordonnées  $(P_x, P_y, P_z)$  en faisant la projection du vecteur sur chaque axe du repère. Pour ça on utilise le produit scalaire :

$$P_x = \vec{P} \cdot \vec{u}_x; P_y = \vec{P} \cdot \vec{u}_y; P_z = \vec{P} \cdot \vec{u}_z$$

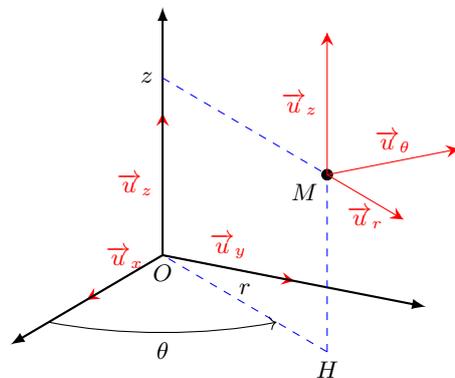
**Definition : Coordonnées cylindriques**

On définit une BOND mobile liée au point  $M$  tel que :

- On projette le point  $M$  dans le plan  $Oxy$  pour obtenir le point  $H$  ;
- On définit  $r = \|\overrightarrow{OH}\|$  et  $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OH}}{\|\overrightarrow{OH}\|}$  ;
- On définit  $\theta = (\vec{u}_x, \vec{u}_r)$  et  $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$  ;

On peut alors exprimer le vecteur position en fonction des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{u}_r(t) + z(t)\vec{u}_z$$



**Propriété : Liens entre coordonnées cylindriques et cartésiennes**

On peut projeter les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  dans la base cartésienne :

$$\vec{u}_r = (\vec{u}_r \cdot \vec{u}_x) \vec{u}_x + (\vec{u}_r \cdot \vec{u}_y) \vec{u}_y$$

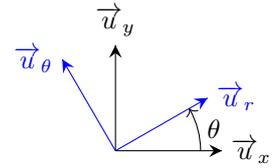
$$\vec{u}_r = \cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y$$

$$x = \vec{OM} \cdot \vec{u}_x = r \cos(\theta)$$

$$\vec{u}_\theta = (\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_x) \vec{u}_x + (\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_y) \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y$$

$$y = \vec{OM} \cdot \vec{u}_y = r \sin(\theta)$$



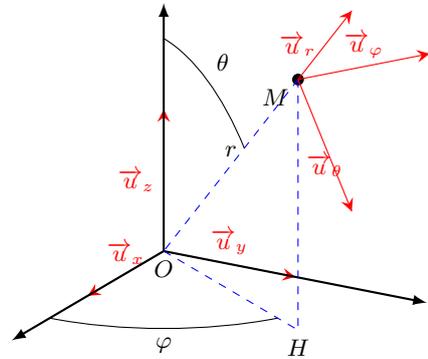
**Definition : Coordonnées sphériques**

On définit une BOND mobile tel que :

- $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$  et  $r = \|\vec{OM}\|$  ;
- l'angle  $\theta = (\vec{u}_z, \vec{u}_r)$  ;
- $\vec{u}_\theta$  est orthogonal à  $\vec{u}_r$  et dans le plan  $OMH$  et orienté dans le sens de  $\theta$  ;
- $\vec{u}_\varphi$  correspond au  $\vec{u}_\theta$  des coordonnées cylindriques ;

On peut alors exprimer le vecteur position en fonction des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  :

$$\vec{OM}(t) = r(t) \vec{u}_r(t)$$



**Definition : Déplacement élémentaire**

On définit  $\vec{dl}$  (ou  $d\vec{OM}$ ) tel que entre un instant  $t$  et un instant infiniment proche  $t + dt$ , le point  $M$  s'est déplacé de :

$$\vec{dl} = d\vec{OM} = \vec{OM}(t + dt) - \vec{OM}(t) \quad \text{avec } \vec{dl} \text{ tangent à la trajectoire}$$

**Propriété : Expression de  $\vec{dl}$  à partir d'un schéma**

**Coordonnées cartésiennes :**

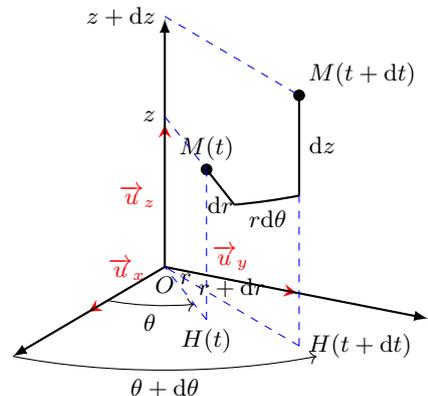
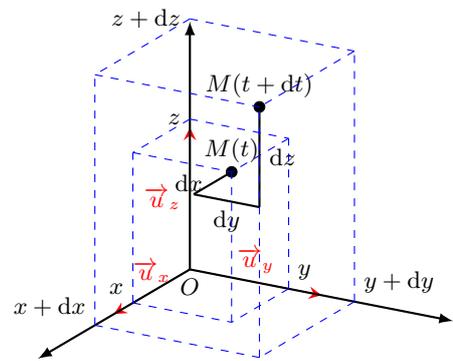
On a les coordonnées du point  $M$  à l'instant  $t$  :  $(x, y, z)$   
 On a les coordonnées du point  $M$  à l'instant  $t + dt$  :  $(x + dx, y + dy, z + dz)$   
 où  $dx, dy$  et  $dz$  correspondent à la variation élémentaire sur chaque coordonnée entre  $t$  et  $t + dt$

$$\vec{dl} \approx dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

**Coordonnées cylindriques :**

On a les coordonnées du point  $M$  à l'instant  $t$  :  $(r, \theta, z)$   
 On a les coordonnées du point  $M$  à l'instant  $t + dt$  :  $(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$   
 où  $dr, d\theta$  et  $dz$  correspondent à la variation élémentaire sur chaque coordonnée entre  $t$  et  $t + dt$

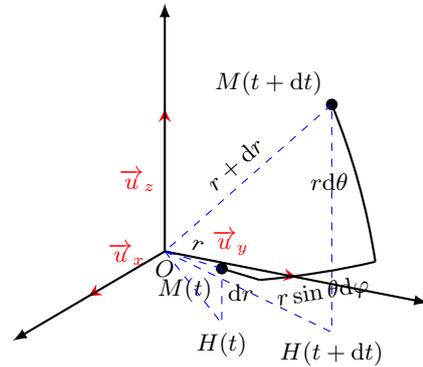
$$\vec{dl} \approx dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$



**Coordonnées sphériques :**

On a les coordonnées du point  $M$  à l'instant  $t$  :  $(r, \theta, z)$   
 On a les coordonnées du point  $M$  à l'instant  $t + dt$  :  
 $(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$   
 où  $dr, d\theta$  et  $dz$  correspondent à la variation élémentaire sur chaque coordonnée entre  $t$  et  $t + dt$

$$\vec{dl} \simeq dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi$$



### 3 Vitesse d'un point

**Definition : Vitesse expérimentale**

Si on connaît la position du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  à un instant  $t_1$  et à un instant  $t_2 = t_1 + \Delta t$  alors on peut approcher expérimentalement la vitesse du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  à l'instant  $t_1$  tel que :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t_1) = \left. \frac{\vec{OM}(t_1 + \Delta t) - \vec{OM}(t_1)}{\Delta t} \right|_{\mathcal{R}}$$

**Definition : Vitesse instantannée**

Dans la limite où  $\Delta t \rightarrow 0$  on définit la vitesse instantannée du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  par :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

On note généralement  $v = \|\vec{v}\|$ .

**Remarque :**

La vitesse, tout comme la position et la trajectoire, dépend du référentiel. C'est pour cela que nous précisons toujours dans sa notation ainsi que celle de la dérivée, le référentiel.

Il ne faut pas confondre référentiel et système de coordonnées. On peut exprimer un vecteur dans une base mobile (cylindrique ou sphérique) et le dériver dans un référentiel associé à une base fixe (cartésienne).

**Propriété : Expression en coordonnées cartésiennes**

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  en coordonnées cartésiennes il existe deux méthodes :

- **Dérivation directe :** On calcule directement la dérivée de l'expression de  $\vec{OM}(t)$  dans le référentiel donné.

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \implies \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \left. \frac{d(x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z)}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

$$\implies \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z + x(t)\cancel{\left. \frac{d\vec{u}_x}{dt} \right|_{\mathcal{R}}} + y(t)\cancel{\left. \frac{d\vec{u}_y}{dt} \right|_{\mathcal{R}}} + z(t)\cancel{\left. \frac{d\vec{u}_z}{dt} \right|_{\mathcal{R}}}$$

On obtient alors :  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$

- **À partir du déplacement élémentaire :** On divise simplement le déplacement élémentaire par  $dt$ .

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \implies \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \frac{dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z}{dt}$$

$$\implies \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$$

**Remarque :**

La norme de la vitesse en coordonnée cartésienne vaut :  $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

Par soucis d'allégement des notations, les dérivées des grandeurs scalaires comme  $x, y, z, r, \theta$  et  $\varphi$  seront notées  $\dot{x}, \dots$

**Propriété : Expression en coordonnées cylindriques**

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  en coordonnées cylindriques il existe deux méthodes :

- **Dérivation directe :** On calcule directement la dérivée de l'expression de  $\vec{OM}(t)$  dans le référentiel donné.

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) &= \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \left. \frac{d(r(t)\vec{u}_r(t) + z(t)\vec{u}_z)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z + r(t) \left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + z(t) \left. \frac{d\vec{u}_z}{dt} \right|_{\mathcal{R}}\end{aligned}$$

On doit alors calculer la dérivée du vecteur  $\vec{u}_r$  par rapport au temps dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

$$\left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d(\cos(\theta(t))\vec{u}_x + \sin(\theta(t))\vec{u}_y)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{d\theta}{dt}(-\sin(\theta(t))\vec{u}_x + \cos(\theta(t))\vec{u}_y) = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

On obtient alors :  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$

- **À partir du déplacement élémentaire :** On divise simplement le déplacement élémentaire par  $dt$ .

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) &= \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z}{dt} \\ &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z\end{aligned}$$

## 4 Accélération d'un point

**Definition : accélération expérimentale**

Si on connaît la vitesse du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  à un instant  $t_1$  et à un instant  $t_2 = t_1 + \Delta t$  alors on peut approcher expérimentalement l'accélération du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  à l'instant  $t_1$  tel que :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t_1) = \left. \frac{\vec{v}(t_1 + \Delta t) - \vec{v}(t_1)}{\Delta t} \right|_{\mathcal{R}}$$

**Definition : accélération instantanée**

Dans la limite où  $\Delta t \rightarrow 0$  on définit l'accélération instantanée du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  par :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}}$$

**Remarque :**

Un mouvement peut être accéléré même si la norme de la vitesse reste constante. Pour savoir si un mouvement est non accéléré il faut que le *vecteur accélération* soit nul, autrement dit  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \vec{0}$ .

**Propriété : Expression en coordonnées cartésiennes**

On calcule directement la dérivée de l'expression de  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t)$  dans le référentiel donné.

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d(\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z)}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

On obtient alors :  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$

**Propriété : Expression en coordonnées cylindriques**

On calcule directement la dérivée de l'expression de  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t)$  dans le référentiel donné.

$$\begin{aligned} \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) &= \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{r}\vec{u}_r + \frac{d(r\dot{\theta})}{dt}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z + \dot{r}\left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + r\dot{\theta}\left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + z(t)\left. \frac{d\vec{u}_z}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{r}\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z + r\dot{\theta}\left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

On doit alors calculer la dérivée du vecteur  $\vec{u}_r$  par rapport au temps dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

$$\left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d(-\sin(\theta(t))\vec{u}_x + \cos(\theta(t))\vec{u}_y)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{d\theta}{dt}(-\cos(\theta(t))\vec{u}_x - \sin(\theta(t))\vec{u}_y) = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

On obtient alors :  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$

**Definition : Repère de Frenet**

On définit le vecteur tangent à la trajectoire  $\vec{u}_T$  par :

$$\vec{u}_T = \frac{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{\|v(M)_{/\mathcal{R}}\|}$$

On définit le vecteur normal  $\vec{u}_N$  comme le vecteur orthogonal à  $\vec{u}_T$  tourné d'un angle  $+\frac{\pi}{2}$ .

On admet alors que l'expression pour un trajectoire plane de l'accélération d'un point  $M$  dans le repère de Frenet s'exprime :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}\vec{u}_T$$

avec  $R$  le rayon de courbure de la trajectoire au point  $M$ ,  $v$  la norme du vecteur vitesse et  $\frac{dv}{dt}$  la dérivée temporelle de la norme du vecteur vitesse.

**Propriété : Degrés de liberté du mouvement**

Lors d'un mouvement à vecteur accélération constant, on a deux situations possibles :

- Le vecteur vitesse initiale  $\vec{v}_0$  est colinéaire au vecteur accélération  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$ , dans ce cas le mouvement est à une dimension.
- Le vecteur vitesse initiale  $\vec{v}_0$  n'est pas colinéaire au vecteur accélération  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$ , dans ce cas le mouvement est à deux dimension.

## 5 Exemples :

**Exemple : Mouvement de vecteur accélération constant**

**Système :** On étudie le mouvement du point  $M$ .

**Référentiel :** On se place dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire (Terrestre).

On considère que  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \vec{C}^{t\acute{e}} = \vec{a}_0$ . Quel est la base la plus adapté pour étudier le mouvement ?

Si le vecteur accélération est constant au cours du mouvement, alors on peut choisir un vecteur de la base constant et

colinéaire à  $\vec{a}_0$  dans  $\mathcal{R}$ . On définit donc le repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  tel que :

$$\vec{a}_0 = a_0 \vec{u}_z \text{ et } \vec{OM}(t=0) = \vec{0} \text{ et } \vec{v}(t=0) = v_{0x} \vec{u}_x + v_{0z} \vec{u}_z = v_0(\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_z)$$

On obtient alors le système d'équation différentielle suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = a_0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = v_{0x} \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = a_0 t + v_{0z} \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{a_0}{2} t^2 + v_{0z} t \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = v_0 t \cos \alpha \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{a_0}{2} t^2 + v_0 t \sin \alpha \end{cases}$$

On peut alors obtenir l'équation de la trajectoire parabolique en exprimant  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$  on obtient :

$$z = \frac{a_0 x^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + z \tan \alpha = \frac{a_0}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x^2 + x \tan \alpha$$

### Exemple : Mouvement circulaire

**Systeme :** On étudie le mouvement du point  $M$ .

**Référentiel :** On se place dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire (Terrestre).

On cherche à étudier le mouvement circulaire du point  $M$ . La base la plus adaptée pour exprimer les coordonnées du point  $M$  est la base cylindrique tel que :

$$\vec{OM}(t) = r(t) \vec{u}_r + z(t) \vec{u}_z$$

Comme le mouvement est circulaire on a :

$$z(t) = C^{te} = z_0 \text{ et } r(t) = C^{te} = R$$

On choisit le base cylindrique tel que :

$$\theta(t=0) = 0 \text{ et } z_0 = 0$$

On obtient alors :

$$\vec{OM} = R \vec{u}_r$$

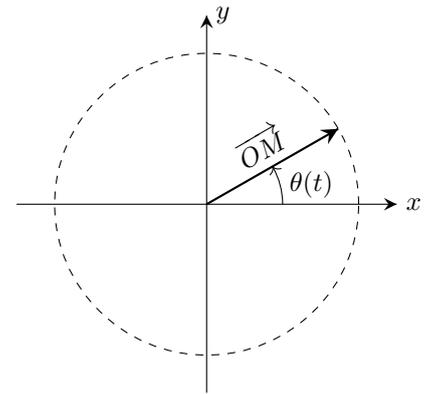
On a alors le vecteur vitesse :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

On a alors le vecteur accélération :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}(t) = \vec{a}_N + \vec{a}_T$$



En utilisant  $v = \|\vec{v}\| = R\dot{\theta}$ , on peut exprimer l'accélération :  $\vec{a}_N = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$  et  $\vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta$  On a alors deux types de mouvements circulaires :

- Le mouvement circulaire uniforme si  $\frac{dv}{dt} = 0$ . Alors  $v = R\omega = C^{te}$  où  $\omega$  est la vitesse de rotation en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Le mouvement circulaire non uniforme si  $\frac{dv}{dt} \neq 0$ . Alors l'accélération comporte deux composantes.

## Mécanique 2 : Dynamique du point matériel

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>2.2. Lois de Newton</b>	
<b>Quantité de mouvement</b> Masse d'un système. Conservation de la masse pour système fermé. Quantité de mouvement d'un point et d'un système de points. Lien avec la vitesse du centre de masse d'un système fermé.	Exploiter la conservation de la masse pour un système fermé. Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points sous la forme : $\vec{p} = m \vec{v}(G)$ .
Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
Notion de force. Troisième loi de Newton.	Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
Deuxième loi de Newton.	Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen. <b>Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force par exemple à l'aide d'un microcontrôleur.</b>
Force de gravitation. Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.	Etudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement.
Modèles d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute.	Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée. <b>Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.</b>
Tension d'un fil. Pendule simple.	Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

### Remarque : Contexte

Dans ce chapitre nous allons voir les trois lois fondamentales sur lesquelles reposent toute la théorie classique de la mécanique Newtonienne ainsi que la liste des forces à connaître pour le programme.

Le but est d'abord d'illustrer les méthodes de résolution sur des exemples simples vu en terminal mais dont la rédaction et la rigueur devront être en cohérence avec la manipulation des vecteurs et des coordonnées cinématique vu au chapitre précédent.

On verra ensuite l'introduction des forces de frottements et l'impact sur le mouvement d'un point.

## 1 Principe d'inertie

### Definition : Masse inertielle

C'est une grandeur caractéristique d'un point matériel qui est :

- positive ;
- conservative, elle est constante au cours du mouvement pour un système fermé ;
- extensive, additive ;
- invariante par changement de référentiel en mécanique classique.

### Remarque :

Par commodité on appelle masse inertielle : masse

**Definition : Quantité de mouvement**

La quantité de mouvement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  est :

$$\vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \text{ en } \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**Definition : Système isolé ou pseudo-isolé**

Si aucune action mécanique ne s'exerce sur un système on dit qu'il est isolé.

Si toutes les actions mécaniques qui s'exercent sur un système se compensent, alors il est pseudo-isolé.

**Première loi de Newton**

On postule l'existence de référentiels dit galiléens ou inertiels où un point matériel isolé ou pseudo-isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

**Propriété : Référentiel galiléen**

Un référentiel est galiléen ssi il est en translation rectiligne et uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen.

**Remarque : Les référentiels supposés galiléens classiques**

Il n'existe pas de référentiel strictement galiléen. En revanche on peut supposer qu'un référentiel est supposé galiléen si le temps de l'expérience est petit devant le temps caractéristique du mouvement :

- Le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$  ( $\Delta t \ll T_{\text{jour}}$ );
- Le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_G$  ( $\Delta t \ll T_{\text{année}}$ );
- Le référentiel héliocentrique  $\mathcal{R}_S$  ( $\Delta t \ll T_{\text{galaxie}}$ );

## 2 Principe fondamental de la dynamique

**Definition : Force**

Une force est une action mécanique qui modifie le vecteur vitesse d'un point matériel.

**Propriété : Modélisation d'une force**

Une force se modélise mathématiquement à l'aide d'un vecteur, noté généralement  $\vec{F}$  et possède :

- Un point d'application qui est l'origine du vecteur ;
- Une direction et un sens qui sont décrits dans une BOND  $\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y + F_z \vec{u}_z$  ;
- Une intensité  $\|\vec{F}\|$  exprimée en N.

Une force s'applique forcément d'un point  $M_1$  sur un point  $M_2$ . On note alors :  $\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2}$

**Remarque :**

Chaque force possède un point d'application car les objets réels ne sont pas des points matériel mais des solides. Dans le modèle du point matériel on suppose que toutes les forces s'appliquent sur le point matériel.

**Seconde loi de Newton : le principe fondamental de la dynamique (PFD)**

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un point matériel  $M$ , de masse  $m$  est égale à la résultante  $\vec{F}_{ext \rightarrow M}$  des forces extérieures s'appliquant au point matériel.

$$\left. \frac{d\vec{p}_{M/\mathcal{R}_g}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{ext \rightarrow M}$$

**Remarque :**

Le PFD est une équation différentielle vectorielle, elle cache donc trois équations différentielles scalaires appelées équations du mouvements. Les solutions de ces équations du mouvements avec les conditions initiales données sont appelées équations horaires du mouvement.

### Troisième loi de Newton : le principe des actions réciproques

Soient deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$ . Si  $M_1$  exerce une force  $\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2}$  sur  $M_2$  alors le point  $M_2$  exerce une force  $\vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1}$  tel que :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

Les deux forces ont alors :

- Même direction ;
- Même intensité ;
- Des sens opposés.

### L'Interaction gravitationnelle

On considère deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de masse respectives  $m_1$  et  $m_2$  et de position dans le repère  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$   $\vec{OM}_1$  et  $\vec{OM}_2$ .

On caractérise alors la force gravitationnelle  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  de  $M_2$  sur  $M_1$  :

**Expression :** 
$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1}$$

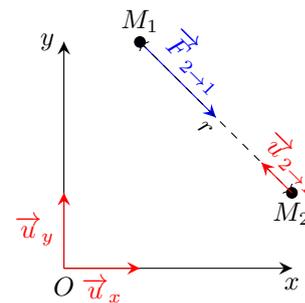
**direction :** colinéaire à  $\vec{M}_2 M_1$  ;

**Sens :** Toujours attractive.

**Norme :**  $\|\vec{F}_{2 \rightarrow 1}\| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$  ;

**Point d'application :** Le centre de gravité ;

**Type :** Force à distance.



avec  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  la constante de gravitation universelle,  $r$  la distance entre  $M_1$  et  $M_2$  et  $\vec{u}_{2 \rightarrow 1}$  le vecteur unitaire qui part de  $M_2$  en direction de  $M_1$ .

### Le poids

On considère une masse  $m$  soumise au champ de pesanteur terrestre  $\vec{g}$ . On caractérise alors le poids  $\vec{P}$  qu'exerce la Terre sur la masse  $m$  :

**Expression :** 
$$\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_z$$

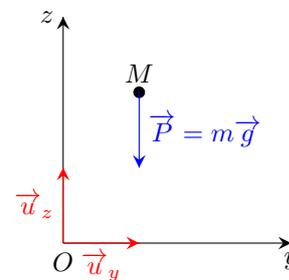
**direction :** verticale ;

**Sens :** dirigée vers le sol ;

**Norme :**  $\|\vec{P}\| = mg$  ;

**Point d'application :** Le centre de gravité de la masse  $m$  ;

**Type :** Force à distance.



avec  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  l'accélération de la pesanteur de direction verticale et dirigée vers le bas.

La direction et la norme de  $\vec{g}$  dépendent en pratique de l'altitude et des coordonnées du point  $M$  à la surface de la Terre.

### La tension d'un fil

On considère une masse  $m$  accrochée à un fil. Un fil inextensible possède une tension  $\vec{T}$  constante tout le long du fil.

On caractérise la tension  $\vec{T}$  qu'exerce le fil sur la masse  $m$  par :

**Expression :** 
$$\vec{T} = -\|\vec{T}\| \vec{u}$$

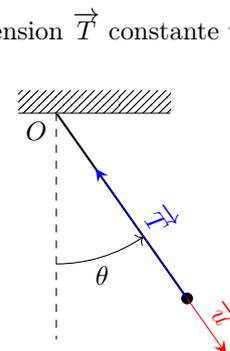
**direction :** colinéaire au fil ;

**Sens :** Du support vers le système ;

**Norme :** À calculer ;

**Point d'application :** L'attache du fil ;

**Type :** Force de contact.



**Réaction normale du support**

On considère une masse  $m$  en contact avec une surface. La surface exerce une force appelée réaction normale et notée  $\vec{R}_N$  sur la masse  $m$ . On caractérise alors  $\vec{R}_N$  :

**Expression :**  $\vec{R}_N = \|\vec{R}_N\| \vec{n}$

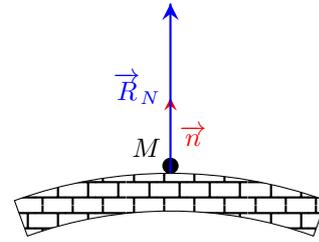
**direction :** orthogonale à la surface ;

**Sens :** De la surface vers la masse ;

**Norme :** À calculer ;

**Pt d'application :** Barycentre de la surface de contact ;

**Type :** Force de contact.



**Les frottements fluides**

On considère une masse  $m$  en mouvement par rapport à un fluide visqueux, le fluide exerce une action mécanique appelée frottement fluide  $\vec{f}$  qu'on peut modéliser suivant deux modèles :

**Expression :**  $\vec{f} = \begin{cases} -\lambda \vec{v}(M)_{/fluide} \\ -\kappa v \vec{v}(M)_{/fluide} \end{cases}$

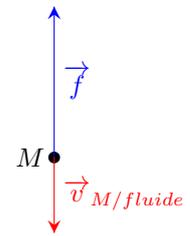
**direction :** tangente au mouvement, colinéaire au vecteur vitesse ;

**Sens :** opposé au vecteur vitesse, opposé au mouvement ;

**Norme :**  $\|\vec{f}\| = \begin{cases} \lambda v \\ \kappa v^2 \end{cases}$  ;

**Point d'application :** barycentre de la surface de contact ;

**Type :** Force de contact.



Ces deux modèles découlent de l'analyse via la mécanique des fluides, le modèle linéaire s'applique pour des vitesses faibles par rapport au fluide, et le modèle quadratique pour des vitesses plus importantes.

**La poussée d'Archimède**

Soit un système immergé dans un fluide au repos. La résultante des forces de pression est appelée poussée d'Archimède  $\vec{\Pi}_A$  est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.

On caractérise  $\vec{\Pi}_A$  par :

**Expression :**  $\vec{\Pi}_A = -\rho_{fluide} V \vec{g}$

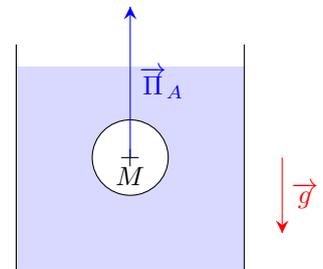
**direction :** verticale ;

**Sens :** vers la surface (vers le haut) ;

**Norme :**  $\|\vec{\Pi}_A\| = V \rho_{fluide} g$  ;

**Point d'application :** centre de gravité du fluide déplacé ;

**Type :** Force de contact.



Avec  $V$  le volume de fluide déplacé, et  $\rho_{fluide}$  la masse volumique du fluide déplacé.

**Méthode : Résoudre un problème de dynamique du point**

- Faire un schéma en utilisant des couleurs avec en évidence la ou les BOND utiles, les coordonnées du points  $M$ , d'autres paramètres importants.
- Définir le système étudié ! (Dans certains exercices plusieurs points matériels existent et il faut bien définir le système).
- Choisir un référentiel et préciser sa nature (galiléen, supposé galiléen, ou non galiléen).
- Faire le bilan des actions mécaniques extérieur s'appliquant au système, dans le bilan exprimer chaque action mécanique dans la BOND utilisée.
- Appliquer le PFD.
- Faire une projection du PFD dans la BOND choisie.
- Obtenir la ou les équations du mouvement.
- Résoudre la ou les équations du mouvement pour obtenir les équations horaires du mouvement.
- Obtenir l'équation de la trajectoire en éliminant le temps dans les équations horaire.

### 3 Le mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

**Definition : Champ de pesanteur uniforme**

On appelle champ de pesanteur uniforme lorsque la résultante des forces extérieures qui s'applique à un point  $M$  de masse  $m$  s'écrit :

$$\vec{F} = m \vec{g} \quad \text{où} \quad \vec{g} = C^{te}$$

**Propriété : Mouvement à accélération constante**

Dans un champ de pesanteur uniforme  $\vec{g}$  le mouvement d'un point  $M$  de masse  $m$  est à vecteur accélération constante tel que :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{g}$$

**Exemple : Chute libre**

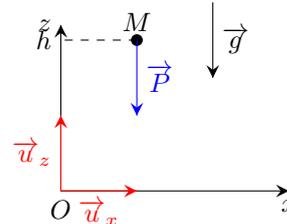
Soit un point  $M$  de masse  $m$ , lâché sans vitesse initiale d'une hauteur  $h$  :

**Système :**  $\{M(m)\}$

**Référentiel :** Terrestre supposé galiléen

**Bilan des forces :**  $\bullet \vec{P} = m \vec{g}$

**PFD :**  $m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = m \vec{g}$



**Coordonnées :** Cartésienne et mouvement à un degré de liberté.

$$\overline{OM} = z(t) \vec{u}_z \implies \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{z} \vec{u}_z \implies \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{z} \vec{u}_z$$

**Équation du mouvement :**  $/\vec{u}_z : \quad \ddot{z} = -g$

**Équation horaire :**  $\dot{z}(t) - \dot{z}(\theta) = -gt \implies z(t) - h = -\frac{1}{2}gt^2$

**Temps de chute :**  $z(t_f) = 0 \implies t_f = \sqrt{2h/g}$

**Vitesse d'impact :**  $|\dot{z}(t_f)| = \sqrt{2gh}$

**Exemple : Mouvement parabolique**

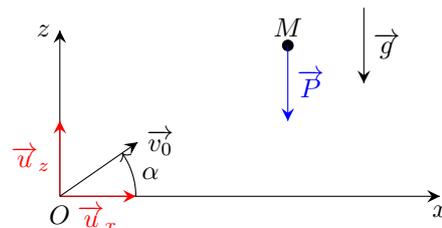
Soit un point  $M$  de masse  $m$ , lancé avec une vitesse  $\vec{v}_0$  en  $0$  à  $t = 0$  :

**Système :**  $\{M(m)\}$

**Référentiel :** Terrestre supposé galiléen

**Bilan des forces :**  $\bullet \vec{P} = m \vec{g}$

**PFD :**  $m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = m \vec{g}$



**Coordonnées :** Cartésienne et mouvement à deux degrés de liberté.

$$\overline{OM} = x(t) \vec{u}_x + z(t) \vec{u}_z \implies \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{z} \vec{u}_z \implies \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{z} \vec{u}_z$$

**Équations du mouvements :**  $/\vec{u}_z : \quad \ddot{z} = -g$

**Équation horaire :**

$\dot{z}(t) - v_0 \sin(\alpha) = -gt \implies z(t) - z(\theta) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t$

**Équation de la trajectoire :** soit  $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t$  d'où  $t(x) = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$  pour  $\alpha \neq \pi/2$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t$$

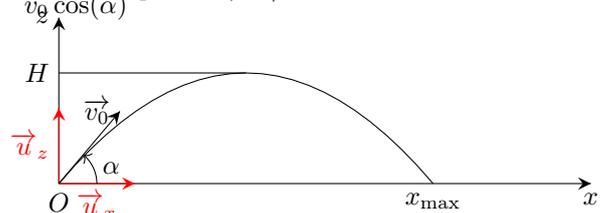
$$z(x) = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x$$

$$z(x) = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2} (1 + \tan^2(\alpha)) + \tan(\alpha)x$$

**Équations du mouvements :**  $/\vec{u}_x : \quad \ddot{x} = 0$

**Équation horaire :**

$\dot{x}(t) - v_0 \cos(\alpha) = 0 \implies x(t) - x(\theta) = v_0 \cos(\alpha)t$



**Portée :** soit  $x_{\max} \neq 0$  tel que  $z(x_{\max}) = 0 \implies x_{\max} = \frac{2v_0}{g} \cos(\alpha) \sin(\alpha)$

**Hauteur maximale :** instant  $t_h$  tel que  $\dot{z}(t_h) = 0 \implies t_h = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$

$$H = z(t_h) = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$$

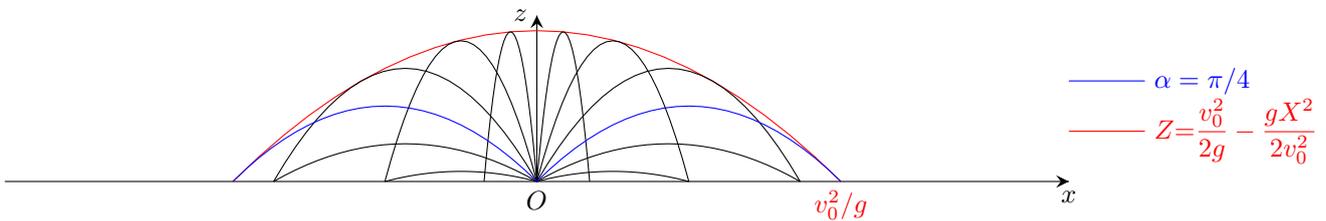
**Exemple : Parabole de sureté**

On cherche tous les points  $M(X, Z)$  accessible via un tir de vitesse initiale  $v_0$  fixé et en cherchant un angle initial  $\alpha$  :

$$Z = -\frac{1}{2}g \frac{X^2}{v_0^2} (1 + \tan^2(\alpha)) + \tan(\alpha)X \quad \frac{1}{2}g \frac{X^2}{v_0^2} \tan^2(\alpha) - X \tan(\alpha) + Z - \frac{1}{2}g \frac{X^2}{v_0^2}$$

Il existe une solution à cette équation si :  $\Delta \geq 0$

$$\Delta = X^2 - 4 \times \left( Z - \frac{1}{2}g \frac{X^2}{v_0^2} \right) \frac{1}{2}g \frac{X^2}{v_0^2} = X^2 \left( 1 - \frac{2gZ}{v_0^2} - g^2 \frac{X^2}{v_0^2} \right) \implies Z \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gX^2}{2v_0^2}$$



### 4 Mouvement avec forces de frottements fluides

**Definition : Vitesse limite**

Lorsqu'on est en présence de frottement fluide, on suppose que le point  $M$  de masse  $m$  va suivre un mouvement transitoire jusqu'à atteindre une vitesse constante où les forces se compensent et le système devient pseudo-isolé. Alors :

$$\vec{v}(M)_{f\neq} = \vec{v}_{lim} = C^{te}$$

Est une solution particulière de l'équation du mouvement.

**Definition : Temps caractéristique**

Si on lâche sans vitesse initiale une masse  $m$  dans un champ de pesanteur  $\vec{g}$ . Les frottements sont initialement négligeable devant les forces de frottement.

On peut alors supposer que la vitesse va évoluer pendant une durée  $\tau$  comme :  $v(t) = gt$

On définit alors la durée  $\tau$  comme le temps pour atteindre la vitesse limite :

$$v(\tau) = g\tau = v_{lim}$$

**Exemple : Force de frottement fluide linéaire**

Soit un point  $M$  de masse  $m$ , lancé avec une vitesse  $\vec{v}_0$  en 0 à  $t = 0$  :

**Système :**  $\{M(m)\}$

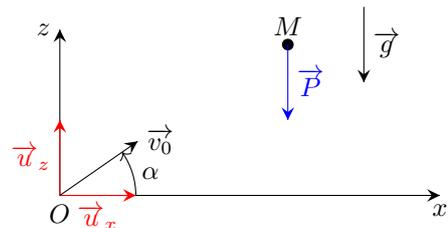
**Référentiel :** Terrestre supposé galiléen

**Bilan des forces :**

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$  ;
- $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$

**FPD :**  $m\vec{a}(M)_{f\neq} = m\vec{g} - \lambda\vec{v}$

**Équations vectorielle du mouvements :**  $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\lambda}{m}\vec{v} = \vec{g}$



**Vitesse limite** : on cherche une solution  $\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}} = C^{t\vec{e}} \implies \frac{d\vec{v}_{\text{lim}}}{dt} = \vec{0}$

$$\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{m\vec{g}}{\lambda}$$

**Temps caractéristique** : soit  $v(t) = gt$  et  $v(\tau) = v_{\text{lim}}$

$$v_{\text{lim}} = g\tau \implies \tau = \frac{m}{\lambda}$$

**Équation adimensionnée** : on pose  $\tilde{t} = t/\tau$  et  $\vec{u} = \vec{v}/v_{\text{lim}}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} \frac{d\vec{u}}{d\tilde{t}} \implies \frac{d\vec{u}}{d\tilde{t}} + \vec{u} = -\vec{u}_z$$

**Temps long** : (vitesse limite)  $t \gg \tau$  alors le terme dérivé est négligeable et on obtient :  $\vec{u} \simeq -\vec{u}_z$ .

**Temps cours** : soit  $t \ll \tau$  alors on peut faire un DL<sub>1</sub> de  $\vec{u}$

$$\vec{u}(\tilde{t}) = \vec{u}(0) + \frac{d\vec{u}}{d\tilde{t}}(0)(\tilde{t} - 0)$$

En utilisant l'équation différentielle et  $\vec{u}_0 = \vec{v}_0/v_{\text{lim}}$  on obtient :

$$\vec{u} \simeq \vec{u}_0 - (\vec{u}_0 + \vec{u}_z)\tilde{t}$$

Soit  $\|\vec{u}_0\| \ll 1$  :

$$\vec{u} \simeq \vec{u}_0 - \tilde{t}\vec{u}_z \iff \vec{v} = \vec{v}_0 - gt\vec{u}_z$$

Ce qui revient à considérer un mouvement sans frottement.

Soit  $\|\vec{u}_0\| \gg 1$  :

$$\vec{u} \simeq \vec{u}_0(1 - \tilde{t}) \iff \vec{v} = \vec{v}_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

Ce qui donne un mouvement rectiligne uniformément décéléré.

**Exemple : Force de frottement fluide quadratique**

Soit un point  $M$  de masse  $m$ , lancé avec une vitesse  $\vec{v}_0$  en 0 à  $t = 0$  :

**Système** :  $\{M(m)\}$

**Référentiel** : Terrestre supposé galiléen

**Bilan des forces** :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$  ;
- $\vec{f} = -\kappa v\vec{v}$

**PFD** :  $m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = m\vec{g} - \kappa v\vec{v}$

**Équations vectorielle du mouvements** :  $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\kappa}{m}v\vec{v} = \vec{g}$

**Vitesse limite** : on cherche une solution  $\vec{v} = \vec{v}_{\text{lim}} = C^{t\vec{e}} \implies \frac{d\vec{v}_{\text{lim}}}{dt} = \vec{0}$

$$\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{m\vec{g}}{\kappa v_{\text{lim}}} \implies v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\kappa}}$$

**Temps caractéristique** : soit  $v(t) = gt$  et  $v(\tau) = v_{\text{lim}}$

$$v_{\text{lim}} = g\tau \implies \tau = \sqrt{\frac{m}{g\kappa}}$$

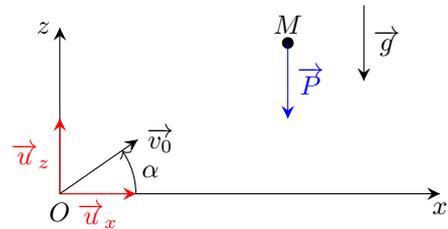
**Équation adimensionnée** : on pose  $\tilde{t} = t/\tau$  et  $\vec{u} = \vec{v}/v_{\text{lim}}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} \frac{d\vec{u}}{d\tilde{t}} \implies \frac{d\vec{u}}{d\tilde{t}} + u\vec{u} = -\vec{u}_z$$

**Temps long** : (vitesse limite)  $t \gg \tau$  alors le terme dérivé est négligeable et on obtient :  $\vec{u} \simeq -\vec{u}_z$ .

**Temps cours** : soit  $t \ll \tau$  alors on peut faire un DL<sub>1</sub> de  $\vec{u}$

$$\vec{u}(\tilde{t}) = \vec{u}(0) + \frac{d\vec{u}}{d\tilde{t}}(0)(\tilde{t} - 0)$$



En utilisant l'équation différentielle et  $\vec{u}_0 = \vec{v}_0/v_{lim}$  on obtient :

$$\vec{u} \simeq \vec{u}_0 - (u_0\vec{u}_0 + \vec{u}_z)\tilde{t}$$

Soit  $\|\vec{u}_0\| \ll 1$  :

$$\vec{u} \simeq \vec{u}_0 - \tilde{t}\vec{u}_z \iff \vec{v} = \vec{v}_0 - gt\vec{u}_z$$

Ce qui revient à considérer un mouvement sans frottement.

Soit  $\|\vec{u}_0\| \gg 1$  :

$$\vec{u} \simeq \vec{u}_0(1 - u_0\tilde{t}) \iff \vec{v} = \vec{v}_0 \left(1 - \frac{v_0 t}{v_{lim} \tau}\right)$$

Ce qui donne un mouvement rectiligne uniformément décéléré.

## 5 Mouvement circulaire

### Exemple : Pendule simple

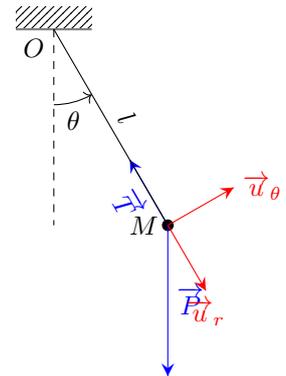
On considère un point matériel  $M$  de masse  $m$  attaché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur  $l$ . On cherche à étudier le mouvement d'oscillation du pendule.

**Système :** Point matériel  $M$  de masse  $m$ .

**Référentiel :** Terrestre noté  $\mathcal{R}_T$  supposé galiléen et de repère  $\mathcal{R}_T(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

**Bilan des forces :** dans la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

- $\vec{P} = m\vec{g} = m[(\vec{g} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r + (\vec{g} \cdot \vec{u}_\theta)\vec{u}_\theta] = mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)$  ;
- $\vec{T} = -T\vec{u}_r$  avec  $T = \|\vec{T}\|$



**Principe fondamental de la dynamique :**

$$\left. \frac{d\vec{P}_{M/\mathcal{R}_T}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_T} = \vec{P} + \vec{T} \iff m \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}_T}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_T} = mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta) - T\vec{u}_r$$

Comme la longueur  $l$  est constante alors on a :

$$\vec{OM} = l\vec{u}_r \implies \vec{v}_{M/\mathcal{R}_T} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \implies \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}_T}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_T} = -l\dot{\theta}^2\vec{u}_r + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

On projette alors le PFD sur  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  :

$$\begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 &= -T + mg \cos \theta \\ ml\ddot{\theta} &= -mg \sin \theta \end{cases}$$

On obtient alors l'équation du moment :  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta$

et l'expression de la norme de la tension du fil :  $T = m[g \cos \theta + l\dot{\theta}^2]$

Dans le cas où  $\theta \ll 1$  on a alors :

$$\sin \theta = \theta + o(\theta) \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta \approx \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta$$

On obtient alors l'équation du mouvement d'un OH de solution :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  et  $\theta_0$  l'amplitude d'oscillation.

On parle d'Isochronisme car la pulsation de l'OH ne dépend pas de l'amplitude  $\theta_0$ .

### Remarque :

Ce n'est pas le cas général. La période du pendule peut alors se calculer numériquement ou en faisant un développement limité d'ordre plus élevé.

## Mécanique 3 : Les oscillateurs mécanique

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>1.4. Oscillateurs libres et forces</b>	
Oscillateur harmonique. Exemples du circuit LC et de l'oscillateur mécanique.	Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. Réaliser un bilan énergétique.
Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. <b>Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique.</b> <b>Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.</b>
Résonance.	Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase. <b>Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.</b>
<b>1.5. Filtrage linéaire</b>	
Signaux périodiques.	Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales. Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal. Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert. <b>Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.</b>
Modèles de filtres passifs : passe-bas et passe-bande d'ordre 2.	Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.).

### 1 Le système masse-ressort

#### Definition : Équation différentielle d'un OH

Un OH à 1 degré de liberté est un système dont l'équation du mouvement est de la forme :  $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$

où  $X = x(t) - x_{eq}$  est l'écart à la position d'équilibre et  $\omega_0$  la pulsation propre.

La solution est donnée par :  $X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes d'intégrations à déterminer avec  $X(0)$  et  $\dot{X}(0)$ .

**Loi de Hook**

On considère une masse  $m$  accrochée à un ressort de longueur à vide  $l_0$  et de constante de raideur  $k$ . Lorsque le ressort est déformé et qu'il possède une longueur  $l$  il exerce une action mécanique sur la masse  $m$  appelée force de rappel  $\vec{F}_r$ . On caractérise alors  $\vec{F}_r$  :

**Expression :**  $\vec{F}_r = -k(l - l_0)\vec{u}$

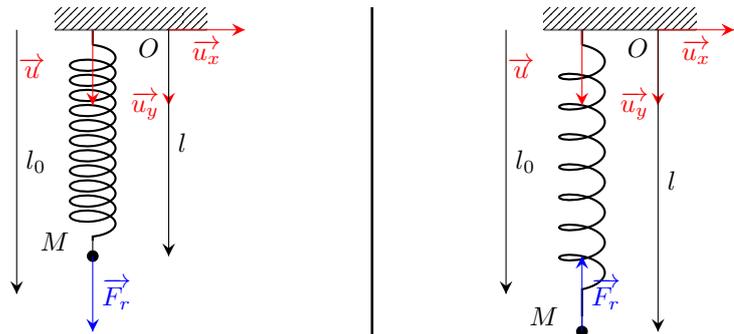
**direction :** colinéaire au ressort ;

**Sens :** opposé à l'élongation  $(l - l_0)\vec{u}$  ;

**Norme :**  $\|\vec{F}_r\| = k|l - l_0|$  ;

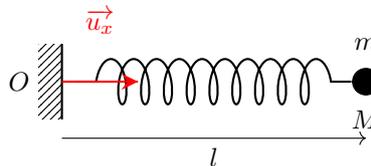
**Point d'application :** Point d'attache du ressort ;

**Type :** Force de contact.



**Exemple : Le ressort horizontal non amorti**

On considère un point  $M$  de masse  $m$  lié à un ressort de raideur  $k$  et longueur à vide  $l_0$  qui est fixé à son extrémité en  $O$ . Le ressort et la masse sont posés sur un support horizontal et la masse glisse sans frottement.



**Référentiel :** Terrestre supposé galiléen.

**Système :**  $\{M (m)\}$  **Bilan des actions mécaniques :**

- $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$  ;
- $\vec{R}_N = R_N\vec{u}_z$  ;
- $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_x$  ;

**PFD :**  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}$  projection selon  $Ox$  :  $m\ddot{x} = -k(x - l_0)$

**Équation du mouvement :**  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0$  on pose  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

## 2 Les oscillateurs amorti

**Definition : Rappel**

On considère que le système masse-ressort amorti est soumis à une force de frottement fluide linéaire :  $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$   
 L'équation du mouvement vérifiée par l'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre  $X = x - X_{eq}$  peut se mettre sous la forme :  $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$

Pour résoudre cette équation on doit chercher les racines de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \implies \Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{4Q^2} - 4 \right)$$

- Si  $\Delta > 0$  alors  $Q < \frac{1}{2}$  et le régime est apériodique :  $r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$   $r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$   
 on pose alors  $\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$  et la solution s'écrit :  $X(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A\cosh(\Omega t) + B\sinh(\Omega t)]$   
 avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  deux constantes d'intégrations à déterminer avec  $X(0)$  et  $\dot{X}(0)$ .
- Si  $\Delta = 0$  alors  $Q = \frac{1}{2}$  et le régime est critique :  $r_1 = r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q}$

La solution s'écrit :  $X(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A + Bt)$

avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  deux constantes d'intégrations à déterminer avec  $X(0)$  et  $\dot{X}(0)$ .

- Si  $\Delta < 0$  alors  $Q > \frac{1}{2}$  et le régime est pseudo-périodique :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

on pose alors  $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$  et la solution s'écrit :  $X(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$

avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  deux constantes d'intégrations à déterminer avec  $X(0)$  et  $\dot{X}(0)$ .

**Exemple : Le ressort vertical amorti**

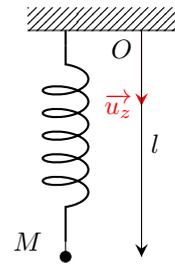
Soit un point  $M$  de masse  $m$  lié à un ressort vertical dont l'extrémité haute est fixée à un point  $O$ .

Le point  $M$  est soumis à une force de frottement fluide  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ .

**Système :**  $\{M (m)\}$

**Bilan des actions mécaniques :**

- $\vec{P} = mg\vec{u}_z$ ;
- $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{z} \vec{u}_z$
- $\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}_z$ ;



**PFD :**  $m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{f}$  On projette selon  $Ox$  :  $m\ddot{z} = -k(z - l_0) + mg - \lambda\dot{z}$

**Position d'équilibre :** On cherche  $z = z_{\text{éq}} = C^{te}$  solution de l'équation précédente avec  $\dot{z} = \ddot{z} = 0$  :

$$0 = -k(z_{\text{éq}} - l_0) + mg - 0 \implies z_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

**Équation du mouvement :**  $\ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m} \left( l_0 + \frac{mg}{k} \right)$

**Allongement du ressort :** Par commodité on pose  $Z = z - z_{\text{éq}}$  tel que  $\dot{z} = \dot{Z}$  et  $\ddot{z} = \ddot{Z}$

$$\ddot{Z} + \frac{\lambda}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = 0$$

et on pose  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$

### 3 Les oscillations forcées

**Definition : Régime forcé**

Soit un système masse-ressort soumis à une force excitatrice :  $\vec{F}(t) = F_0 \cos(\omega t)$  On définit le régime des oscillations forcées pour un oscillateur linéaire à un degré de liberté, un système de masse  $m$  dont l'équation du mouvement se met sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

où  $F(t)$  est une force excitatrice de la forme :  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ .

La solution particulière  $x_p(t)$  peut donc se mettre sous la forme :

$$x_p(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

avec  $X_m$  l'amplitude d'oscillation et  $\varphi$  le déphasage par rapport à l'excitation.

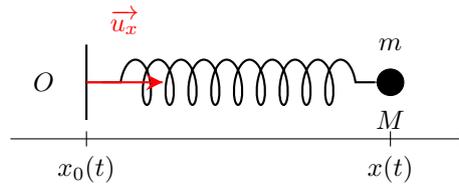
On pose alors l'abscisse complexe  $\underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}$  où  $\underline{X}_m$  est l'amplitude complexe tel que  $x_p = \Re e(\underline{x})$ ,  $X_m = |\underline{X}_m|$  et  $\varphi = \arg(\underline{X}_m)$ .

On obtient après calcul :

$$\underline{X}_m = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

**Exemple : Ressort horizontal accroché à un point oscillant**

On considère un point  $M$  de masse  $m$  accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur  $k$  et lié en un point  $O$  mobile de position  $x_0(t) = A \cos(\omega t)$ . Le point  $M$  est soumis aux forces de frottements fluides  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ .

**4 Capacité numérique****Definition : Méthode d'Euler appliquée aux équation d'ordre 2**

On considère une équation différentielle d'ordre 2 de la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = F\left(\frac{dy}{dt}(t), y(t), t\right) \quad \text{avec } t \in [t_0, t_f] \text{ et } y(t_0) = y_0 \text{ et } \frac{dy}{dt}(t_0) = x_0$$

On peut appliquer la méthode d'Euler en considérant deux équations différentielle d'ordre 1 couplée :

$$\frac{dy}{dt}(t) = x(t) \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = F(x(t), y(t), t)$$

On peut alors construire les suites de  $N$  nombres suivantes :

- $t_k = t_0 + k \times \delta t$  avec  $k \in [0; N - 1]$  et  $\delta t = \frac{t_f - t_0}{N - 1}$
- $y_{k+1} = y_k + x_k \times \delta t$  avec  $y_0 = y_0$
- $x_{k+1} = x_k + F(x_k, y_k, t_k) \times \delta t$  avec  $x_0 = x_0$

Les  $N$  couples  $(t_k, y_k)$  les coordonnées des  $N$  points approchés de la courbe  $y(t)$ .

Les  $N$  couples  $(t_k, x_k)$  représentent les coordonnées des  $N$  points approchés de la courbe  $\frac{dy}{dt}(t)$ .

**Propriété : Capacité numérique 3**

À l'aide de python, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non linéaire et faire apparaître l'effet des termes non linéaires.

**Propriété : Création fonction Euler2**

On cherche à définir une nouvelle fonction python qui prendra en paramètre  $y_0, x_0, t_0, t_f, F$  les paramètres mathématiques et  $N$  le paramètre numérique.

```
import numpy as np
def Euler(y0,x0,t0,tf,F,N):
    y,x=np.zeros(N),np.zeros(N)
    dt=(tf-t0)/(N-1)
    t=np.array([t0+k*dt for k in range(N)])
    y[0]=y0
    x[0]=x0
    for k in range(1,N):
        y[k]=y[k-1]+x[k]*dt
        x[k]=x[k-1]+F(y[k-1],x[k-1],t[k-1])*dt
    return t,y,x

def F(y,x,t):
    return ..... #à compléter en fonction du problème à résoudre
```

## Mécanique 4 : Énergie, travail, puissance

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel</b>	
Puissance, travail et énergie cinétique Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.
<b>Champ de force conservative et énergie potentielle</b> Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique. Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. Dédire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.
<b>Énergie mécanique</b> Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
Mouvement conservatif à une dimension.	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Dédire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
Positions d'équilibre. Stabilité.	Dédire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.

### 1 Les grandeurs énergétiques

#### Definition : Puissance d'une force

La puissance d'une force  $\vec{F}$  appliquée à un point  $M$  animé d'une vitesse  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est la grandeur instantanée :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \text{ exprimée en watt (W)}$$

#### Definition : Travail d'une force

Le travail élémentaire, entre  $t$  et  $t + dt$ , d'une force  $\vec{F}$  appliquée à un point matériel  $M$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est défini par :

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P} dt = \vec{F} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} dt = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

avec  $d\vec{l}$  le déplacement élémentaire du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

Pour obtenir le travail d'une force  $\vec{F}$  appliquée à un point matériel  $M$  qui se déplace, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , de la position  $M_1$  à l'instant  $t_1$  à la position  $M_2$  à l'instant  $t_2$ , est défini en faisant la somme des travaux élémentaires :

$$W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

La travail d'une force s'exprime en joule (J).

**Propriété : Force motrice/résistante**

On dit qu'une force  $\vec{F}$  est :

- Motrice si  $\mathcal{P} > 0$  ( $W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} > 0$ ) ;
- Résistante si  $\mathcal{P} < 0$  ( $W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} < 0$ ).

**Propriété : Cas d'un point matériel soumis à plusieurs forces**

Soit un point matériel soumis à plusieurs forces extérieures  $\vec{F}_i$  dont la somme vaut  $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ , on montre que :

$$W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{M_1}^{M_2} \left( \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_i \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N W(\vec{F}_i)_{M_1 \rightarrow M_2}$$

On obtient alors la relation :

$$W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} = \sum_{i=1}^N W(\vec{F}_i)_{M_1 \rightarrow M_2}$$

**Propriété : Cas particulier d'une force vectoriellement constante**

Soit un point matériel  $M$  soumis à une force extérieure  $\vec{F}$  de vecteur constant au cours du mouvement du point  $A$  au point  $B$  (norme constante, direction constante, sens constant). On calcule alors le travail de la force  $\vec{F}$  au cours du mouvement :

$$W(\vec{F})_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{l} = \vec{F} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA})$$

On obtient alors la relation :

$$W(\vec{F})_{A \rightarrow B} = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

Valable uniquement dans le cas d'une force constante vectoriellement, le reste du temps il faut calculer l'intégrale du travail élémentaire.

**Définition : Énergie cinétique d'un point matériel**

L'énergie cinétique d'un point matériel  $M$  de masse  $m$ , animé d'une vitesse  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , est définie par :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \vec{v}_{M/\mathcal{R}}^2$$

L'énergie cinétique s'exprime en joule (J).

**Remarque :**

Le travail exprime l'énergie reçue par le point matériel au cours du mouvement de  $M_1$  vers  $M_2$ . C'est un transfert d'énergie. Il ne faut pas confondre l'énergie d'un système comme son énergie cinétique qui est une variable d'état du système et ne dépend donc que de l'état du système.

Tandis qu'une énergie est calculée à un instant donnée, un transfert d'énergie s'effectue au cours d'un mouvement. Le travail n'est donc pas une variable d'état du système.

## 2 Le théorème de l'énergie cinétique

**Théorème de la puissance cinétique**

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces qui lui sont appliquées :

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

**Démonstration :**

On considère un point matériel  $M$  de masse  $m$  en mouvement dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  et soumis à  $N$  forces  $\vec{F}_i$ . On applique le principe fondamental de la dynamique au point  $M$  :

$$m \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_g} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$m \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_g} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}_g} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}$$

$$\frac{1}{2} m \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}^2}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_g} = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}(\vec{F}_i) \implies \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_g} = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

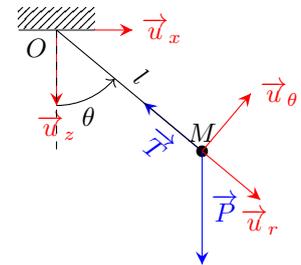
**Exemple :**

On étudie un pendule pesant, on assimile un solide de masse  $m$  à un point matériel accroché à un fil idéal de masse négligeable et de longueur  $l$  supposée inextensible.

**Système :** Point matériel  $M$  de masse  $m$ .

**Référentiel :** Terrestre noté  $\mathcal{R}_T$  supposé galiléen et de repère  $\mathcal{R}_T(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

**Bilan des forces :** dans la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$



- $\vec{P} = m\vec{g} = m[(\vec{g} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r + (\vec{g} \cdot \vec{u}_\theta)\vec{u}_\theta] = mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)$  ;
- $\vec{T} = -T\vec{u}_r$  avec  $T = \|\vec{T}\|$

**Théorème de la puissance cinétique :** (TPC)

On exprime la vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}_T} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \implies \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

On applique le TPC :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_T} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{T}) = mgl\dot{\theta}\vec{u}_z \cdot \vec{u}_\theta + \|\vec{T}\|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta$$

$$= -mgl\dot{\theta}\sin(\theta) + 0$$

$$ml\ddot{\theta} = -mgl\dot{\theta}\sin(\theta) \implies \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

On retrouve l'équation du mouvement du pendule pesant.

**Théorème de l'énergie cinétique**

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel  $M$  qui se déplace de la position  $M_1$  à l'instant  $t_1$  à la position  $M_2$  à l'instant  $t_2$  est égale à la somme des travaux des forces qui lui sont appliquées :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(t_2) - \mathcal{E}_c(t_1) = \sum_{i=1}^N W(\vec{F}_i)_{M_1 \rightarrow M_2}$$

**Démonstration :**

On considère un point matériel  $M$  de masse  $m$  en mouvement dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  et soumis à  $N$  forces  $\vec{F}_i$ . On applique le théorème de la puissance cinétique au point  $M$  :

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left. \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \mathcal{P}(\vec{F}_i) dt$$

$$\mathcal{E}_c(t_2) - \mathcal{E}_c(t_1) = \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(\vec{F}_i) dt$$

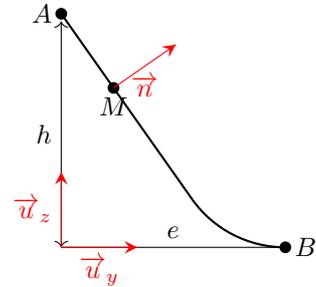
$$\Delta\mathcal{E}_c = \sum_{i=1}^N W(\vec{F}_i)_{M_1 \rightarrow M_2}$$

**Exemple :**

Soit un pratiquant du saut à ski, il part sans élan du sommet A d'un tremplin. La vitesse du skieur en B doit être inférieure à  $v_{max} = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On réalise une étude pour un skieur qui s'élanche sans vitesse initiale en négligeant les frottements pour évaluer la hauteur  $h_{max}$  du tremplin et sa longueur  $e_{max}$ .

**Système :** Skieur assimilé à un point matériel M de masse m.

**Référentiel :** Terrestre noté  $\mathcal{R}_T$  supposé galiléen et de repère  $\mathcal{R}_T(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .



**Bilan des forces :**

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$
- $\vec{R}_N = \|\vec{R}_N\|\vec{n} = R_N\vec{n}$

**Théorème de l'énergie cinétique :** (TEC) On calcule la variation d'énergie cinétique entre l'instant  $t_A = 0 \text{ s}$  et l'instant  $t_B$  :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(t_B) - \mathcal{E}_c(t_A) = \mathcal{E}_c(t_B) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}_T}\|^2(t_B) < \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

On calcule les travaux des forces sur le trajet  $A \rightarrow B$  :

$$W(\vec{P})_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{l} = \int_{z_A}^{z_B} -mgdz = mgh$$

$$W(\vec{R}_N)_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{R}_N \cdot d\vec{l} = \int_A^B \|\vec{R}_N\|\vec{n} \cdot d\vec{l} = 0$$

On applique alors le TEC :

$$\frac{1}{2}m\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}_T}\|^2(t_B) = mgh < \frac{1}{2}mv_{max}^2 \implies h_{max} = \frac{v_{max}^2}{2g}$$

La hauteur maximale est indépendante de la longueur e du tremplin dans ce modèle. Un modèle plus évolué avec prise en compte du travail des forces de frottements feraient intervenir la longueur e du tremplin.

**Definition : Force conservative**

Une force est dite conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi.

**Propriété : Force conservative**

Il existe alors une fonction  $\mathcal{E}_p(\vec{OM})$  de la position du point M telle que le travail élémentaire d'une force conservative puisse s'écrire :

$$\delta W(\vec{F}_c) = -d\mathcal{E}_p$$

De cette manière le travail ne dépend que des valeurs initiales et finales de la fonction  $\mathcal{E}_p(\vec{OM})$

**Definition : Énergie potentielle**

On définit la fonction énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(\vec{OM})$  liée à une force conservative  $\vec{F}_c$  qui dépend de la position du point M telle que définie à une constante près on a :

$$\vec{F}_c \cdot d\vec{l} = -d\mathcal{E}_p$$

L'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  d'un système se définit comme la somme des énergies potentielles des forces conservatives appliquées.

**Propriété : Gradient**

Lorsqu'une force est conservative et qu'on peut définir son énergie potentielle, on définit alors l'opérateur vectoriel gradient :

$$\vec{F}_c = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p \cdot \vec{dl} = d\mathcal{E}_p$$

L'opérateur gradient d'une fonction de plusieurs variable d'espaces dépend du système de coordonnées utilisé. En coordonnées cartésiennes il s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

où  $\frac{\partial f}{\partial x}$  correspond à la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x$  en considérant  $y$  et  $z$  comme des constantes,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  correspond à la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $y$  en considérant  $x$  et  $z$  comme des constantes, etc.

**Propriété : Travail d'une force conservative**

Si un point  $M$  possède une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$ , alors il est soumis à une force extérieure  $\vec{F}_c$  conservative et son travail entre la position  $M_1$  et la position  $M_2$  s'exprime :

$$W(\vec{F}_c)_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_c \cdot \vec{dl} = - \int_{M_1}^{M_2} d\mathcal{E}_p = -(E_p(M_2) - E_p(M_1)) = -\Delta\mathcal{E}_p$$

**Définition : Énergie mécanique**

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  d'un système est la somme de son énergie cinétique  $\mathcal{E}_c$  et de son énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

**Démonstration :**

On considère un point matériel  $M$  de masse  $m$  en mouvement dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  et soumis à  $N$  forces  $\vec{F}_i$  dont  $N_c$  forces conservatives  $\vec{F}_i^c$  et  $N_{nc}$  forces non conservatives  $\vec{F}_i^{nc}$ . On applique le théorème de l'énergie cinétique au point  $M$  entre le point  $M_1$  à l'instant  $t_1$  et le point  $M_2$  à l'instant  $t_2$  :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \sum_{i=1}^N W(\vec{F}_i)_{M_1 \rightarrow M_2}$$

$$\Delta\mathcal{E}_c = \sum_{i=1}^{N_c} W(\vec{F}_i^c)_{M_1 \rightarrow M_2} + \sum_{i=1}^{N_{nc}} W(\vec{F}_i^{nc})_{M_1 \rightarrow M_2}$$

$$\Delta\mathcal{E}_c = -\Delta\mathcal{E}_p + \sum_{i=1}^{N_{nc}} W(\vec{F}_i^{nc})_{M_1 \rightarrow M_2}$$

$$\Delta\mathcal{E}_m = \Delta\mathcal{E}_c + \Delta\mathcal{E}_p = \sum_{i=1}^{N_{nc}} W(\vec{F}_i^{nc})_{M_1 \rightarrow M_2}$$

**Théorème de l'énergie mécanique**

Dans un référentiel galiléen, la variation  $\Delta\mathcal{E}_m$  de l'énergie mécanique, entre deux positions  $M_1$  et  $M_2$ , d'un point matériel soumis à des forces conservatives de résultante  $\vec{F}_c$  vaut :

$$\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m(M_2) - \mathcal{E}_m(M_1) = W(\vec{F}_{nc})_{M_1 \rightarrow M_2}$$

Si toutes les forces qui travaillent sont conservatives alors l'énergie mécanique est une constante du mouvement et le système est qualifié de conservatif.

**Propriété : Énergie potentielle de pesanteur**

Soit un référentiel terrestre de repère  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  avec  $\vec{u}_z$  orienté vers le haut. La force  $\vec{P}$  d'un point  $M$  de masse  $m$  s'exprime :

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_z \implies \delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{dl} = -mgdz = -d\mathcal{E}_{p,p}$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur  $\mathcal{E}_{p,p}$  à partir de l'intégrale :

$$\mathcal{E}_{p,p}(z) = \int_{z_0}^z mg dz = mg(z - z_0)$$

#### Propriété : Énergie potentielle gravitationnelle

Soit un référentiel galiléen de repère  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  avec un point matériel  $O$  de masse  $m_0$  qui exerce une force gravitationnelle sur  $M$  de masse  $m$  :

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = -G \frac{mm_0}{r^2} \vec{u}_r \implies \delta W(\vec{F}_{O \rightarrow M}) = \overrightarrow{F_{O \rightarrow M}} \cdot \vec{dl} = -G \frac{mm_0}{r^2} dr = -d\mathcal{E}_{p,G}$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle  $\mathcal{E}_{p,G}$  à partir de l'intégrale :

$$\mathcal{E}_{p,G}(r) = \int_{r_0}^r G \frac{mm_0}{r^2} dr = -Gmm_0 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

#### Propriété : Énergie potentielle élastique

Soit un référentiel galiléen de repère  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . La force  $\vec{F}_r$  de rappel qu'exerce un ressort de longueur  $\vec{l} = l\vec{u}_x$  et de longueur à vide  $\vec{l} = l_0\vec{u}_x$  sur un point  $M$  s'exprime :

$$\vec{F}_r = -k(\vec{l} - \vec{l}_0) \implies \delta W(\vec{F}_r) = \vec{F}_r \cdot \vec{dl} = -k(l - l_0)dl = -d\mathcal{E}_{p,el}$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle élastique  $\mathcal{E}_{p,el}$  à partir de l'intégrale :

$$\mathcal{E}_{p,el}(l) = \int_{l_1}^l k(l - l_0)dl = \frac{1}{2}(l - l_0)^2 - \frac{1}{2}(l_1 - l_0)^2$$

### 3 Étude qualitative de mouvements à une dimension

Dans cette partie on considère le mouvement conservatif à une dimension d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ . Le mouvement est selon l'axe  $Ox$  de vecteur unitaire  $\vec{u}_x$  et de vecteur position  $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$  et de résultante des forces  $F(x) = \vec{F} \cdot \vec{u}_x$ .

#### Definition : Position d'équilibre

Une position d'équilibre d'un système mécanique est une position telle que si on abandonne sans vitesse le système dans cette position, il y reste.

#### Propriété : Position d'équilibre

Soit un point matériel  $M$  de masse  $m$  en mouvement conservatif dans le référentiel  $\mathcal{R}_g$ . Le point  $M$  possède une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(x)$ . À l'équilibre le point  $M$  peut alors être aux positions  $x_{eq}$  tel que la somme des forces appliquées au point soit nulle :

$$F(x = x_{eq}) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x = x_{eq}) = 0$$

#### Definition : Stabilité

La stabilité d'une position d'équilibre se définit en abandonnant le système sans vitesse au voisinage de cette position :

- si le système se rapproche de sa position d'équilibre, c'est que celle-ci est stable ;
- si le système s'éloigne de sa position d'équilibre, c'est que celle-ci est instable.

#### Propriété : Stabilité

Soit un point matériel  $M$  de masse  $m$  en mouvement conservatif dans le référentiel  $\mathcal{R}_g$ . Le point  $M$  possède une énergie

potentielle  $\mathcal{E}_p(x)$ . On étudie la position d'équilibre  $x_{eq}$  en posant  $x = x_{eq} + \delta x$  :

$$F(x_{eq} + \delta x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x + \delta x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x = x_{eq}) - \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x = x_{eq})\delta x + o(\delta x)$$

On a alors :

- Un équilibre stable si pour  $\delta x > 0$  on a  $F(x) < 0$  pour que la force ramène le point vers la gauche donc :

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x = x_{eq}) > 0$$

La position d'équilibre correspond à un minimum local de  $\mathcal{E}_p(x)$ .

- Un équilibre instable si pour  $\delta x > 0$  on a  $F(x) > 0$  pour que la force ramène le point vers la gauche donc :

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x = x_{eq}) < 0$$

La position d'équilibre correspond à un maximum local de  $\mathcal{E}_p(x)$ .

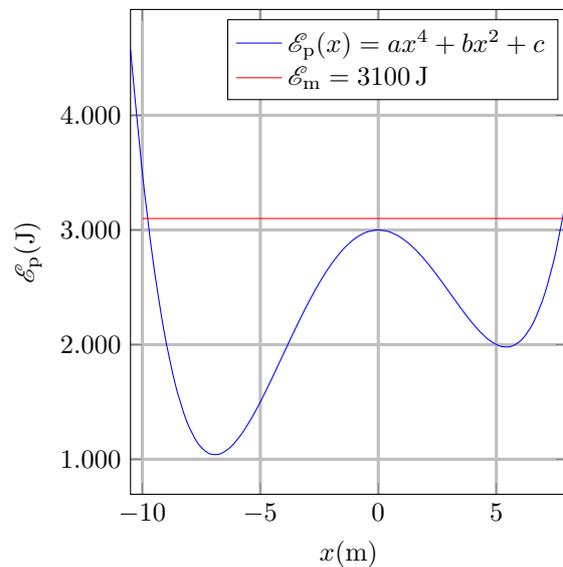
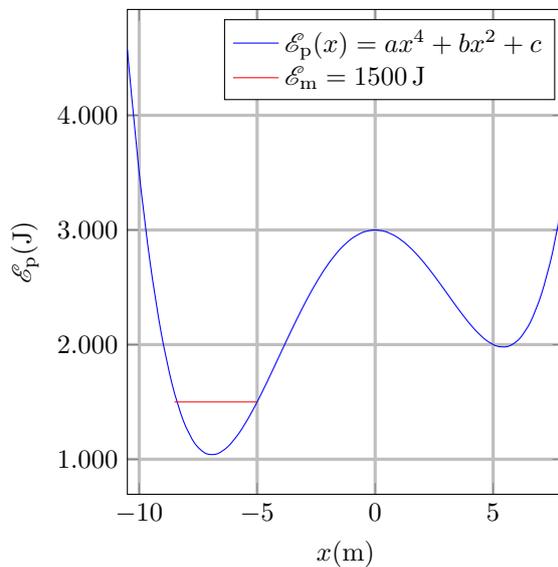
On obtiendrait le même résultat avec  $\delta x < 0$ .

### Propriété : Barrière de potentielle

Soit un point matériel  $M$  soumis à une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(x)$ . Si le mouvement est conservatif le point  $M$  possède une énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  tel que :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_p(x) \geq \mathcal{E}_p(x)$$

Sans énergie cinétique, un point matériel ne peut pas accéder aux régions de l'espace où  $\mathcal{E}_p(x) > \mathcal{E}_m$ .



## 4 Application : Oscillation proche de l'équilibre

On considère le mouvement conservatif à une dimension d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ . On considère que le point matériel est proche d'une position d'équilibre stable notée  $x_{eq}$ . Le système possède alors une énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Il possède également une énergie potentielle dont on fait le développement limité autour de  $x_{eq}$  à l'ordre 2 :

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(x_{eq}) + \frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x = x_{eq})(x - x_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x = x_{eq})(x - x_{eq})^2 + o((x - x_{eq})^2)$$

Or par définition de la position d'équilibre stable on a :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x = x_{eq}) = 0 \text{ et } \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x = x_{eq}) = k > 0$$

On peut alors appliquer le théorème de l'énergie mécanique entre  $t = 0$  et  $t$  :

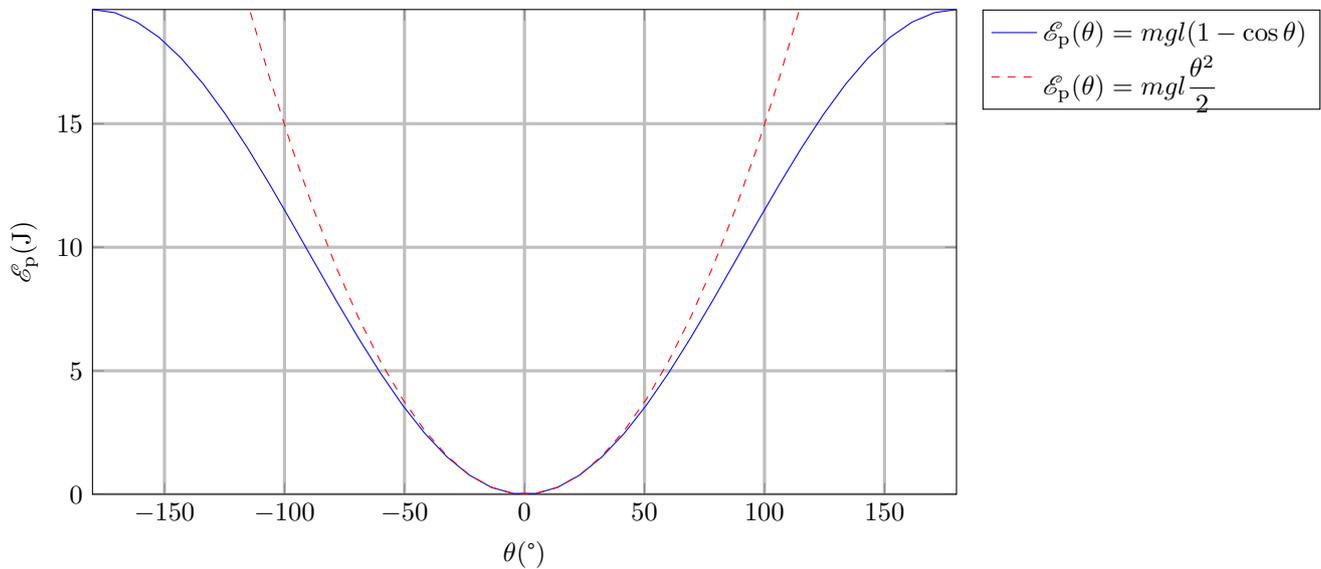
$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2 = \mathcal{E}_m(t = 0)$$

Si on dérive cette équation on obtient l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} + kx = kx_{eq}$$

qui est l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique correspondant à un système masse-ressort.

Au voisinage de l'équilibre on peut donc modéliser tout système conservatif par un oscillateur harmonique.



## Mécanique 5 : Mouvement de particules chargées

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>2.4. Mouvement de particules chargées dans des champs <math>\vec{E}</math> et <math>\vec{B}</math>, uniformes et stationnaires</b>	
Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle; champs électrique et magnétique. Puissance de la force de Lorentz.	Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.  Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétostatique.	Déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.

### 1 Force de Lorentz et notions de champs

#### Definition : Champ électrostatique

On considère la force coulombienne d'une particule 2 de charge  $q_2$  sur une particule 1 de charge  $q_1$  avec  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  la permittivité diélectrique du vide :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1} = q_1 \vec{E}_2(r)$$

On appelle alors  $\vec{E}_2(r) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  le champ électrique créé par la particule 2.

#### Definition : Champ uniforme et stationnaire

Un champ stationnaire est un champ dont les caractéristiques sont indépendantes du temps :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(M)$$

Un champ uniforme est un champ dont les caractéristiques sont les mêmes en tout point de l'espace :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(t)$$

#### Definition : Champ électrostatique et magnétostatique

Un champ électrostatique est un champ stationnaire. Un champ magnétostatique est un champ stationnaire.

#### Definition : Force de Lorentz

Une particule de charge  $q$ , animé d'une vitesse  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$  dans un référentiel, placée dans un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}$  et magnétostatique uniforme  $\vec{B}$  subit une force, appelée force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{B}$$

#### Remarque : Ordre de grandeur

Si on étudie un proton de masse  $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$  et de charge  $q = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$  plongé dans un champ électrostatique uniforme de module  $E = 1,0 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  à la surface de la Terre :

- $F_g \approx mg = 1,6 \times 10^{-26} \text{ N}$
- $F_e \approx qE = 1,6 \times 10^{-16} \text{ N}$

On a alors toujours  $F_e \gg F_g$ .

Ordre de grandeur de champ électrique ou magnétique :

- Antenne mobile  $E \sim 10^1 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  à  $10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  ;
- Condensateur  $E \sim 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  à  $10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  ;
- Champ de claquage de l'air  $E \sim 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  ;
- Champ magnétique terrestre  $B \sim 5 \times 10^{-5} \text{ T}$  ;
- Aimants puissants de moteurs  $B \sim 0,3 \text{ T}$  ;
- IRM  $B \sim 6 \text{ T}$  ;

Si on compare en ordre de grandeur la force électrique et la force magnétique on a :

$$\frac{F_e}{F_m} = \frac{E}{vB}$$

Pour un champ électrostatique  $E \sim 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  et un champ magnétostatique  $B \sim 0,3 \text{ T}$  la vitesse pour que les deux forces soient équivalentes doit être de :

$$v \sim 1 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

On voit donc que la force magnétique est bien plus efficace pour modifier la trajectoire d'une particule chargée.

## 2 Aspect énergétique

### Propriété : Puissance fournie par un champ électrique

Soit une particule de charge  $q$  soumise à un champ électrostatique  $\vec{E}$ , la puissance de la force de Lorentz s'exprime :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = q \vec{E} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Si on applique le théorème de la puissance cinétique on voit alors que :

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}(\vec{F}) = q \vec{E} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Le champ électrique peut alors augmenter ou diminuer l'énergie cinétique de la particule en fonction de son orientation et du signe de  $q$ .

### Propriété : Puissance fournie par un champ magnétique

Soit une particule de charge  $q$  soumise à un champ magnétostatique  $\vec{B}$ , la puissance de la force de Lorentz s'exprime :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = q \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

Si on applique le théorème de la puissance cinétique on voit alors que :  $\left. \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = 0$  L'énergie cinétique de la particule est donc constante, la force de Lorentz magnétique peut donc modifier la trajectoire de la particule sans changer son énergie cinétique.

### Propriété : Énergie potentielle électrique

On peut montrer que la force de Lorentz électrique est une force conservative telle que :

$$\vec{F} = q \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_{p,\text{elec}}$$

où  $\mathcal{E}_{p,\text{elec}}$  est l'énergie potentielle électrique associée dont l'expression dépend uniquement de la charge de la particule et de la forme du champ électrique  $\vec{E}$  (voir cours de physique de deuxième année).

### Definition : Potentiel électrique

On définit le potentiel électrique noté  $V$  par la relation :

$$\mathcal{E}_{p,\text{elec}} = qV \implies dV = -\frac{q}{q} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

**Propriété : Potentiel électrique d'un champ uniforme**

Soit un champ électrostatique uniforme  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$ , le potentiel électrique est donné par la relation :

$$V(x) - V(x_0) = -E_0(x - x_0)$$

**3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme****Propriété : Équation du mouvement**

Pour une particule assimilée à un point  $M$  de masse  $m$  et de charge  $q$  soumise à un champ électrostatique  $\vec{E}$  uniforme dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . L'équation du mouvement est :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

On se ramène donc à un vecteur accélération constant, et une résolution identique au champ de pesanteur constant.

**Démonstration :**

On considère une particule chargée de charge  $q$  dans un référentiel  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  placée dans un champ électrostatique uniforme  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_y$  et dans un champ magnétostatique uniformément nul  $\vec{B}_0 = \vec{0}$ .

À l'instant  $t = 0$  la particule possède une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0(\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y)$ .

**Système :** On étudie la particule de masse  $m$  et de charge  $q$  assimilée à un point  $M$ .

**Référentiel :** On se place dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  supposé galiléen.

**Bilan des forces :**

- $\vec{F} = q\vec{E} = qE_0 \vec{u}_y$  ;
- $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$  avec  $\|\vec{P}\| \ll \|\vec{F}\|$  ;

**Principe fondamental de la dynamique :** On commence par exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z \implies \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z \implies \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$$

On applique alors le PFD :

$$\left. \frac{d\vec{P}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = q\vec{E} \iff m \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = q\vec{E}$$

On obtient alors une accélération constante vectoriellement comme dans le cas de la chute libre :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

On peut alors retrouver l'équation de la trajectoire parabolique vu au chapitre Mécanique 2.

**Exemple : Vitesse initiale parallèle au champ**

Soit un champ électrostatique  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$  et à  $t = 0$  :  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$  et la particule en  $O$ .

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{x} \vec{u}_x = \frac{q}{m} E_0 \vec{u}_x \implies \dot{x}(t) = \frac{qE_0 t}{m} + v_0 \implies x(t) = \frac{qE_0 t^2}{2m} + v_0 t$$

**Exemple : Vitesse initiale orthogonale au champ**

Soit un champ électrostatique  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$  et à  $t = 0$  :  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_y$  et la particule en  $O$ .

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y = \frac{q}{m} E_0 \vec{u}_x \implies \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{qE_0 t}{m} \\ \dot{y}(t) = v_0 \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = \frac{qE_0 t^2}{2m} \\ y(t) = v_0 t \end{cases}$$

**Propriété : Différence de potentielle entre deux électrodes**

En appliquant une différence de potentiel  $U$  entre deux électrodes planes, parallèles et distantes de  $d$ , on obtient un champ électrique perpendiculaire aux grilles, dirigé vers les potentiels décroissants et de norme :

$$E = \frac{U}{d}$$

**Propriété : Accélération d'une particule entre deux électrodes**

Soit une particule initialement au repos dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  et assimilée à un point  $M$ , de masse  $m$  et de charge  $q$  soumise à un champ électrostatique uniforme  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$  tel qu'on impose une différence de potentiel  $U$  entre deux électrodes distantes de  $d$ . La vitesse de la particule après avoir parcouru la distance  $d$  est :

$$v_f = \sqrt{\frac{2|qU|}{m}}$$

**Démonstration :**

On considère deux plaques métallique séparées d'une distance  $d$  soumise à une différence de tension  $U$ .

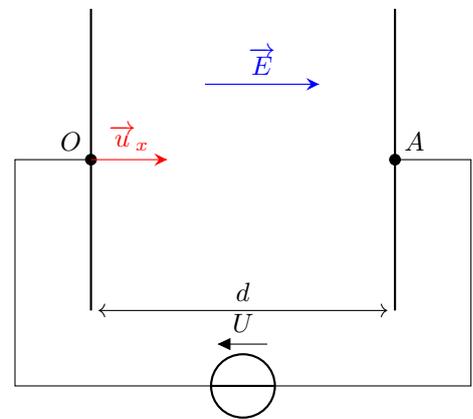
On suppose que le champ électrostatique entre les deux plaques est uniforme :

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \text{ donc } V(x) = V(x=0) - \frac{Ux}{d} \text{ donc } E_0 = \frac{U}{d}$$

et donc que le potentiel électrique est de la forme :

$$V(x) = v(x=0) + \frac{Ux}{d}$$

On étudie une particule chargée de masse  $m$  et de charge  $q$  sans vitesse initiale à la position  $x = 0$ .



**Système :** On étudie la particule de masse  $m$  et de charge  $q$  assimilée à un point  $M$ .

**Référentiel :** On se place dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  supposé galiléen.

**Bilan des forces :**

- $\vec{F} = q\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{B}$  ;
- $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$  avec  $\|\vec{P}\| \ll \|\vec{F}\|$  ;

**Théorème de l'énergie cinétique :** On applique le TEC entre le point  $O$  et le point  $A$  :

$$\Delta \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(t_A) - \mathcal{E}_c(t_O) = \mathcal{E}_c(t_A) = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Le travail de la force de Lorentz électrique s'obtient en faisant la différence de potentiel :

$$W(\vec{F})_{O \rightarrow A} = - \int_O^A dE_p = -q \int_O^A dV = qV(x=0) - qV(x=d) = qU$$

D'après le TEC on obtient :

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = qU \implies v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

**Remarque : Limite relativiste**

On considère qu'on peut appliquer les résultat issu de la mécanique Newtonienne tant que la vitesse des particules est inférieure à  $0,1c$  avec  $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## 4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme

### Propriété : Trajectoire circulaire

Soit une particule assimilée à un point  $M$  de masse  $m$  et de charge  $q$  dans un champ magnétostatique uniforme  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$  perpendiculaire à la trajectoire. À  $t = 0$  la particule est placée au point  $O$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ .

On montre que la trajectoire est circulaire de rayon :

$$R = \frac{mv_0}{|qB_0|}$$

### Démonstration : Rayon de la trajectoire

**Système :** On étudie la particule de masse  $m$  et de charge  $q$  assimilée à un point  $M$ .

**Référentiel :** On se place dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  supposé galiléen.

**Bilan des forces :**

- $\vec{F} = qv_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{B}$  ;
- $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$  avec  $\|\vec{P}\| \ll \|\vec{F}\|$  ;

On se place dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  et dans le repère de Frenet  $(M, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$ . Le mouvement est uniforme car on a montré que l'énergie cinétique de la particule était constante. On a alors l'accélération qui vaut :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$$

On a également l'expression de la vitesse :  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = v_0 \vec{u}_T \iff \vec{F} = |qB_0|v_0 \vec{u}_N$

**Principe fondamental de la dynamique :**  $m \frac{v_0^2}{R} \vec{u}_N = |qB_0|v_0 \vec{u}_N$

En projetant sur le vecteur  $\vec{u}_N$  on obtient :  $R = \frac{mv_0}{|qB_0|}$

### Démonstration : Trajectoire circulaire

On considère le mouvement d'une particule chargée de masse  $m$  et de charge  $q$  dans un champ magnétostatique uniforme  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ . À  $t = 0$  la particule est placée au point  $O$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ .

**Système :** On étudie la particule de masse  $m$  et de charge  $q$  assimilée à un point  $M$ .

**Référentiel :** On se place dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  supposé galiléen.

**Bilan des forces :**

- $\vec{F} = q\vec{E} = qE_0 \vec{u}_y$  ;
- $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$  avec  $\|\vec{P}\| \ll \|\vec{F}\|$  ;

**Principe fondamental de la dynamique :** On commence par exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \implies \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \implies \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

On peut alors exprimer la force magnétique dans le repère cartésien :

$$\vec{F} = qv_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{B} = qB_0 \dot{x} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z + qB_0 \dot{y} \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = qB_0 (\dot{y} \vec{u}_x - \dot{x} \vec{u}_y)$$

On applique le PFD :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\vec{u}_x + m\ddot{y}\vec{u}_y &= qB_0(\dot{y}\vec{u}_x - \dot{x}\vec{u}_y) \\ / \vec{u}_x : \ddot{x} &= \frac{qB_0}{m} \dot{y} \\ / \vec{u}_y : \ddot{y} &= -\frac{qB_0}{m} \dot{x} \text{ et } \ddot{z} = \dot{z} = z = 0 \end{aligned}$$

On intègre entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t$  :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) - \dot{x}(t=0) &= \frac{qB_0}{m}(y(t) - y(t=0)) \\ \dot{y}(t) - \dot{y}(t=0) &= -\frac{qB_0}{m}(x(t) - x(t=0))\end{aligned}$$

Or à  $t = 0$  on a  $x(t=0) = y(t=0) = \dot{y}(t=0) = 0$  et  $\dot{x}(t=0) = v_0$  :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{qB_0}{m}y + v_0 \\ \dot{y} &= -\frac{qB_0}{m}x\end{aligned}$$

On injecte dans les premières équations couplées :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{qB_0}{m} \left( -\frac{qB_0}{m}x \right) \implies \ddot{x} + \left( \frac{qB_0}{m} \right)^2 x = 0 \\ \ddot{y} &= -\frac{qB_0}{m} \left( \frac{qB_0}{m}y + v_0 \right) \implies \ddot{y} + \left( \frac{qB_0}{m} \right)^2 y = -v_0 \frac{qB_0}{m}\end{aligned}$$

On a alors deux équations du mouvement, on pose  $\omega_0 = \left| \frac{qB_0}{m} \right|$  et on a les solutions :

$$x(t) = A_x \cos(\omega_0 t) + B_x \sin(\omega_0 t) \text{ et } y(t) = A_y \cos(\omega_0 t) + B_y \sin(\omega_0 t) - v_0 \frac{qB_0}{\omega_0^2 m}$$

On utilise les conditions initiales :

$$x(t=0) = A_x = 0 \text{ et } \dot{x}(t=0) = B_x \omega_0 = v_0 \text{ et } y(t=0) = A_y - \frac{mv_0}{|qB_0|} = 0 \text{ et } \dot{y}(t=0) = B_y \omega_0 = 0$$

On obtient alors :

$$x(t) = \frac{mv_0}{|qB_0|} \sin(\omega_0 t) \text{ et } y(t) = \frac{mv_0}{|qB_0|} \cos(\omega_0 t) - \frac{mv_0}{qB_0}$$

On obtient une trajectoire circulaire de rayon  $R_c = \frac{mv_0}{|qB_0|}$  et de centre  $C(0; -\frac{mv_0}{qB_0})$ .

## Mécanique 6 : Loi du moment cinétique d'un point et d'un solide

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>2.5. Moment cinétique</b>	
Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.	Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté.	Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.	Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen. Conservation du moment cinétique.	Identifier les cas de conservation du moment cinétique.
<b>2.7. Mouvement d'un solide</b>	
<b>Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers</b> Définition d'un solide.	Différencier un solide d'un système déformable.
Translation.	Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
Rotation autour d'un axe fixe.	Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
<b>Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d'un axe fixe</b> Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.	Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni. Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
Couple.	Définir un couple.
Liaison pivot.	Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.
Pendule pesant.	Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement. <b>Réaliser l'étude énergétique d'un pendule pesant et mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique.</b> Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.
<b>Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen</b> Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Établir, dans ce cas, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.

### 1 Théorème du moment cinétique d'un point

#### Definition : Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point

On définit le moment cinétique du point matériel  $M$  par rapport au point  $O$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  par :

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge \vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m\vec{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

**Propriété :**

Soit le moment cinétique du point  $M$  par rapport au point  $O$  :  $\vec{L}_O$ .

On peut calculer le moment cinétique du point  $M$  par rapport au point  $O'$  :

$$\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{p_{M/\mathcal{R}}}$$

**Propriété : Mouvement plan**

Si le mouvement de  $M$  s'effectue dans un plan  $\mathcal{P}$  et que  $O \in \mathcal{P}$ . Alors :

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} \perp \mathcal{P} \forall t$$

**Propriété : Mouvement rectiligne**

Si le point  $M$  est en mouvement rectiligne selon une droite  $\mathcal{D}$  et que  $O \in \mathcal{D}$ . Alors :

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{0} \forall t$$

**Definition : Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe**

Soit  $(\Delta)$  un axe orienté par le vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  et  $O$  un point de cet axe. Le moment cinétique  $L_\Delta$  de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  par rapport à  $(\Delta)$  est le projeté orthogonal de  $\vec{L}_O$  sur  $(\Delta)$  :

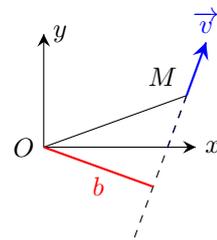
$$L_\Delta(M)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{L_O(M)_{/\mathcal{R}}} \cdot \vec{u}_\Delta$$

**Propriété : Paramètre d'impact de  $M$  sur  $O$** 

Si la quantité de mouvement  $\vec{p}(M)_{/\mathcal{R}} \perp \Delta = (O, \vec{u}_z)$ , alors on peut calculer le moment cinétique par rapport à  $\Delta$  en utilisant le paramètre d'impact :

$$L_\Delta(M) = \pm m \|\vec{v}\| \times b \quad \text{avec} \quad b = \|\overrightarrow{OM}\| \sin(\alpha)$$

- $b$  représente le paramètre d'impact de  $M$  sur  $O$ .
- Le signe de  $L_\Delta(M)$  est déterminé en utilisant la règle de la main droite.

**Propriété : Moment cinétique en coordonnées cylindriques suivant  $(Oz)$** 

Soit un référentiel  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . On se place en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

Le moment cinétique par rapport à la droite  $\Delta = (O, \vec{u}_z)$  vaut :

$$L_{(Oz)}(M)_{/\mathcal{R}} = mr^2 \dot{\theta}$$

Pour connaître le sens positif de rotation autour d'un axe orienté on utilise la règle de la main droite.

**Definition : Moment d'une force par rapport à un point**

Le moment par rapport au point  $O$  d'une force  $\vec{F}$  appliquée en un point  $M$  est défini par :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

**Definition : Moment d'une force par rapport à un axe orienté**

Soit  $(\Delta)$  un axe orienté par le vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  et  $O$  un point de cet axe. On définit le moment par rapport à  $(\Delta)$  de la force  $\vec{F}$  comme le projeté orthogonal de  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$  sur  $(\Delta)$  :

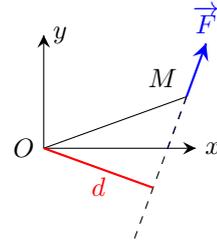
$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O(\vec{F})} \cdot \vec{u}_\Delta$$

**Propriété : Le bras de levier**

Si la force  $\vec{F} \perp \Delta = (O, \vec{u}_z)$ , alors on peut calculer le moment de la force par rapport à  $\Delta$  en utilisant le bras de levier :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm \|\vec{F}\| \times d \quad \text{avec} \quad d = \|\vec{OM}\| \sin(\alpha)$$

- $d$  représente le bras de levier.
- La droite passant par  $M$  et dirigée par  $\vec{F}$  s'appelle la droite d'action de la force  $\vec{F}$ .
- Le signe de  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$  est déterminé en utilisant la règle de la main droite.

**Propriété : Cas où  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$** 

Soit une droite  $\Delta = (O, \vec{u}_z)$  et une force  $\vec{F}$  appliquée à un point  $M$ . On a  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$  si :

- $\vec{F} \parallel \Delta$ ;
- si la droite d'action de  $\vec{F}$  passe par  $\Delta$ .

**Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe pour un point matériel**

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la dérivée temporelle du moment cinétique d'un point matériel  $M$  calculé en un point fixe  $O$  est égale au moment résultant en  $O$  des forces appliquées :

$$\left. \frac{d\vec{L}_{O(M)}_{/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

**Démonstration :**

On applique le principe fondamental de la dynamique à un point  $M$  de masse  $m$  dans un référentiel supposé galiléen  $\mathcal{R}$  :

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F} \implies m \vec{OM} \wedge \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge \vec{F} \implies \left. \frac{d\vec{L}_{O(M)}_{/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

Sachant que :  $\left. \frac{d\vec{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{OM} \wedge \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge \vec{a}_{M/\mathcal{R}}$

On obtient :  $m \left. \frac{d\vec{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_O(\vec{F})$

**Propriété : Conservation du moment cinétique**

Lorsque  $\vec{L}_{O(M)}_{/\mathcal{R}} = \vec{C}^{te}$  on a deux situations possibles :

- $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$  alors le système est pseudo-isolé.
- $\sum_i \vec{F}_i \parallel \vec{OM}$  alors la résultante des forces est orientée vers  $O$  à tout instant.

**Propriété : Projection sur un axe**

On peut projeter la relation précédente sur un axe orienté ( $\Delta$ ) de direction  $\vec{u}_\Delta$  et passant par  $O$  :

$$\frac{dL_\Delta(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$$

**Exemple : Le pendule simple**

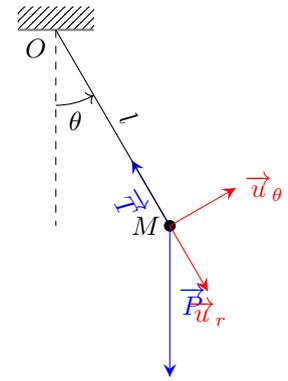
On considère un point matériel  $M$  de masse  $m$  attaché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur  $l$ . On cherche à étudier le mouvement d'oscillation du pendule.

**Système :** Point matériel  $M$  de masse  $m$ .

**Référentiel :** Terrestre noté  $\mathcal{R}_T$  supposé galiléen et de repère  $\mathcal{R}_T(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

**Bilan des forces :** dans la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

- $\vec{P} = m\vec{g} = m[(\vec{g} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r + (\vec{g} \cdot \vec{u}_\theta)\vec{u}_\theta] = mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)$  ;
- $\vec{T} = -T\vec{u}_r$  avec  $T = \|\vec{T}\|$



**Théorème du moment cinétique (TMC) :**

$$\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_r \implies \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \implies \vec{L}_{O(M)/\mathcal{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = l^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

On obtient alors :

$$ml^2\ddot{\theta}\vec{u}_z = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \vec{0} + mgl \cos\theta \vec{u}_r \wedge \vec{u}_r - mgl \sin\theta \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$$

On a alors :  $l\ddot{\theta}\vec{u}_z = -g \sin\theta\vec{u}_z$

On fait la projection suivant  $\vec{u}_z$  et on retrouve l'équation du mouvement d'un pendule simple :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

## 2 Cinématique du solide

### Definition : Solide indéformable

Un solide de masse  $m$  est un système matériel dont les points restent à distance constante les uns des autres. On définit alors le centre de masse  $G$  du solide composé de  $N$  points  $M_i$  de masse  $m_i$  :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i}{m} \quad \text{avec} \quad m = \sum_i m_i$$

On obtient la relation suivante :  $\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0}$

### Definition : Translation

Un solide ( $S$ ) est en translation lorsque les directions du repère lié au solide sont fixes par rapport au référentiel d'étude. Si le solide est en translation, tous ses points ont à chaque instant le même vecteur vitesse. On décide alors d'étudier le mouvement d'un seul point du solide, celui du centre de masse  $G$  :

$$\vec{v}_{G \in S/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

### Exemple : Translation rectiligne

Lors d'une translation rectiligne, tous les points du solide ( $S$ ) ont une trajectoire rectiligne selon des droites parallèles entre elles.

### Exemple : Translation circulaire

Lors d'une translation circulaire, tous les points du solide ( $S$ ) ont une trajectoire circulaire de même rayon mais de centre différents.

**Definition : Rotation autour d'un axe fixe**

Un solide indéformable ( $S$ ) est en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe dans  $\mathcal{R}$  si tous les points le constituant ont une trajectoire circulaire dans  $\mathcal{R}$  centrée sur un point de  $\Delta$ .

**Definition : Vitesse angulaire d'un solide**

La vitesse angulaire d'un solide ( $S$ ) est la dérivée temporelle  $\omega = \dot{\theta}$  de l'angle repérant sa position. L'accélération angulaire du solide est la dérivée temporelle de sa vitesse angulaire  $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$ .

**Propriété : Description cinématique d'un solide en rotation**

On se place en coordonnée cylindrique avec le point  $O$  du centre du repère appartenant l'axe de rotation  $\Delta$ . On pose  $\vec{u}_z$  colinéaire à  $\Delta$  et on définit la vitesse d'un point  $M$  appartenant ( $S$ ) dans  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{v}_{M \in S / \mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \wedge \vec{OM} = r\omega \vec{u}_\theta$$

avec  $\Omega_{S/\mathcal{R}} = \omega \vec{u}_z$ .

### 3 Loi du moment cinétique scalaire

**Definition : Moment d'inertie d'un point par rapport à un axe orienté**

Le moment cinétique de  $M$  de masse  $m$  par rapport à l'axe orienté  $\Delta = (O, \vec{u}_z)$  dans  $\mathcal{R}$  en coordonnées cylindriques est la projection de  $\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}}$  sur l'axe  $\Delta$  :

$$L_\Delta(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_z = m(\vec{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}) \cdot \vec{u}_z$$

On utilise alors les coordonnées cylindriques :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \implies \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

On obtient alors :

$$L_\Delta(M)_{/\mathcal{R}} = mr^2\dot{\theta} = J_{(Oz)}(M)\dot{\theta}$$

et on appelle  $J_{(Oz)}(M) = mr^2$  le moment d'inertie du point  $M$ .

**Definition : Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté**

Le moment cinétique d'un solide ( $S$ ) en rotation à la vitesse  $\omega = \dot{\theta}$  autour d'un axe fixe  $\Delta = (O, \vec{u}_z)$  s'écrit :

$$L_\Delta(S) = J_\Delta(S)\omega$$

avec  $J_\Delta(S)$  le moment d'inertie du solide ( $S$ ) par rapport à l'axe  $\Delta$  en  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ .

**Remarque :**

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe est toujours positif.

Le moment d'inertie dépend de la répartition des masses. Plus la masse du solide est éloigné de l'axe  $\Delta$ , plus le moment d'inertie augmente.

On vous donnera toujours  $J_\Delta(S)$ .

**Loi scalaire du moment cinétique du solide**

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la dérivée temporelle du moment cinétique par rapport à un axe fixe orienté  $\Delta = (O, \vec{u}_z)$  d'un solide ( $S$ ) en rotation autour de cet axe est égale au moment résultant par rapport à ( $\Delta$ ) des forces extérieures :

$$\frac{dL_\Delta(S)}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext \rightarrow S})$$

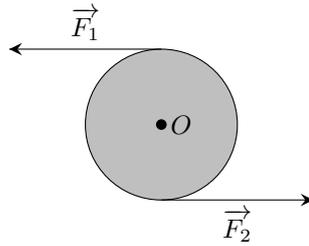
En utilisant le moment d'inertie  $J_\Delta(S)$  par rapport à  $\Delta$  on obtient :

$$J_\Delta(S) \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext \rightarrow S})$$

avec  $\omega = \dot{\theta}$ .

**Definition : Couple de forces**

Un couple de forces est un système de forces (au minimum 2) dont la résultante  $\vec{F}_{ext \rightarrow S} = \vec{0}$  est nulle et dont le moment résultant est non nul et indépendant du point où on le calcul.



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

**Definition : Liaison pivot**

Une liaison pivot est une liaison entre deux solides en rotation l'un par rapport à l'autre (un rotor en rotation par rapport à un stator), sans translation possible. Le moment de l'action du stator sur le rotor est forcément nul :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}_{\text{stator} \rightarrow \text{rotor}}) = 0$$

**4 Énergie cinétique d'un solide en rotation****Definition : Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe**

L'énergie cinétique d'un solide en rotation dans un référentiel  $\mathcal{R}$  autour d'un axe fixe  $\Delta = (O, \vec{u}_z)$  à la vitesse angulaire  $\omega$  s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta}(S) \omega^2$$

**Definition : Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation**

La puissance d'une force  $\vec{F}_{ext \rightarrow S}$  appliquée à un point  $M$  d'un solide ( $S$ ) en rotation dans le référentiel  $\mathcal{R}$  autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) à la vitesse angulaire  $\omega$  est définie par :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{ext \rightarrow S}) = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ext \rightarrow S}) \omega$$

**Definition : Travail d'une force appliquée à un solide en rotation**

Le travail d'une force  $\vec{F}_{ext \rightarrow S}$  appliquée à un point  $M$  entre la position  $M_1$  et  $M_2$  d'un solide ( $S$ ) en rotation dans le référentiel  $\mathcal{R}$  autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) à la vitesse angulaire  $\omega$  est définie par :

$$W(\vec{F}_{ext \rightarrow S})_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \mathcal{P}(\vec{F}_{ext \rightarrow S}) dt = \int_{M_1}^{M_2} \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ext \rightarrow S}) d\theta$$

**Loi de la puissance cinétique pour un solide**

Dans un référentiel galiléen, la loi de la puissance cinétique appliquée à un solide soumis aux forces extérieures  $\vec{F}_{ext \rightarrow S}$  s'écrit :

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}(\vec{F}_{ext \rightarrow S})$$

**Loi de l'énergie cinétique pour un solide**

Dans un référentiel galiléen, la loi de l'énergie cinétique appliquée à un solide soumis aux forces extérieures  $\vec{F}_{ext \rightarrow S}$  entre  $t_1$  et  $t_2$  s'écrit :

$$\Delta \mathcal{E}_c = W(\vec{F}_{ext \rightarrow S})_{M_1 \rightarrow M_2}$$

## 5 Le pendule pesant

### Exemple : Le pendule pesant

Considérons une tige homogène, de longueur  $l$  et masse  $m$ , attachée en  $O$  par une liaison pivot parfaite de direction  $\vec{u}_z$ . Sa position est reprérée par l'angle  $\theta$  par rapport à la verticale. La tige est lâchée sans vitesse initiale avec un angle  $\theta_0$ . La tige est caractérisée par son centre de masse  $G$  et son moment d'inertie  $J_{(Oz)}$  par rapport à l'axe  $(Oz)$ , elle est soumise à l'action de la réaction de la liaison pivot, et à l'action du poids qui s'exerce en  $G$ .

Le moment des actions de la liaison pivot en  $O$  est nul, on ne considère donc que le moment de l'action du poids :

$$\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) = -mgd \sin \theta$$

avec  $d$  la distance  $OG$ . On applique la règle de la main droite pour connaître le signe du moment.

### Propriété : Équation du mouvement

On applique maintenant le théorème du moment cinétique pour un solide :

$$J_{(Oz)}(S)\ddot{\theta} = -mgd \sin \theta \implies \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{(Oz)}(S)} \sin \theta = 0$$

On retrouve l'équation différentielle du pendule simple, mais cette fois on a des propriétés solides !

### Propriété : Intégrale première du mouvement d'un pendule pesant

Si on multiplie l'équation du mouvement du pendule pesant par  $\dot{\theta}$  et qu'on intègre entre  $t = 0$  et  $t$  on obtient :

$$\frac{1}{2}J_{(Oz)}(S)\dot{\theta}^2 - mgd \cos \theta = C^{te} = E_m = -mgd \cos \theta_0$$

Si  $\omega(t = 0) = 0$ .

## 6 Capacité numérique

### Definition : Intégration numérique par la méthode des rectangles

À l'aide de python, on peut calculer une valeur approchée d'une intégrale d'une fonction  $f$  en séparant un intervalle  $[a; b]$  en  $N$  intervalles  $[x_i; x_{i+1}]$  tel que  $x_{i+1} - x_i = (b - a)/N$  et où la fonction  $f$  est considérée comme constant sur l'intervalle  $[x_i; x_{i+1}]$  et dont la valeur vaut  $f(x_i)$ . De cette manière :

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq \left(\frac{b-a}{N}\right) \sum_{i=1}^{i=N} f(x_i)$$

### Propriété : Création d'une fonction python

On définit la fonction **RectG(a,b,N,f)** qui calcule l'intégrale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  avec une division en  $N$  intervalles  $[x_i; x_{i+1}]$  :

```
def RectG(a,b,N,f):
    h = (b-a)/N
    I = 0
    for i in range(N):
        I = I + h * f(a+i*h)
    return I

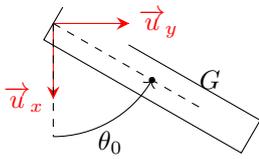
def f(x):
    return .... # a completer
```

### Propriété : Capacité numérique 6

À l'aide de python, mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.

**Exemple : Calcul de la période d'un pendule**

Considérons une tige homogène, de longueur  $l$  et masse  $m$ , attachée en  $O$  par une liaison pivot parfaite de direction  $\vec{u}_z$ . Sa position est repréée par l'angle  $\theta$  par rapport à la verticale. La tige est lâchée sans vitesse initiale avec un angle  $\theta_0$ . La tige est caractérisée par son centre de masse  $G$  et son moment d'inertie  $J_{(Oz)}$  par rapport à l'axe  $(Oz)$ , elle est soumise à l'action de la réaction de la liaison pivot, et à l'action du poids qui s'exerce en  $G$ .



**Système :** {Pendule  $S$  ( $J_{Oz}, m, d$ )}

**Référentiel :** Terrestre supposé galiléen  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

**Bilan :**  $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) = -mgd \sin \theta$  et  $\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{Pivot}) = 0$

**TMC scalaire :**  $J_{(Oz)}(S)\ddot{\theta} = -mgd \sin \theta \implies \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_{(Oz)}(S)} \sin \theta = 0 \times \dot{\theta}$

On intègre entre  $t = 0$  où  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(t = 0) = 0$  et un instant  $t$  quelconque, on obtient :

$$\dot{\theta}^2(t) = 2\omega_0^2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) \implies \frac{d\theta}{dt} = -\omega_0 \sqrt{2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}$$

On applique alors la méthode de séparation des variables pour exprimer  $dt$  :

$$dt = -\frac{1}{\omega_0 \sqrt{2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} d\theta \implies \int_0^{T/4} \omega_0 \sqrt{2} dt = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} = I(\theta_0) \implies T = \frac{T_0 \sqrt{2}}{\pi} I(\theta_0)$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    return 1/np.sqrt(np.cos(x)-np.cos(theta0))
T0=1
N=100000
n=10
theta=np.array([k*np.pi/(2*n) for k in range(1,n+1)])
T=np.zeros(n)
for k in range(n):
    theta0=theta[k]
    T[k]=(np.sqrt(2)*T0/np.pi)*RectG(0,theta0,N,f)
plt.plot(theta,T,'+')
plt.xlabel(thetaenrad)
plt.ylabel(T en s)
plt.show()
```

## Mécanique 7 : Champ de force centrale conservatif

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>2.5. Mouvements dans un champ de force centrale conservatif</b>	
Point matériel soumis à un champ de force centrale.	Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique. Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
<b>Point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif</b> Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.	Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement. Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective. Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.
<b>Cas particulier du champ newtonien</b> Lois de Kepler.	Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.	Établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.
Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire et dans le cas du mouvement elliptique.	Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire. Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.
<b>Satellites terrestres</b> Satellites géostationnaire, de localisation et de navigation, météorologique.	Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions. Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.

### 1 Champ newtonien

#### Definition : Champ newtonien

C'est un champ de force de centre  $O$  tel que :

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r$$

avec  $k$  une constante. Le champ est attractif lorsque  $k > 0$ , et répulsif lorsque  $k < 0$ .

#### Exemple :

La force d'interaction gravitationnelle avec  $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  exercée par  $O(m_1)$  sur  $M(m_2)$  :

$$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

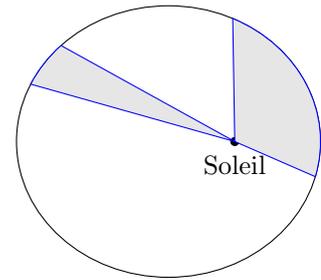
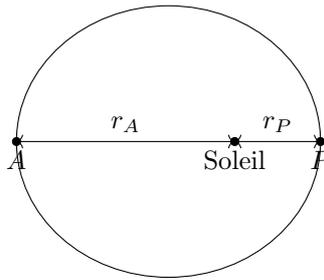
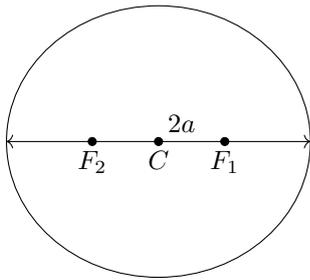
La force d'interaction coulombienne entre une particule en  $O$  de charge  $q_1$  sur une particule en  $M$  de charge  $q_2$  :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$$

#### Loi de Kepler des orbites et loi des aires(1609)

Dans le référentiel héliocentrique :

- chaque planète décrit, dans le sens direct, une trajectoire elliptique, dont le Soleil occupe l'un des foyers ;
- l'aire balayée par le rayon vecteur Soleil-planète est proportionnel au temps mis pour la décrire.



### À connaître sur les ellipses :

- $F_1$  et  $F_2$  sont les foyers (l'astre attracteur en est un des deux) ;
- $C$  est le centre de l'ellipse (inutile dans notre cas) ;
- $A$  est l'apogée ou aphélie, le point le plus éloigné de l'astre à la distance  $r_A$  ;
- $P$  est le périégée ou périhélie, le point le plus proche de l'astre à la distance  $r_P$  ;
- le demi-grand axe  $a$  de l'ellipse est donc relié à  $r_A$  et  $r_P$  :  $2a = r_A + r_P$

### Loi de Kepler des périodes (1618)

Dans le référentiel héliocentrique, le carré de la période de révolution sidérale d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse qu'elle décrit.

$$T^2 \propto a^3$$

### Remarque : Ordre de grandeurs

- Le nom et l'ordre des planètes du système solaire : «**Me Voil à Tout Mouillé, J'étais Sous Un Nuage**» pour Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune ;
- Pour la Terre on a :  $M_T = 6,0 \times 10^{24}$  kg,  $R_T = 6,4 \times 10^3$  km ;
- Pour le Soleil on a :  $M_\odot = 2,0 \times 10^{30}$  kg,  $D_{TS} = 150 \times 10^6$  km = 1 ua
- Pour le système solaire :  $\frac{T^2}{a^3} = 1 \text{ an}^2 \cdot \text{ua}^{-3} = 2,9 \times 10^{-19} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$

### Remarque :

Ces lois sont basées sur l'observation expérimentale de Tycho Brahé. Elles sont démontrée par Newton ensuite. Toutes ces lois découlent des démonstrations suivantes ainsi que de calcul de l'étude des coniques hors programme.

## 2 Force centrale conservative

### Definition : Force centrale conservative

Une force centrale conservative de centre  $O$  en coordonnées sphériques dérive d'une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(r)$  telle que :

$$\vec{F} = F(r) \vec{u}_r = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \vec{u}_r$$

### Exemple :

La force gravitationnelle créée par un corps de masse  $M_O$  en  $O$  :

$$\vec{F}_g = -G \frac{mM_O}{r^2} \vec{u}_r = -\frac{d\mathcal{E}_{pg}}{dr} \vec{u}_r \implies \mathcal{E}_{pg}(r) = -\frac{GmM_O}{r}$$

La force électrostatique créée par une charge  $Q_O$  en  $O$  :

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ_O}{r^2} \vec{u}_r = -\frac{d\mathcal{E}_{pe}}{dr} \vec{u}_r \implies \mathcal{E}_{pe}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ_O}{r}$$

Avec à chaque fois l'énergie potentielle prise nulle lorsque  $r \rightarrow +\infty$ .

**Propriété : Conservation du moment cinétique**

Soit un point  $M$  de masse  $m$  soumis à une force centrale de centre  $O$   $\vec{F}$  en mouvement dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . On applique le théorème du moment cinétique au point  $O$  :

$$\left. \frac{d\vec{L}_{O(M)/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = F(r)\vec{OM} \wedge \vec{u}_r = \vec{0} \implies \vec{L}_{O(M)/\mathcal{R}} = \vec{C}^{te}$$

On en déduit que le moment cinétique du point  $M$  calculé au centre  $O$  est une constante du mouvement.

**Propriété : Mouvement plan**

D'après la définition du moment cinétique :

$$\vec{L}_{O(M)/\mathcal{R}} = m\vec{OM} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Le vecteur moment cinétique est à chaque instant orthogonal au vecteur position et au vecteur vitesse. Si le moment cinétique est constant vectoriellement alors le mouvement reste dans le même plan orthogonal au moment cinétique. On peut alors définir un repère cylindrique d'axe  $(Oz)$  orthogonal au plan du mouvement.

**Propriété : Loi des aires**

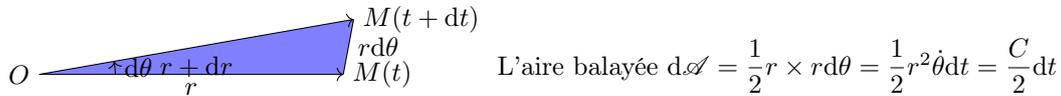
Comme le mouvement est plan, on se place en coordonnées cylindriques avec  $z = 0$ . On obtient :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r \implies \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \implies \vec{L}_{O(M)/\mathcal{R}} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

D'après le théorème du moment cinétique on a vu que  $\vec{L}_{O(M)/\mathcal{R}} = \vec{C}^{te}$ . On en déduit alors que :

$$C = r^2\dot{\theta} = C^{te}$$

Cette loi est appelée loi des aires et on retrouve la loi des aires en regardant l'aire balayée par le vecteur  $\vec{OM}$  pendant une durée  $dt$  :



### 3 Aspects énergétiques

**Propriété : Conservation de l'énergie mécanique**

On applique le TEM au point  $M$  :

**Système :**  $\{M(m)\}$  **Référentiel :** lié à l'astre en  $O$  et galiléen

**Bilan :**  $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$  force conservative

**TEM :**  $\Delta \mathcal{E}_m = 0$   $\mathcal{E}_m = C^{te}$

**Propriété : Énergie cinétique**

On calcule alors l'énergie cinétique en coordonnées polaire en utilisant  $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$  :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_{M/\mathcal{R}}\|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Avec  $C = r^2\dot{\theta}$  on obtient alors :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r) = C^{te}$$

**Definition : Énergie potentielle effective**

On définit alors l'énergie potentielle effective par :

$$\mathcal{E}_{peff}(r) = \mathcal{E}_p(r) + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$$

Le terme  $\mathcal{E}_{ceff} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$  est appelé énergie cinétique effective.

**Propriété : Étude du mouvement radial**

On a obtenu l'écriture de  $\mathcal{E}_m$  sous la forme :  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{peff}(r)$

On va alors chercher les valeurs de  $r$  accessibles au point  $M$  avec une énergie mécanique donnée  $\mathcal{E}_m$  en utilisant :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0 \implies \mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{peff}(r)$$

La résolution de cette inégalité permet d'obtenir l'intervalle des valeurs de  $r$  accessibles.

**Definition : État lié/État de diffusion (dans un champ de force newtonien)**

On cherche à résoudre l'inégalité :  $\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{peff}(r)$

- On définit l'état lié d'un point  $M$  si la solution se met sous la forme d'un intervalle fermé  $[r_1, r_2]$  tel que :

$$\mathcal{E}_{peff}(r_1) = \mathcal{E}_{peff}(r_2) = \mathcal{E}_m$$

Dans ce cas là, la trajectoire du point  $M$  est elliptique ou circulaire autour du point  $O$ .

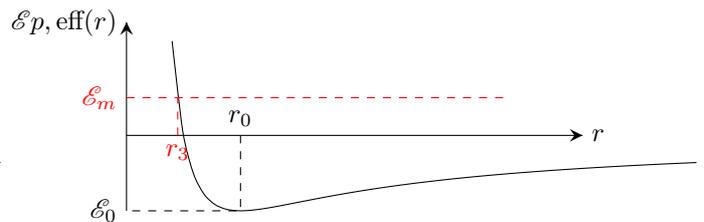
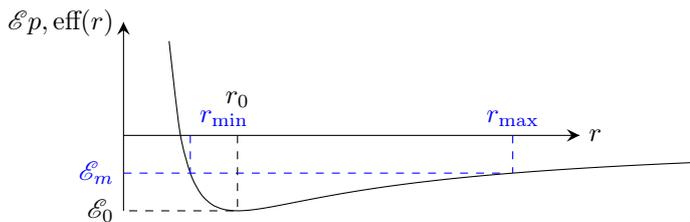
- On définit l'état de diffusion d'un point  $M$  si la solution se met sous la forme d'un intervalle semi-ouvert  $[r_1, +\infty[$  tel que :

$$\mathcal{E}_{peff}(r_1) = \mathcal{E}_m$$

Dans ce cas là, la trajectoire du point  $M$  est hyperbolique ou parabolique et sort du puit de potentiel.

**Exemple : Force d'attraction gravitationnelle**

Traçons  $\mathcal{E}_{peff}(r)$  pour  $\mathcal{E}_m < 0$  et  $\mathcal{E}_m > 0$  :



avec  $\mathcal{E}_0$  l'énergie potentielle effective minimale et  $r_0$  le rayon pour une énergie potentielle effective minimale ( $\mathcal{E}_{peff}(r_0) = \mathcal{E}_0$ ).

On observe alors deux types d'états :

- Les états liés pour lesquels l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_{m,lié} < 0$ . La particule est alors confinée entre les positions  $r_{min} = r_P$  et  $r_{max} = r_A$  tel que  $\mathcal{E}_{peff}(r_{A,P}) = \mathcal{E}_{m,lié}$ .
- Les états de diffusions pour lesquels l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_{m,diffusion} \geq 0$ . La particule est alors libre dans tout l'espace  $r \geq r_3$  tel que  $\mathcal{E}_{peff}(r_3) = \mathcal{E}_{m,diffusion}$ .

**Propriété : Trajectoires**

On observe plusieurs types de trajectoires :

- Trajectoire circulaire de rayon  $r_0$  si  $\mathcal{E}_m = -\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{peff}(r_0)$  l'énergie potentielle effective minimale.
- Trajectoire elliptique de demi grand axe  $a = \frac{r_1 + r_2}{2}$  si  $-\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_m < 0$ .
- Trajectoire parabolique si  $\mathcal{E}_m = 0$ .
- Trajectoire hyperbolique si  $\mathcal{E}_m > 0$ .

L'ensemble de ces trajectoire forme la famille des coniques.

## 4 Trajectoire circulaire

**Propriété : mouvement uniforme**

Soit un point  $M$  de masse  $m$  soumis à l'interaction gravitationnelle d'un astre fixe en  $O$  de masse  $M_O$  :  $\vec{F}_{O \rightarrow M} = -\frac{GM_O m}{r^2} \vec{u}_r$

Soit  $M$  sur une trajectoire circulaire de rayon  $r_0$  :  $\vec{OM} = r_0 \vec{u}_r \implies \vec{v} = r_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta$

On applique la loi des aires et on obtient :

$$C = r_0 \dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{C}{r_0} = C^{te}$$

On a alors  $\|\vec{v}\| = C^{te}$  le mouvement est alors circulaire uniforme.

#### Propriété : Vitesse

On applique le PFD au point  $M$  dans le référentiel géocentrique :

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{A}} = \vec{F} \implies -mr_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\frac{\mathcal{G}m_O m}{r_0^2} \vec{u}_r$$

car  $\dot{\theta} = C^{te}$ . On obtient alors :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G}m_O}{r_0^3} \implies v_0 = r_0 \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_O}{r_0}}$$

avec  $v_0$  la vitesse du satellite/astre le long de la trajectoire circulaire de centre  $O$  et de rayon  $r_0$ .

#### Propriété : Énergie mécanique minimale

On a vu que la trajectoire circulaire correspond à un minimum de l'énergie mécanique. On calcule la valeur du minimum en utilisant les propriétés précédentes :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{\min} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mathcal{G}m_O m}{r_0}$$

On utilise alors l'expression de  $v_0$  :  $\mathcal{E}_m = -\mathcal{G} \frac{m_O m}{2r_0}$

#### Propriété : Période

On en déduit la période de révolution de l'astre :  $T = \frac{2\pi r_0}{v_0} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} \implies T = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{r_0}{\mathcal{G}m_O}}$

#### Propriété : Loi de Kepler

On retrouve la troisième loi de Kepler :  $\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_O}$

## 5 Trajectoire elliptique

#### Démonstration : Énergie mécanique (à connaître)

On considère un point  $M$  de masse  $m$  en interaction gravitationnelle autour d'un astre en  $O$  de masse  $M_O$  tel que  $M$  soit sur une trajectoire elliptique.

On a vu que  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \leq \mathcal{E}_m$  et qu'il existe deux points :

- l'apogée  $A$  à une distance  $r_A$  de  $O$  ;
- le périhélie  $P$  à une distance  $r_P$  de  $O$  ;

où  $r_A$  et  $r_P$  constituent les extremum de  $r$  et donc  $\dot{r} = 0$  au point  $A$  et au point  $P$  tel que :

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_{A,P}) = \mathcal{E}_m \iff \mathcal{E}_m = \frac{mC^2}{2r_{A,P}^2} - \frac{GM_O m}{r_{A,P}} \iff r_{A,P}^2 \mathcal{E}_m + r_{A,P} GM_O m - \frac{mC^2}{2} = 0$$

on voit que  $r_A$  et  $r_P$  sont solution d'un polynôme du second degré où l'on a la relation entre les racines et les coefficients :

$$2a = r_A + r_P = -\frac{GM_O m}{\mathcal{E}_m} \implies \mathcal{E}_m = -\frac{GM_O m}{2a}$$

#### Propriété : Cas d'une trajectoire elliptique

Pour une trajectoire elliptique de demi-grand axe  $a = \frac{r_1 + r_2}{2}$  tel que  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_1) = \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_2) = \mathcal{E}_m$ , on a :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_O}}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}m_O m}{2a}}$$

### Démonstration : Loi des périodes périodes (hors programme)

On considère un point  $M$  de masse  $m$  en interaction gravitationnelle autour d'un astre en  $O$  de masse  $M_O$  tel que  $M$  soit sur une trajectoire elliptique.

On donne les relations sur les ellipses qui ne sont pas à connaître avec l'excentricité  $e$  :

- la distance à l'apogée :  $r_A = a(1 + e)$  ;
- la distance au périégée :  $r_P = a(1 - e)$  ;
- la surface de l'ellipse :  $S = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$

On a vu que  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \leq \mathcal{E}_m$  et qu'il existe deux points :

- l'apogée  $A$  à une distance  $r_A$  de  $O$  ;
- le périégée  $P$  à une distance  $r_P$  de  $O$  ;

où  $r_A$  et  $r_P$  constituent les extremum de  $r$  et donc  $\dot{r} = 0$  au point  $A$  et au point  $P$  tel que :

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_{A,P}) = \mathcal{E}_m \iff \mathcal{E}_m = \frac{mC^2}{2r_{A,P}^2} - \frac{GM_O m}{r_{A,P}} \iff r_{A,P}^2 \mathcal{E}_m + r_{A,P} GM_O m - \frac{mC^2}{2} = 0$$

on voit que  $r_A$  et  $r_P$  sont solution d'un polynôme du second degré où l'on a la relation entre les racines et les coefficients :

$$a^2(1 - e^2) = r_A r_P = -\frac{mC^2}{2\mathcal{E}_m} \implies a^2(1 - e^2) = \frac{C^2}{GM_O} a$$

On utilise alors la loi des aires :  $\frac{S}{T} = \frac{C}{2}$

$$\frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T} = \frac{C}{2} \iff \frac{\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{T^2} = \frac{C^2}{4} \iff \frac{\pi^2 a^2 C^2 a}{GM_O T^2} = \frac{C^2}{4} \iff \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_O}$$

## 6 Satellites terrestres

### Remarque : Les différents types de satellites terrestres

La terre possède plusieurs types de satellites :

- 1 satellite naturel : la Lune. Orbite quasi-circulaire de rayon  $D_{TL} = 384 \times 10^3$  km et de période  $T_L \simeq 27,3$  jour et de vitesse moyenne  $v_L \simeq 3,7 \times 10^3$  km · h<sup>-1</sup>.
- Les satellites artificiels en orbite basse (environ 1500). Leurs altitudes sont situées entre 300 km (limité par le freinage de l'atmosphère) et 2000 km pour des période de révolution entre 1 h et 2 h. La mise en orbite est moins coûteuse en énergie. Les communications sont plus facile et plus rapide.
- Les satellites artificiels en orbite moyenne (environ 100 dont le GPS). Leurs altitudes est autour de  $20 \times 10^3$  km et leurs période est autour de 12 h.
- Les satellites géostationnaire situé à une altitude de  $36 \times 10^3$  km pour une période de révolution d'environ 24 h.

### Definition : Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite qui reste en permanence à la verticale d'un même point de la Terre.

### Propriété : Plan d'orbite

Les trajectoires, dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_G$ , du satellite géostationnaire et du point  $M$  de la Terre considéré doivent être dans le même plan. Celle du satellite est dans un plan contenant le centre  $O$  de la Terre. Celle du point  $M$  est dans le plan normal à l'axe de rotation de la Terre et contenant la projection orthogonale de  $M$  sur cet axe. Ces deux plans ne sont confondus qu'à l'équateur. Ainsi un satellite géostationnaire est nécessairement équatorial.

**Propriété : Altitude**

Il n'existe qu'une orbite géostationnaire, elle est donnée par la troisième loi de Kepler. La période de révolution du satellite  $T$  doit être égale à la période du jour sidéral que met la Terre pour faire un tour complet sur elle-même  $T_{\text{sid}} = 86\,164$  s. On en déduit :

$$T_{\text{sid}}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} (R_T + h)^3$$

où  $M_T = 6,0 \times 10^{24}$  kg est la masse de la Terre,  $m$  la masse du satellite, et  $r_0 = R_T + h$  où  $R_T = 6,4 \times 10^3$  km est le rayon de la Terre, et  $h$  l'altitude du satellite géostationnaire.

On obtient alors :

$$h = \left( \frac{GM_T T_{\text{sid}}^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} - R_T = 35\,786 \text{ km}$$

**Definition : Vitesse en orbite basse**

Une orbite basse est une orbite dont l'altitude  $h$  est faible. On calcule la vitesse d'un tel satellite :

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_t + h}}$$

On suppose maintenant que  $h \ll R_T$  et on obtient la première vitesse cosmique :

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

**Definition : Vitesse de libération**

La vitesse de libération est la vitesse minimale permettant de passer de la surface de la Terre à un état de diffusion. On cherche donc  $v_2$  tel que  $\mathcal{E}_m = 0$  à la surface de la Terre :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM_T}{R_T} = 0 \implies v_2 = \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T}} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

## 7 Capacité numérique

**Propriété : Capacité numérique 5**

À l'aide de python, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.

```
def Fcentrale(X,t):
    C=v0*b
    dtheta=C/X[1]**2
    dr=X[2]
    ddr=C**2/X[1]**3-G*MT/X[1]**2
    return [dtheta,dr,ddr]
def CI(v0,b):
    r0=b
    dr0=0
    theta0=0
    return [theta0,r0,dr0]
G=6.67e-11 #cste de gravitation universelle
MT=5.98e24 # masse de la Terre
R=6.4e6 # rayon de la Terre
m=2e3 #masse du satellite artificielle
b=2*R # Param d'impact
vlib=np.sqrt(2*G*MT/b) #vitesse de liberation en b
vcirc=np.sqrt(G*MT/b) # vitesse trajectoire circulaire
v=np.array([vcirc,vcirc+0.5*(vlib-vcirc),vlib,vcirc+0.9*(vlib-vcirc),vlib,1.1*vlib,10*vlib])
N=1000
plt.figure()
plt.plot([0],[0],'ko')
for k in range(len(v)):
```

```
v0=v[k]
C=b*v0 #constante des aires
Em=0.5*m*v0**2-G*MT*m/b # energie mecanique initiale
if Em<0:
    a=-0.5*G*MT*m/Em
    T=np.sqrt(a**3*4*np.pi**2/(G*MT))
else:
    T=50*b/v0
dt=T/(N-1)
t=np.array([k*dt for k in range(N)])
sol=odeint(Fcentrale,CI(v0,b),t)
r,theta=sol[:,1],sol[:,0]
x,y=r*np.cos(theta),r*np.sin(theta)
plt.plot(x,y)
plt.axis('scaled')
plt.xlabel('x en m')
plt.ylabel('y en m')
plt.show()
```

## Quatrième partie

### Chimie

#### Liste des chapitres Chimie

<b>1</b>	<b>Molécules et solvants</b>	<b>133</b>
1	Configuration électronique d'un atome . . . . .	133
2	Modèle de la liaison covalente . . . . .	135
3	Polarité des molécules . . . . .	137
4	Forces intermoléculaires . . . . .	138
5	Les solvants moléculaires . . . . .	139
<b>2</b>	<b>Transformation de la matière</b>	<b>141</b>
1	Description d'un système physico-chimique : . . . . .	141
2	Transformation chimique d'un système . . . . .	142
3	État final d'une transformation chimique . . . . .	143
4	Capacité numérique . . . . .	146
<b>3</b>	<b>Cinétique chimique</b>	<b>147</b>
1	Vitesse de réaction . . . . .	147
2	Lois de vitesse . . . . .	148
3	Mesures physiques . . . . .	150
4	Méthode intégrale . . . . .	151
5	Influence de la température . . . . .	154
<b>4</b>	<b>Équilibre acido-basique en solution aqueuse</b>	<b>155</b>
1	Couple acido-basique : . . . . .	155
2	Constante d'acidité : . . . . .	156
3	réaction . . . . .	159
4	Titration acide-base . . . . .	159
5	Titration acido-basique par suivi conductimétrique . . . . .	161
6	Titration acido-basique par suivi pH-métrique . . . . .	162
<b>5</b>	<b>Dissolution et précipitation</b>	<b>165</b>
1	Précipitation et dissolution d'un sel . . . . .	165
2	Solubilité . . . . .	166
3	Facteurs d'influences . . . . .	167
<b>6</b>	<b>Réaction d'oxydo-réduction</b>	<b>169</b>
1	Oxydants et réducteurs . . . . .	169
2	Piles et potentiels . . . . .	170
3	Réaction d'oxydo-réduction . . . . .	172
<b>7</b>	<b>Diagramme potentiel-pH</b>	<b>175</b>
1	Rappel sur les diagrammes . . . . .	175
2	Diagramme potentiel-pH de l'eau . . . . .	176
3	Diagramme potentiel-pH du fer . . . . .	176
4	Diagramme potentiel-pH du chlore . . . . .	177
5	Utilisation des diagrammes potentiel-pH . . . . .	179
<b>8</b>	<b>Solides cristallins</b>	<b>181</b>
1	Le modèle du cristal parfait . . . . .	181

---

2	La structure CFC . . . . .	183
3	Les différentes familles de cristaux . . . . .	185

## Chimie 1 : Molécules et solvants

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>4.2.1 Structure des entités chimiques</b>	
<b>Modèle de la liaison covalente</b> Liaison covalente localisée. Schéma de Lewis d'une molécule ou d'un ion monoatomique ou d'un ion polyatomique pour les éléments des blocs <i>s</i> et <i>p</i> .	Citer les ordres de grandeur de longueurs et d'énergies de liaisons covalentes. Déterminer, pour les éléments des blocs <i>s</i> et <i>p</i> , le nombre d'électrons de valence d'un atome à partir de la position de l'élément dans le tableau périodique. Établir un schéma de Lewis pertinent pour une molécule ou un ion. Identifier les écarts à la règle de l'octet.
<b>Géométrie et polarité des entités chimiques</b> Électronégativité : liaison polarisée, moment dipolaire, molécule polaire.	Associer qualitativement la géométrie d'une entité à une minimisation de son énergie. Comparer les électronégativités de deux atomes à partir de données ou de leurs positions dans le tableau périodique. Prévoir la polarisation d'une liaison à partir des électronégativités comparées des deux atomes mis en jeu. Relier l'existence ou non d'un moment dipolaire permanent à la structure géométrique donnée d'une molécule. Déterminer direction et sens du vecteur moment dipolaire d'une liaison ou d'une molécule de géométrie donnée.
<b>4.2.2 Relations structure des entités - propriétés physiques macroscopiques</b>	
<b>Interaction entre entités</b> Interactions de van der Waals. Liaison hydrogène ou interaction par pont hydrogène.  <b>Solubilité ; miscibilité.</b> Grandeurs caractéristiques et propriétés de solvants moléculaires : moment dipolaire, permittivité relative, caractère protogène. Mise en solution d'une espèce chimique moléculaire ou ionique.	Citer les ordres de grandeur énergétiques des interactions de van der Waals et de liaisons hydrogène. Interpréter l'évolution de températures de changement d'état de corps purs moléculaires à l'aide de l'existence d'interactions de van der Waals ou par pont hydrogène.  Associer une propriété d'un solvant moléculaire à une ou des grandeurs caractéristiques. Interpréter la miscibilité ou la non-miscibilité de deux solvants. Interpréter la solubilité d'une espèce chimique moléculaire ou ionique.

## 1 Configuration électronique d'un atome

**Definition : Composition d'un atome**

L'atome est constitué d'un noyau et de son cortège électronique. On note  ${}^A_ZX$  :

- $Z$  le nombre de protons dans le noyau et d'électrons dans l'atome.  $Z$  représente le nombre de charges de l'atome. Il est aussi appelé numéro atomique.
- $N$  le nombre de neutrons dans le noyau.
- $A = Z + N$  le nombre total de nucléons.  $A$  est aussi appelé nombre de masse.

Un atome est électriquement neutre, il contient donc  $Z$  électrons.

Un **élément chimique** est défini par son numéro atomique  $Z$ . Il peut être sous la forme de différents **isotopes** qui possèdent un nombre de masse  $A$  différent.

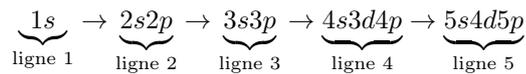
**Propriété : Configuration électronique**

Les électrons sont répartis dans des couches électroniques associées à un nombre entier  $n$  qui se déclinent en sous-couches associées à des lettres *s*, *p*, *d*, etc.

On retiendra que pour un atome dans son état fondamental :

- Une sous-couche *s* contient au maximum deux électrons, une sous-couche *p* au maximum six électrons et une sous-couche *d* au maximum dix électrons ;
- Toutes les sous-couches doivent être pleines avant d'en remplir une nouvelle ;

- L'ordre de remplissage des sous-couche est le suivant :



### Definition : Électrons de cœur / électrons de valence

Les énergies des divers électrons présents dans un atome n'évoluent pas de façon continue. Il est d'usage de séparer les électrons d'un atome en deux groupes :

- Les électrons de valence qui sont moins liés au noyau ;
- Les électrons de cœur qui sont solidement liés au noyau.

### Propriété : Électrons de valence

Les électrons de valence d'un atome sont les électrons occupant les orbitales de nombre quantique principal  $n$  le plus élevé et/ou les sous-couches incomplètes.

### Definition : Tableau périodique, construction par bloc

Les éléments sont classés par numéros atomiques  $Z$  croissants et rangés en colonnes et lignes appelées périodes de façon à ce que les éléments d'une même colonne présentent des propriétés chimiques analogues.

Des considération de mécanique quantique permettent de définir 4 bloc dans le tableau périodique. À partir de la deuxième période on a :

- le bloc  $s$  qui constitue les deux premières colonnes plus les deux premiers éléments H et He ;
- le bloc  $p$  qui constitue les 6 dernières colonnes ;
- le bloc  $d$  qui constitue les 10 colonnes entre le bloc  $s$  et le bloc  $p$  à partir de la 4<sup>e</sup> ligne ;
- le bloc  $f$  qui constitue les 14 colonnes entre le bloc  $s$  et le bloc  $d$  à partir de la 6<sup>e</sup> ligne.

	1																18	
I		2																
II																		
III			3	4	5	6	7	8	9	10	11	12						
	bloc $s$		bloc $d$										bloc $p$					

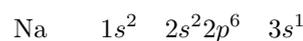
### Propriété : Nombre d'électrons de valence

Le nombre d'électrons de valence se déduit de la place d'un élément dans la classification périodique.

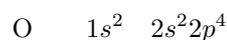
- Pour un élément du bloc  $s$  c'est son numéro de colonne ;
- Pour un élément du bloc  $p$  c'est son numéro de colonne -10 ;

### Exemple :

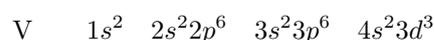
- Le sodium est situé à la période III dans la première colonne du bloc  $s$  : il possède un électron de valence et sa configuration électronique est



- L'oxygène est situé à la période II dans la quatrième colonne du bloc  $p$  : il possède 6 électrons de valence et sa configuration électronique est



- Le vanadium est à la période IV dans la troisième colonne du bloc  $d$  : il possède 5 électrons de valence et sa configuration électronique est



### Exemple :

En vous aidant de la classification périodique indiquer le nombre d'électrons de valence des éléments suivants : carbone,

azote, fluor, phosphore, soufre, chlore.

1											18			
I	1 H	2									Z X	2 He		
II	3 Li	4 Be	5	6	7	8	9	10	13	14	15	16	17	18
III	11 Na	12 Mg	B	C	N	O	F	Ne	Al	Si	P	S	Cl	Ar

## 2 Modèle de la liaison covalente

### Definition : Liaison covalente selon Lewis

Une liaison covalente entre deux atomes résulte de la mise en commun de deux électrons de valence. Les électrons forment alors un doublet liant entre les deux atomes. La liaison est simple si elle est constituée d'un seul doublet liant, elle peut être double si elle est constituée de deux doublets liants ou triple.

Les électrons de valences d'un atome ne sont pas partagés, ils forment des doublets non liants qui sont localisés autour de l'atome.

### Remarque : Ordre de grandeur

On donne l'ordre de grandeur de l'énergie molaire d'une liaison covalente ainsi que la distance entre deux atomes lié par liaison covalente :

- $E_{cov} \sim 100 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  à  $1000 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
- $d_{cov} \sim 100 \text{ pm}$

### Règle du duet et de l'octet

Les éléments tendent à former des édifices chimiques (molécules ou ions) dans lesquels ils sont entourés de :

- 2 électrons (1 doublet) pour l'hydrogène ;
- 8 électrons (4 doublets) pour les périodes  $n \geq 2$  ;

afin de saturer leurs couche de valence et gagner en stabilité.

### Remarque :

Le modèle de Lewis est restreint aux éléments des bloc  $s$  et  $p$ .

Les éléments du bloc  $d$  nécessitent d'utiliser un modèle basé sur la mécanique quantique pour comprendre les liaisons formées.

### Definition : Charge formelle

Soit un atome  $X$  possédant  $E$  électrons de valence. Si au sein d'une molécule  $X$  est entouré de  $P$  doublets non liants et  $L$  doublets liants. Alors  $X$  possède une charge formelle :

$$CF = E - 2P - L$$

### Propriété : Charge d'une molécule

Si la molécule formée possède une charge  $q$ . On peut alors vérifier :

$$q = \sum_i CF_i$$

### Méthode : Méthode pour trouver le schéma de Lewis d'une molécule

Pour une molécule de charge  $q$ , composée de  $k$  atomes  $X_i$  de nombre d'électrons de valences  $E_i$  :

1. Déterminer le nombre d'électrons de valence de la molécule :  $N = \sum_{i=1}^k E_i - q$  ;

2. Déterminer le nombre de doublets à placer :  $D = \frac{N}{2}$  ;
3. Relier chaque atome à ses voisins par un doublet liant.
4. Placer les doublets restants de façon à ce que le plus d'atomes respectent la règle du duet ou de l'octet.
5. Placer les charges formelles sur chaque atome.

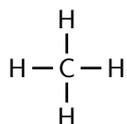
**Exemple :**

- La molécule d'eau H<sub>2</sub>O :



L'atome O possède 6 électrons de valence, 2 doublets non liant et 2 doublet liant :  $CF = 6 - 2 \times 2 - 2 = 0$

- La molécule de méthane CH<sub>4</sub> :



L'atome C possède 4 électrons de valence, 0 doublets non liant et 4 doublet liant :  $CF = 4 - 0 \times 2 - 4 = 0$

- La molécule de dichlore Cl<sub>2</sub> :



L'atome Cl possède 7 électrons de valence, 3 doublets non liant et 1 doublet liant :  $CF = 7 - 3 \times 2 - 1 = 0$

- L'ion hypochlorite ClO<sup>-</sup> :



L'atome O possède 6 électrons de valence, 3 doublets non liant et 1 doublet liant :  $CF = 6 - 3 \times 2 - 1 = -1$

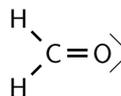
On a bien la somme des charges formelles qui est égale à la charge de l'ion.

- La molécule de diazote N<sub>2</sub> :



L'atome N possède 5 électrons de valence, 1 doublets non liant et 3 doublet liant :  $CF = 5 - 1 \times 2 - 3 = 0$

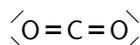
- La molécule de méthanal H<sub>2</sub>CO :



L'atome C possède 4 électrons de valence, 0 doublets non liant et 4 doublet liant :  $CF = 4 - 0 \times 2 - 4 = 0$

L'atome O possède 6 électrons de valence, 2 doublets non liant et 2 doublet liant :  $CF = 6 - 2 \times 2 - 2 = 0$

- Le dioxyde de carbone CO<sub>2</sub> :



- Le monoxyde de carbone CO :

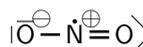


L'atome O possède 6 électrons de valence, 1 doublets non liant et 3 doublet liant :  $CF = 6 - 1 \times 2 - 3 = 1$

L'atome C possède 4 électrons de valences, 1 doublets non liant et 3 doublet liant :  $CF = 4 - 1 \times 2 - 3 = -1$

On a bien la somme des charges formelles qui est nulle car la molécule n'est pas chargée.

- Le dioxyde d'azote NO<sub>2</sub> :



L'atome O possède 6 électrons de valences, 3 doublets non liant et 1 doublet liant :  $CF = 6 - 3 \times 2 - 1 = -1$

L'atome N possède 5 électrons de valences, 1 électron célibataire et 3 doublet liant :  $CF = 4 - 1 \times 2 - 1 - 3 = -1$ .

On a bien la somme des charges formelles qui est nulle car la molécule n'est pas chargée.

**Definition : Radicaux**

Si le nombre d'électrons de valence de la molécule est impair, alors il reste un électron célibataire à la fin. La molécule est alors extrêmement réactive car cet électron célibataire va chercher à être très réactif.

**Definition : Lacune électronique**

Lorsqu'un atome ne peut pas s'entourer d'un octet d'électrons, il est qualifié d'électrodéficient. Il est schématisé avec

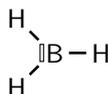
une lacune électronique symbolisée par un rectangle vide.

### Definition : Hypervalence

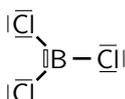
À partir de la troisième ligne incluse, certains atomes peuvent avoir une valence plus grande que 4. On dit que ces atomes sont hypervalent et on ne peut pas prédire ces molécules avec le modèle de Lewis.

### Exemple :

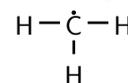
- Le trihydrure de bore  $\text{BH}_3$  :



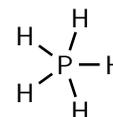
- Le trichlorure d'aluminium  $\text{AlCl}_3$  ( $Z(\text{Al})=13$ ) :



- Le méthyle  $\text{CH}_3$  est un composé radical :



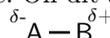
- Le phosphorane  $\text{PH}_5$  est un composé hypervalent :



## 3 Polarité des molécules

### Definition : Liaison polaire et électronégativité

Lorsque deux atomes d'éléments chimiques différents sont en liaison covalente, les électrons de valences ne restent pas répartis équitablement entre les deux atomes. Ils sont plus attirés par l'un ou par l'autre des deux atomes, ce qui crée un déséquilibre des charges au niveau de chaque atome. On dit alors que la liaison est polarisée :



L'électronégativité  $\chi$  d'un élément chimique A quantifie sa propension à s'approprier les électrons d'une liaison covalente qui le lie à B. Ici  $\chi_A > \chi_B$  car le nuage électronique est plus proche de A que de B.

### Definition : Moment dipolaire d'une liaison

On considère une liaison AB polarisée, on définit le vecteur moment dipolaire  $\vec{\mu}$  :

$$\overset{\delta^-}{\text{A}} - \overset{\delta^+}{\text{B}} \quad \text{avec} \quad \vec{\mu} = \delta e \times \overrightarrow{AB} \quad \text{de norme} \quad \|\vec{\mu}\| = \delta e d_{AB}$$

où  $\vec{\mu}$  est orienté de la charge négative vers la charge positive (ici de A vers B)  $d_{AB}$  est la longueur de la liaison AB et  $\delta e$  la charge partielle en coulomb.

L'unité S.I. du moment dipolaire est le coulomb.mètre ( $\text{C} \cdot \text{m}$ ). Cependant, on utilise beaucoup le Debye (D) :

$$1 \text{ D} = 3,33 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$$

### Propriété : Évolution dans le tableau

L'électronégativité  $\chi$  augmente si l'on se déplace dans la classification périodique de la gauche vers la droite ou du bas vers le haut. L'élément le plus électronégatif est le fluor F.

Il existe plusieurs échelles pour évaluer l'électronégativité d'un atome. Ici quelques valeurs tabulées d'électronégativité avec l'échelle de PAULING.

	H	Li	Be	B	C	N	O	F	S	Cl
$\chi_p$	2,20	0,98	1,57	2,04	2,55	3,04	3,44	3,98	2,58	3,16

### Definition : Forme d'une molécule

Les doublets d'électrons se repoussent car sont chargés négativement : la géométrie la plus stable est celle où les doublets sont les plus éloignés les uns des autres.

### Propriété : Méthode VSEPR

On considère un atome A central lié à n atomes X et porteur de p doublets non liants, on note :  $\text{AX}_n\text{E}_p$

On applique alors :

- On calcule la somme de tous les doublets  $n + p$ , ce qui permet de savoir comment se répartissent les doublets autour de A;

- On regarde alors la géométrie de l'ensemble des atomes qui forment la molécule.

#### Definition : Polarité d'une molécule

On dit qu'une molécule est polaire si le barycentre des charges positives de la molécule ne coïncide pas avec le barycentre des charges négatives.

#### Propriété : Calcul du moment dipolaire d'une molécule

En première approximation, le moment dipolaire d'une molécule est égal à la somme vectorielle des moments dipolaires des liaisons covalentes polarisées de la molécule.

Si son moment dipolaire est non nul alors la molécule est dite polaire, sinon elle est apolaire.

#### Definition : molécules apolaires

Une molécule apolaire peut être polarisée par l'extérieur de manière transitoire :

- Lorsque la molécule est en présence d'un ion ou d'une molécule polaire, alors elle possède un moment dipolaire induit.
- Lorsque sous l'effet de fluctuations elle possède un moment dipolaire qui est nul en moyenne tout en ayant un moment dipolaire instantané.

Ces deux effets sont plus importants lorsque la molécule est dite polarisable. La polarisabilité d'une molécule est directement liée à sa taille.

#### Propriété : Polarisation

En présence d'un champ électrique  $\vec{E}$  (créé par une molécule polaire avoisinante), une molécule possède alors un moment dipolaire induit supplémentaire

$$\vec{p}_{\text{ind}} = \alpha \vec{E} \quad \text{où } \alpha \text{ est la polarisabilité de la molécule}$$

La polarisabilité caractérise l'aptitude du nuage électronique d'un atome ou d'une molécule à se déformer sous l'effet d'un champ  $\vec{E}$ .  $\alpha$  s'exprime en  $\text{C} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{V}^{-1}$  et augmente avec la taille de l'atome ou de la molécule.

## 4 Forces intermoléculaires

#### Definition : Interactions de van der Waals

Les interactions de van der Waals sont les interactions électrostatiques attractives qui s'établissent entre les charges dipolaires de deux édifices chimiques. On distingue les interactions :

- de type Keesom : interaction entre deux dipôles permanents (entre deux molécules polaires) ;
- de type Debye : interaction entre un dipôle permanent et un dipôle induit (entre une molécule polaire et une molécule apolaire) ;
- de type London : interaction entre un dipôle instantané et le dipôle qu'il induit (entre deux molécules apolaires).

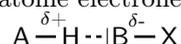
#### Propriété : Additivité des interactions

Pour une molécule apolaire, on peut lui attribuer un moment dipolaire instantané et un moment dipolaire induit si elle est en présence d'une molécule ionique ou polarisée. On retiendra que l'interaction entre deux molécules est la somme des interactions suivantes :

- deux molécules polaires : Keesom + Debye + London ;
- deux molécules apolaires : London ;
- une molécule apolaire et une molécule polaire : Debye + London.

#### Definition : Liaison hydrogène

La liaison hydrogène est l'interaction attractive qui s'établit entre un atome d'hydrogène lié à un atome très électronégatif  $A$  et un doublet non liant d'électrons porté par un atome électronégatif  $B$ .



$A$  et  $B$  étant le plus souvent des atomes de fluor (F), d'oxygène (O) ou d'azote (N).

**Remarque : Ordre de grandeur**

- Liaison covalente :  $E_{cov} = 200 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  à  $800 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Interaction VdW :  $E_{VdW} = 1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  à  $5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Liaison hydrogène :  $E_H = 10 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  à  $40 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

**Definition : Température de changement d'état**

Lors d'un changement d'état, on change la distance moyenne entre les molécules leurs orientations. Pour chaque état de la matière on a donc des interactions intermoléculaires de différentes intensités :

État de la matière	Intensité des interactions
Solide	forte
Liquide	Intermédiaire
Gazeux	Faible

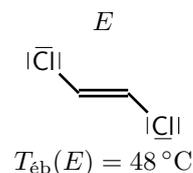
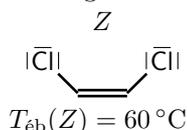
La température de changement d'état correspond à l'énergie d'agitation thermique nécessaire pour diminuer les interactions de van der Waals. On retiendra qu'entre deux composés, celui dont la température de changement d'état est la plus élevée est celui dont l'interaction intermoléculaire est la plus intense.

**Propriété : Influence du moment dipolaire**

L'existence de moment dipolaire permanent favorise la cohésion entre les molécules. Une molécule polaire aura une température de changement d'état supérieure par rapport à une molécule apolaire semblable.

**Exemple :**

Les deux isomères de configuration du 1,2-dichloroéthène :

**Propriété : Influence de la polarisabilité**

Plus les atomes composant la molécule sont gros, plus la molécule est polarisable et plus les interactions de cohésion seront intenses.

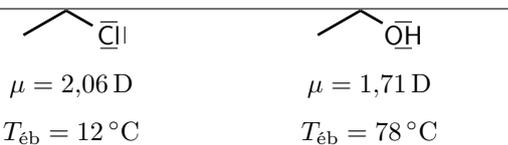
On observe donc une augmentation de la température de changement d'état avec la taille des molécules.

**Remarque : Cas particulier :**

Pour des molécules présentant des liaisons hydrogènes comme HF, H<sub>2</sub>O, NH<sub>3</sub>, on observe que la température de changement d'état est plus élevée car l'interaction intermoléculaire est plus intense.

**Exemple :**

Considérons les molécules de chloroéthane et d'éthanol :



Les interactions de van der Waals sont plus intenses pour le chloroéthane (moment dipolaire plus élevé et plus forte polarisabilité) mais les liaisons hydrogènes de l'éthanol sont plus intenses.

## 5 Les solvants moléculaires

**Definition : Solvant**

Une solution est un mélange homogène de deux substances au moins, obtenu par la dissolution de l'une dans l'autre. La substance minoritaire est le soluté et la majoritaire le solvant.

**Propriété : Permittivité électrique relative**

La permittivité électrique caractérise l'intensité de l'interaction coulombienne entre deux ions de charges opposées  $q_1 q_2 < 0$  soit  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1}$  donc plus  $\epsilon_r$  est grand, plus les ions seront dissociés car l'interaction coulombienne est moins forte.

**Propriété : Le moment dipolaire**

Une molécule de solvant de moment dipolaire  $\vec{p}$  va pouvoir polariser une liaison afin de faciliter la dissociation d'une espèce dans le solvant sous forme ionique.

**Propriété : Proticité du solvant**

La proticité d'un solvant est la capacité d'un solvant à intervenir dans une liaison hydrogène. On dit alors que le solvant est protique.

**Propriété : Solubilité**

Un soluté A est soluble dans un solvant S si les interactions A-S sont aussi fortes que les interactions A-A ou S-S. On en déduit la règle empirique qu'un composé est soluble dans un solvant si les deux molécules possèdent des propriétés similaires (moment dipolaire, proticité).

**Propriété : Miscibilité de deux solvants**

Deux solvants S et S' sont miscibles s'ils présentent des interactions similaires entre eux.

## Chimie 2 : Transformation de la matière

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>4.1.1 Description d'un système et de son évolution vers un état final</b>	
<b>Système physico-chimique</b> Espèces physico-chimiques.	Recenser les espèces physico-chimiques présentes dans un système.
Corps purs et mélanges : concentration en quantité de matière, fraction molaire, pression partielle. Composition d'un système physico-chimique	Décrire la composition d'un système à l'aide des grandeurs physiques pertinentes.
Variables intensives et extensives.	Identifier le caractère extensif ou intensif d'une variable.
<b>Transformation chimique d'un système</b> Modélisation d'une transformation par une ou plusieurs réactions chimiques. Équation de réaction ; constante thermodynamique d'équilibre.	Écrire l'équation de la réaction (ou des réactions) qui modélise(nt) une transformation chimique donnée.  <b>Déterminer une constante d'équilibre.</b>
Évolution d'un système lors d'une transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique : avancement, activité, quotient réactionnel, critère d'évolution.	Décrire qualitativement et quantitativement un système chimique dans l'état initial ou dans un état d'avancement quelconque. Exprimer l'activité d'une espèce chimique pure ou dans un mélange dans le cas de solutions aqueuses très diluées ou de mélanges de gaz parfaits avec référence à l'état standard. Exprimer le quotient réactionnel. Prévoir le sens de l'évolution spontanée d'un système chimique.
Composition chimique du système dans l'état final : état d'équilibre chimique, transformation totale.	Identifier un état d'équilibre chimique. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique ou de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. <u>Capacité numérique</u> : déterminer, à l'aide d'un langage de programmation, l'état final d'un système, siège d'une transformation, modélisée par une réaction à partir des conditions initiales et valeur de la constante d'équilibre.

### 1 Description d'un système physico-chimique :

#### Definition : Vocabulaire à connaître

**Corps pur** : Les corps pur sont des système composé d'un seul type de particule. Toutes les particules sont identiques.

**Mélange** : Un mélange contient plusieurs espèces chimiques  $A_i$ . Pour le décrire, il faut indiquer sa composition en recensant les espèces présentes avec leurs états physique.

**Solution aqueuse** : Une solution est un mélange monophasique dans lequel  $H_2O(l)$  est ultra-majoritaire. Cette espèce est appelée solvant. Les espèces minoritaires sont appelées solutés.

#### Definition : Variables d'états extensives/intensives

On appelle variables d'état les grandeurs macroscopiques permettant de définir l'état d'un système. Elles sont de deux types :

- Une variable extensive est une variable qui dépend de la taille du système.
- Une variable intensive est une variable qui ne dépend pas de la taille du système.

#### Méthode : Description d'une solution aqueuse

On peut décrire la composition chimique d'une solution, de volume  $V$ , composée de  $N$  solutés  $A_i$  à l'aide des variables suivantes :

- Variable extensive : la quantité de matière de chaque constituant :  $n_i$  ;
- Variable intensive : la concentration molaire de chaque constituant :  $[A_i] = \frac{n_i}{V}$  ;

**Méthode : Description d'un mélange gazeux idéal**

On peut décrire la composition chimique d'un mélange idéal de gaz, de volume  $V$ , de pression  $P$  composée de  $N$  solutés  $A_i$  à l'aide des variables suivantes :

- On considère le gaz comme parfait, soit  $n_{\text{tot}}$  la quantité de matière totale du gaz tous constituants confondus :

$$PV = n_{\text{tot}}RT \quad \text{avec } R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et  $T$  la température du mélange en kelvin.

- Variable extensive : la quantité de matière de chaque constituant :  $n_i$  ;
- Variable intensive : la fraction molaire de chaque constituant :  $x_i = \frac{n_i}{n_{\text{tot}}}$  ;
- Variable intensive : on définit la pression partielle du constituant  $A_i$  comme la pression du système de volume  $V$  à la température  $T$  si  $A_i$  était seul :

$$P(A_i) = \frac{n_i RT}{V}$$

**Loi de Dalton**

En combinant la définition de la pression partielle et la loi des gaz parfait appliquée au mélange total :

$$P(A_i) = \frac{n_i RT}{V} \quad P = \frac{n_{\text{tot}} RT}{V} \iff \frac{P(A_i)}{P} = \frac{n_i}{n_{\text{tot}}} = x_i$$

On peut alors calculer la pression partielle d'un constituant et la pression totale :

$$P_i = x_i P \quad \text{avec } \sum_{i=1}^k P_i = P$$

**2 Transformation chimique d'un système****Définition : Transformation chimique**

Une transformation chimique est une transformation mettant en jeu une modification des espèces chimiques, de leur nature et de leur quantité de matière.

**Propriété : Réaction chimique**

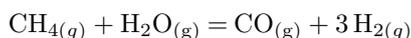
Une réaction chimique est définie par une équation bilan et est caractérisée par une constante thermodynamique  $K^\circ(T)$  appelée constante d'équilibre, dont la valeur dépend de la température  $T$  du système.

On modélise une réaction chimique faisant intervenir  $k$  constituants  $A_i$  par l'équation de la réaction :

$$\sum_{i=1}^k \nu_i A_i = 0$$

où  $\nu_i$  est le coefficient stœchiométrique algébrique de l'espèce  $A_i$ . On note :

- $\nu_i > 0$  si  $A_i$  est un produit ;
- $\nu_i < 0$  si  $A_i$  est un réactif.

**Exemple :****Définition : Avancement molaire**

On définit alors l'avancement molaire  $\xi$  comme :

$$\xi(t) = \frac{n_i(t) - n_i(t=0)}{\nu_i}$$

**Propriété : Tableau d'avancement**

Un tableau d'avancement consiste à reporter les quantités de matière (en mol) à l'instant initial, et à un instant quelconque pendant la transformation :

	CH <sub>4</sub> (g)	+	H <sub>2</sub> O(g)	=	CO(g)	+	3 H <sub>2</sub> (g)
EI	$n_1$		$n_2$		$n_3$		$n_4$
EF	$n_1 - \xi_f$		$n_2 - \xi_f$		$n_3 + \xi_f$		$n_4 + \xi_f$

Avec  $\xi_f$  la valeur de l'avancement à la fin de la réaction qu'on appelle avancement final.

**Remarque : Avancement volumiques**

Lorsque le volume  $V$  du système est constant on peut exprimer le tableau d'avancement en fonction de l'avancement volumique  $x = \frac{\xi}{V}$  en divisant toutes les cases du tableau par  $V$ . On obtient alors :

	CH <sub>4</sub> (g)	+	H <sub>2</sub> O(g)	=	CO(g)	+	3 H <sub>2</sub> gaz
EI	$C_1$		$C_2$		$C_3$		$C_4$
EF	$C_1 - x_f$		$C_2 - x_f$		$C_3 + x_f$		$C_4 + x_f$

**Définition : Réaction totale**

Une réaction est totale si elle se poursuit jusqu'à épuisement d'au moins un réactif. On dit alors que le ou les réactifs manquant sont **limitants**. L'avancement final est alors égal à l'avancement maximal de la réaction :  $\xi_f = \xi_{\max}$

**Définition : Taux d'avancement**

On définit le taux d'avancement comme le rapport entre l'avancement final de la réaction et son avancement maximal si la réaction était totale :

$$\tau = \frac{\xi_f}{\xi_{\max}}$$

**Définition : Quotient de réaction**

On définit alors le quotient de réaction qui est une grandeur adimensionnelle instantanée définie par :

$$Q(t) = \prod_{i=1}^k a_i^{\nu_i}(t)$$

avec  $a_i$  l'activité chimique de l'espèce  $A_i$  qui dépend de la phase de l'espèce et de ses variables d'états.

**Propriété : Activité chimique**

corps pur		mélange		
phase condensée	phase gazeuse	solvant	soluté au sein d'une solution très diluée	gaz parfait au sein d'un mélange de gaz parfaits
$a_i = 1$	$a_i = \frac{P}{P^\circ}$	$a_i = 1$	$a_i = \frac{[A_i]}{c^\circ}$	$a_i = \frac{P_i}{P^\circ}$

avec  $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  est la concentration de référence appelée concentration standard ; et  $P^\circ = 1 \text{ bar}$  est la pression de référence appelée pression standard.

### 3 État final d'une transformation chimique

**Définition : Équilibre thermodynamique**

Un système fermé est à l'équilibre thermodynamique quand sa température  $T$ , sa pression  $P$  et sa composition chimique n'évoluent plus.

**Loi de l'équilibre thermodynamique**

À l'équilibre thermodynamique l'avancement de la réaction vaut  $\xi_{\text{eq}}$  et on a :

$$Q_{\text{req}} = \prod_{i=1}^k a_{\text{eq}}^{\nu_i}(A_i) = K^\circ(T)$$

où  $K^\circ(T)$  est la constante d'équilibre thermodynamique de la réaction chimique étudiée.

**Propriété : Constante d'équilibre**

Une réaction chimique caractérisée par une constante d'équilibre  $K^\circ$  est dite :

- favorisée dans le sens direct si  $K^\circ > 1$  ;
- défavorisée dans le sens direct si  $K^\circ < 1$  (favorisée dans le sens indirect).

À l'équilibre on peut écrire la constante d'équilibre  $K_{\text{direct}}^\circ$  associée au sens direct d'équation de réaction :

$$\sum_{i=1}^k \nu_i A_i = 0 \implies K_{\text{direct}}^\circ = \prod_{i=1}^k a_{\text{eq}}^{\nu_i}(A_i)$$

À l'équilibre on peut écrire la constante d'équilibre  $K_{\text{indirect}}^\circ$  associée au sens indirect d'équation de réaction :

$$\sum_{i=1}^k -\nu_i A_i = 0 \implies K_{\text{indirect}}^\circ = \prod_{i=1}^k a_{\text{eq}}^{-\nu_i}(A_i) = \frac{1}{K_{\text{direct}}^\circ}$$

**Propriété : Réaction très peu avancée**

Dans le cas où  $K \ll 1$  On parle de réaction très limitée ou très peu avancée. On peut effectuer les simplifications suivante sur le tableau d'avancement :

	$\text{CH}_4(\text{g})$	+	$\text{H}_2\text{O}(\text{g})$	=	$\text{CO}(\text{g})$	+	$3\text{H}_2(\text{g})$
EI	$n_1$		$n_2$		0		0
EF	$n_1 - \xi_{\text{eq}} \approx n_1$		$n_2 - \xi_{\text{eq}} \approx n_2$		$\xi_{\text{eq}}$		$\xi_{\text{eq}}$

**Propriété : Réaction quantitative**

Dans le cas où  $K \gg 1$  On parle de réaction quantitative ou très avancée. On peut effectuer les simplifications suivante sur le tableau d'avancement :

	$\text{CH}_4(\text{g})$	+	$\text{H}_2\text{O}(\text{g})$	=	$\text{CO}_{\text{gaz}}$	+	$3\text{H}_{2\text{gaz}}$
EI	$n_0$		$n_0$		0		0
EF	$n_0 - \xi_{\text{eq}} \approx \epsilon$		$n_0 - \xi_{\text{eq}} \approx \epsilon$		$\xi_{\text{eq}} \approx n_0$		$\xi_{\text{eq}} \approx n_0$

**Propriété : Réaction totale**

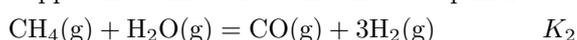
Une réaction totale est une réaction où l'état d'équilibre thermodynamique n'est pas atteint.

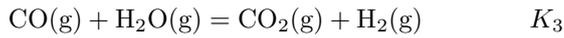
**Méthode : Déterminer la constante d'équilibre**

- Faire une combinaison linéaire des différentes réactions dont la constante d'équilibre est connue pour obtenir la réaction cherchée.
- chaque fois que vous ajoutez deux réactions, vous multipliez les constantes d'équilibre.
- chaque fois que vous faites la soustraction de deux réactions vous divisez les constantes d'équilibre.
- Vous pouvez alors exprimer la constante d'équilibre.

**Exemple :  $\text{CO}_2(\text{g}) + 4\text{H}_2(\text{g}) = \text{CH}_4(\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O}(\text{g})$** 

Supposons connues les constantes d'équilibre des réactions suivantes à la température  $T$  :





Alors  $K_1 = 1/(K_2K_3)$

### Méthode : Détermination du sens d'évolution spontanée

- Calculer le quotient de réaction à l'état initial  $Q(t=0)$  ;
- Comparer  $Q(t=0)$  avec  $K$  :
  - Si  $K > Q(t=0)$  l'évolution se fait dans le sens direct ;
  - si  $K = Q(t=0)$  le système est déjà à l'équilibre thermodynamique et n'évolue pas ;
  - si  $K < Q(t=0)$  l'évolution se fait dans le sens indirect.

### Méthode : Déterminer l'état final d'un système

- Écrire l'équation bilan de la réaction et la tableau d'avancement correspondant.
- Pour les systèmes en phase gazeuse, ajouter une colonne quantité totale de gaz à exprimer en fonction de  $\xi_{\text{eq}}$ .
- Exprimer le quotient  $Q_{\text{eq}}$  de la réaction à l'équilibre en fonction de  $\xi_{\text{eq}}$  ;
- Pour les systèmes en phase gazeuse, exprimer  $P(A_i) = x_i P_{\text{tot}}$  en fonction de  $\xi_{\text{eq}}$ .
- Écrire la loi de l'équilibre  $Q_{\text{eq}} = K^\circ$  et en déduire l'équation vérifiée par  $\xi_{\text{eq}}$ .
- Résoudre l'équation pour déterminer  $\xi_{\text{eq}}$  ;
- En déduire la composition du mélange dans l'état final.

### Exemple : Sens d'évolution spontanée

Le chlorure de sulfuryle est une molécule qui permet de chlorer des composés organiques. On considère la réaction de dissociation du chlorure de sulfuryle dont l'équation est :



La constante d'équilibre thermodynamique vaut  $K^\circ = 2,0$  à  $T = 102^\circ\text{C}$

Dans une enceinte initialement vide, à  $102^\circ\text{C}$ , sous une pression constante  $P_{\text{tot}} = P^\circ = 1,00$  bar, on introduit désormais 1,00 mol de chlorure de sulfuryle  $\text{SO}_2\text{Cl}_2$ , 5,00 mol de dichlore  $\text{Cl}_2$  et 5,00 mol de dioxyde de soufre  $\text{SO}_2$ . Déterminer la composition du système à l'état final.

Exprimons le quotient de réaction initial :

$$Q_{r,i} = \frac{P_i(\text{SO}_2)P_i(\text{Cl}_2)}{P_i(\text{SO}_2\text{Cl}_2)P^\circ} \quad P_i(\text{SO}_2) = P_i(\text{Cl}_2) = \frac{5}{11}P_{\text{tot}} \quad P_i(\text{SO}_2\text{Cl}_2) = \frac{1}{11}P_{\text{tot}}$$

On obtient alors :  $Q_{r,i} = \frac{25}{11} > K^\circ$  la réaction se fait dans le sens indirect.

Déterminons l'état final, pour cela dressons le tableau d'avancement :

	$\text{SO}_2\text{Cl}_2\text{(g)}$	=	$\text{SO}_2\text{(g)}$	+	$\text{Cl}_2\text{(g)}$	Total
EI	$n_1$		$n_2$		$n_2$	$2n_2 + n_1$
EF	$n_1 + \xi_{\text{eq}}$		$n_2 - \xi_{\text{eq}}$		$n_2 - \xi_{\text{eq}}$	$2n_2 + n_1 - \xi_{\text{eq}}$

On exprime les activités des constituants à l'équilibre :

$$P_{\text{eq}}(\text{Cl}_2) = P_{\text{eq}}(\text{SO}_2) = \frac{n_2 - \xi_{\text{eq}}}{2n_2 + n_1 - \xi_{\text{eq}}} P_{\text{tot}} \quad P_{\text{eq}}(\text{SO}_2\text{Cl}_2) = \frac{n_1 + \xi_{\text{eq}}}{2n_2 + n_1 - \xi_{\text{eq}}}$$

On applique alors la loi de l'équilibre :

$$Q_{r,\text{eq}} = K^\circ \implies \frac{(n_2 - \xi_{\text{eq}})^2}{(n_1 + \xi_{\text{eq}})(2n_2 + n_1 - \xi_{\text{eq}})} \frac{P_{\text{tot}}}{P^\circ} = K^\circ$$

On peut faire apparaître le taux d'avancement car  $\xi_{\text{max}} = n_2$  soit  $\tau_{\text{eq}} = \frac{\xi_{\text{eq}}}{n_2}$  :

$$\frac{(1 - \tau_{\text{eq}})^2}{\left(\frac{n_1}{n_2} + \tau_{\text{eq}}\right) \left(2 + \frac{n_1}{n_2} - \tau_{\text{eq}}\right)} = K^\circ$$

Cette équation possède deux solutions :  $\tau_{\text{eq}1} = 0,05 < 1$  et  $\tau_{\text{eq}2} = 1,05 > 1$  on ne garde donc que la solution  $\tau_{\text{eq}1}$ .

## 4 Capacité numérique

### Definition : Méthode dichotomique

Le principe de l'algorithme dichotomique est de partir d'un intervalle  $[a_0, b_0]$  où l'on sait qu'une fonction  $f$  donné s'annule (fonction monotone sur  $[a_0, b_0]$  avec  $f(a) \times f(b) < 0$ ). La méthode est décrite ci-dessous :

- On teste alors successivement  $f(m)$  avec  $m$  le milieu de l'intervalle :  $m = \frac{a_0 + b_0}{2}$ .
- Si  $f(m)$  est du même signe que  $f(a)$  alors on réduit l'intervalle à  $[a_1, b_0]$  avec  $a_1 = m$ .
- Sinon on réduit l'intervalle à  $[a_0, b_1]$  avec  $b_1 = m$ .
- On arrête lorsque la taille de l'intervalle est à la bonne précision  $2\epsilon$  choisie.

### Propriété : Fonction de recherche dichotomique

```
def Dichot(a,b,f,eps):
    g=a
    d=b
    m=(g+d)/2
    while (d-g)/2>eps:
        if f(g)*f(m)>0:
            g=m
        else:
            d=m
        m=(g+d)/2
    return m
```

### Propriété : Capacité numérique 4

Déterminer, à l'aide de python, l'état final d'un système, siège d'une transformation, modélisée par une réaction à partir des conditions initiales et valeur de la constante d'équilibre.

### Exemple : Formation de $\text{SO}_3(\text{g})$

On considère la réaction :  $2\text{SO}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) = 2\text{SO}_3(\text{g})$  de constante d'équilibre en fonction de la température  $T$  :  $K^\circ = e^{\frac{198000-188 \times T}{RT}}$  dans les proportions stoechiométrique le quotient de réaction s'écrit :  $Q_r = \frac{\xi^2(3-\xi)}{(1-\xi)^3}$

On définit alors les fonctions python :

```
def K(T):
    return np.exp((198000-188*T)/(8.31*T))
def Q(kxi):
    return (kxi**2)*(3-kxi)/((1-kxi)**3)
def f(kxi):
    return Q(kxi)-K(700)
Dichot(f,0.00001)
```

### Exemple : Formation de $\text{NOBr}(\text{g})$

On considère la réaction :  $2\text{NO}(\text{g}) + \text{Br}_2(\text{g}) = 2\text{NOBr}(\text{g})$  de constante d'équilibre :  $K^\circ(330 \text{ K}) = 13,2$  dans les proportions  $n(\text{NO}) = n_1 = 4,81 \times 10^{-3} \text{ mol}$  et  $n(\text{Br}_2) = n_2 = 1,88 \times 10^{-3} \text{ mol}$  :  $Q_r = \frac{a\xi^2}{(n_1 - 2\xi)^2(n_2 - \xi)} = \frac{a\tau^2}{n_2(n_1/n_2 - 2\tau)^2(1 - \tau)}$

On définit alors les fonctions python :

```
n1 = 4.81e-3
n2 = 1.88e-3
a = 0.289
K0 = 13.2
def f(x):
    return a*x**2/(n2*(n1/n2-2*x)**2 * (1-x))-K0
print(Dichot(f,0.00001))
```

## Chimie 3 : Cinétique chimique

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>4.1.2 Évolution temporelle d'un système chimique</b>	
<b>Cinétique en réacteur fermé de composition uniforme</b> Vitesses de consommation d'un réactif et de formation d'un produit. Vitesse de réaction pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique supposée sans accumulation d'intermédiaires.	Relier la vitesse de réaction, dans les cas où elle est définie, à la vitesse de consommation d'un réactif ou de formation d'un produit.
Lois de vitesse : réactions sans ordre, réactions avec ordre simple (0, 1, 2), ordre global, ordre apparent. Temps de demi-vie d'un réactif, temps de demi-réaction.	Exprimer la loi de vitesse si la réaction chimique admet un ordre et déterminer la valeur de la constante cinétique à une température donnée. Déterminer la vitesse de réaction à différentes dates en utilisant une méthode numérique ou graphique. Déterminer un ordre de réaction à l'aide de la méthode différentielle ou à l'aide des temps de demi-réaction. Confirmer la valeur d'un ordre par la méthode intégrale, en se limitant strictement à une décomposition d'ordre 0, 1 ou 2 d'un unique réactif, ou se ramenant à un tel cas par dégénérescence de l'ordre ou conditions initiales stœchiométriques. <b>Établir une loi de vitesse à partir du suivi temporel d'une grandeur physique.</b>
Loi d'Arrhenius ; énergie d'activation.	Déterminer la valeur de l'énergie d'activation d'une réaction chimique à partir de valeurs de la constante cinétique à différentes températures. <b>Déterminer l'énergie d'activation d'une réaction chimique.</b>

**Remarque : Contexte**

Beaucoup de systèmes chimiques peuvent donner lieu à des études cinétiques, dans ce chapitre on se limitera aux systèmes fermés, homogènes, effectuant une transformation isotherme.

Dans le chapitre sur la transformation de la matière on a vu que la thermodynamique permettait de prédire l'état final d'un système. En revanche elle ne nous permet pas de décrire le temps d'évolution du système, ni le chemin par lequel cette transformation s'effectue.

En cinétique chimique on s'intéresse à des équations différentielles qui permettent de décrire l'évolution temporelle des variables d'état du système. Ces équations ont été établies empiriquement, c'est-à-dire à partir de résultats expérimentaux.

Durant ce chapitre on considèrera uniquement des réaction totale.

## 1 Vitesse de réaction

**Remarque : Rappel sur les réactions**

Pour une transformation chimique faisant intervenir  $N$  constituants  $A_i$  d'équation bilan de la forme :  $\sum_{i=1}^N \nu_i A_i = 0$

où  $\nu_i$  est le coefficient stœchiométrique algébrique de l'espèce  $A_i$ . On note :

- $\nu_i > 0$  si  $A_i$  est un produit ;
- $\nu_i < 0$  si  $A_i$  est un réactif.

On définit alors l'avancement  $\xi$  comme :  $\xi(t) = \frac{n_i(t) - n_i(t=0)}{\nu_i}$

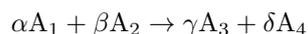
**Definition : Vitesse de réaction**

On définit la vitesse de la réaction :  $r = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}$  si le volume est constant au cours de la réaction  $r = \frac{dx}{dt}$

avec  $x = \frac{\xi}{V}$  l'avancement volumique de la réaction. L'unité de la vitesse est :  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

**Definition : Vitesse de consommation/d'apparition d'un réactif/produit**

Considérons un système fermé dans lequel se produit une transformation chimique à volume constant, caractérisée par la réaction d'équation bilan :



A et B représentent les réactifs, et C et D sont les produits.

On définit la vitesse de disparition des réactifs :

$$v(A_1) = -\frac{d[A_1]}{dt} \text{ et } v(A_2) = -\frac{d[A_2]}{dt}$$

On définit la vitesse de formation des produits :

$$v(A_3) = \frac{d[A_3]}{dt} \text{ et } v(A_4) = \frac{d[A_4]}{dt}$$

**Propriété : Relation vitesse de réaction**

On peut alors exprimer la vitesse de réaction en fonction des vitesses de formation et de disparition :

$$r = \frac{1}{\nu_i} \frac{d[A_i]}{dt}$$

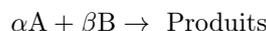
où  $\nu_i$  est le coefficient stœchiométrique algébrique de l'espèce  $A_i$ . On note :

- $\nu_i > 0$  si  $A_i$  est un produit ;
- $\nu_i < 0$  si  $A_i$  est un réactif.

## 2 Lois de vitesse

**Definition : Loi de vitesse avec ordre de réaction**

Soit une réaction d'équation de la forme :



Les résultats expérimentaux montrent que dans certains domaines de température et de pression, si la réaction admet un ordre, on peut relier la vitesse de réaction aux concentrations des réactifs de la forme :

$$r = k \times [A]^{n_1} \times [B]^{n_2}$$

On appelle  $k$  la constante de vitesse, ne dépendant que de la température.

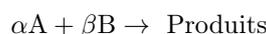
On appelle  $n_1$  et  $n_2$  les ordres partiels par rapport aux réactifs A et B, et  $n = n_1 + n_2$  l'ordre global de la réaction.

**Remarque :**

- Les ordres partiels ne sont à priori pas égaux aux coefficients stœchiométriques de l'équation. Il faut partir du principe qu'ils seront différents.
- toutes les réactions n'admettent pas forcément d'ordre. Certaines réactions possèdent des modélisations plus complexes n'intégrant pas la notion d'ordre de réaction.
- La dimension de la constante de vitesse dépend de l'ordre global de la réaction.

**Propriété : Réaction sans ordre**

Soit une réaction d'équation de la forme :



Si la réaction n'admet pas d'ordre, on peut toujours exprimer à  $t = 0$  :

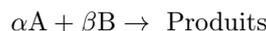
$$r(t = 0) = k [A]_0^{n_1} \times [B]_0^{n_2}$$

où  $r(t = 0)$  est la vitesse de réaction initiale,  $[A]_0$  et  $[B]_0$  les concentrations initiales des réactifs.

On appelle alors  $n_1$  et  $n_2$  les ordres partiels initiaux et  $n = n_1 + n_2$  l'ordre global initial de la réaction.

**Propriété : Ordre global**

Si pour une réaction de la forme :



On a initialement les réactifs en proportions stœchiométrique, on dresse alors un tableau d'avancement en fonction de l'avancement volumique :

	$\alpha A$	+	$\beta B$	=	Produits
$t = 0 \text{ s}$	$[A]_0$		$[B]_0$		
$t$ quelconque	$[A]_0 - \alpha x(t)$		$[B]_0 - \beta x(t)$		

Avec  $\frac{[A]_0}{\alpha} = \frac{[B]_0}{\beta}$ . On a alors la relation :

$$[A](t) = \frac{\alpha}{\beta} [B](t)$$

On a alors l'expression de la vitesse de réaction :

$$r = k \left( \frac{\alpha}{\beta} [B] \right)^{n_1} [B]^{n_2} \implies r = k' [B]^{n_1+n_2}$$

Avec  $k' = \frac{\alpha^{n_1}}{\beta^{n_1}} k$  On obtient alors l'équation différentielle d'ordre global  $n = n_1 + n_2$  :

$$r = -\frac{1}{\beta} \frac{d[B]}{dt} = k' [B]^n$$

**Exemple :**

Soit la réaction  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5(\text{aq}) + \text{HO}^-(\text{aq}) \rightarrow \text{CH}_3\text{CO}_2^-(\text{aq}) + \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\text{aq})$

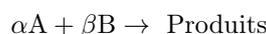
On fait un tableau d'avancement avec à  $t = 0$  :  $[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5]_0 = [\text{HO}^-]_0 = a$

	$\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5(\text{aq})$	+	$\text{HO}^-(\text{aq})$	$\rightarrow$	$\text{CH}_3\text{CO}_2^-(\text{aq})$	+	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\text{aq})$
$t = 0 \text{ s}$	$a$		$a$		$0$		$0$
$t$ quelconque	$a - x(t)$		$a - x(t)$		$x(t)$		$x(t)$
$t \rightarrow +\infty$	$0$		$0$		$a$		$a$

On a alors :  $r = k [\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5]^{n_1} [\text{HO}^-]^{n_2} = k(a - x(t))^n$  avec  $n = n_1 + n_2$  l'ordre global de la réaction.

**Propriété : Dégénérescence de l'ordre**

Si pour une réaction de la forme :



On a initialement un des réactif en large excès de manière à avoir  $[B] \gg [A]$ . On peut faire le tableau d'avancement de la réaction :

	$\alpha A$	+	$\beta B$	=	Produits
$t = 0 \text{ s}$	$[A]_0$		$[B]_0$		
$t$ quelconque	$[A]_0 - \alpha x(t)$		$[B]_0 - \beta x(t) \approx [B]_0$		

On a alors l'expression de la vitesse de réaction :

$$r = k [A]^{n_1} [B]^{n_2} \implies r = k [A]^{n_1} [B]_0^{n_2}$$

On obtient alors l'équation différentielle d'ordre partiel  $n_1$  :

$$r = -\frac{1}{\alpha} \frac{d[A]}{dt} = k' [A]^{n_1}$$

avec  $k' = k [B]_0^{n_2}$

**Méthode : Méthode différentielle**

On se place dans les conditions d'une expérience pour déterminer un ordre (soit dans des conditions stœchiométrique pour déterminer l'ordre global, soit dans le cas d'un réactif en excès pour déterminer l'ordre partiel). On a une équation de la forme :

$$r = \frac{1}{\nu_a} \frac{d[A]}{dt} = k'[A]^n$$

On applique le logarithme à l'équation différentielle :

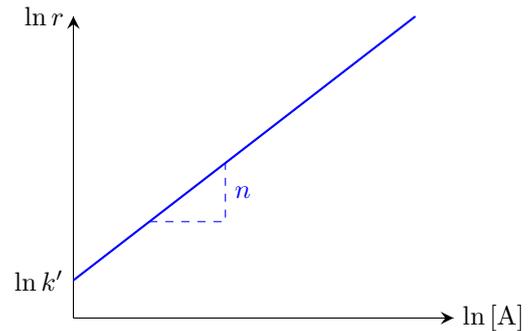
$$\ln r = \ln k' + n \ln [A]$$

On calcule  $r$  en traçant la tangente en un point expérimental comme expliqué plus haut.

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les  $N$  mesures de  $r_i$  et  $[A]_i$  effectuées de type  $Y = aX + b$  sur le tableau de valeurs :

$X_i$	$Y_i$
$\ln(r_1)$	$\ln([A]_1)$
$\ln(r_2)$	$\ln([A]_2)$
...	...
$\ln(r_N)$	$\ln([A]_N)$

$$a = n \quad b = \ln(k')$$

**3 Mesures physiques****Propriété : suivi conductimétrique**

Si la réaction étudiée met en jeu des ions en tant que réactifs ou produits tel que l'équation de la réaction peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^N \nu_i A_i^{z_i \pm} = 0$$

avec  $z_i$  le nombre de charges élémentaires, positives ou négatives, portées par l'ion  $A_i^{z_i \pm}$ . Alors la conductivité de la solution est :

$$\sigma = \sum_{i=1}^N z_i [A_i^{z_i \pm}] \lambda_i^\circ$$

avec  $\lambda_i^\circ$  la conductivité molaire ionique limite de l'ion  $A_i^{z_i \pm}$ .

**Exemple :** Si on reprend l'équation :  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5(\text{aq}) + \text{HO}^-(\text{aq}) \rightarrow \text{CH}_3\text{CO}_2^-(\text{aq}) + \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}(\text{aq})$

Les ions  $\text{HO}^-$  sont introduit à l'aide de la dissolution de la soude  $\text{NaOH}(\text{s}) \rightarrow \text{HO}^-(\text{aq}) + \text{Na}^+(\text{aq})$ . On a toujours à  $t = 0$  :  $[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5]_0 = [\text{HO}^-]_0 = a$  et donc  $[\text{Na}^+]_0 = a$

On effectue un suivi conductimétrique et on a :

- à  $t = 0$  :  $\sigma_0 = \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+]_0 + \lambda_{\text{HO}^-} [\text{HO}^-]_0 = (\lambda_{\text{Na}^+} + \lambda_{\text{HO}^-})a$ ;
- à  $t$  quelconque :  $\sigma(t) = \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+] + \lambda_{\text{HO}^-} [\text{HO}^-] + \lambda_{\text{CH}_3\text{CO}_2^-} [\text{CH}_3\text{CO}_2^-] = \lambda_{\text{Na}^+}a + \lambda_{\text{HO}^-}(a - x(t)) + \lambda_{\text{CH}_3\text{CO}_2^-}x(t)$ ;
- à  $t \rightarrow +\infty$  :  $\sigma_\infty = \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+]_\infty + \lambda_{\text{CH}_3\text{CO}_2^-} [\text{CH}_3\text{CO}_2^-]_\infty = (\lambda_{\text{Na}^+} + \lambda_{\text{CH}_3\text{CO}_2^-})a$ .

On peut alors exprimer les concentrations :

$$[\text{CH}_3\text{CO}_2^-] = [\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}] = x(t) = a \frac{\sigma_0 - \sigma(t)}{\sigma_0 - \sigma_\infty}$$

$$[\text{HO}^-] = [\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5] = a - x(t) = a \frac{\sigma(t) - \sigma_0}{\sigma_0 - \sigma_\infty}$$

Il est très difficile de mesurer précisément  $\sigma_0$ , car à peine les réactifs mis en solution la réaction démarre. On l'obtient par extrapolation des mesures. On peut en revanche obtenir  $\sigma_\infty$  en mesurant sur un temps très long.

**Propriété : Suivi**

La spectrophotométrie d'absorption dans l'ultra-violet et le visible est une technique très employée en analyse physico-chimique.

Différentes situations permettent l'emploi de la spectrophotométrie en cinétique chimique :

- un réactif (ou un produit) présente un spectre d'absorption UV-visible alors que le produit (ou le réactif) n'absorbe pas.
- réactifs et produits présentent des maxima dans leurs spectres d'absorption ; dans ce cas il est nécessaire de connaître les coefficients d'absorptivité molaire des espèces en présence et de procéder à un étalonnage pour effectuer des mesures cinétiques.

L'absorbance de la lumière est alors calculée grâce à la loi de Beer-Lambert :

$$A = -\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \epsilon l C$$

avec :

- $I_0$  l'intensité lumineuse du faisceau incident ;
- $I$  l'intensité lumineuse du faisceau transmis ;
- $\epsilon(\lambda)$  le coefficient d'absorptivité molaire à la longueur d'onde  $\lambda$  ;
- $C$  la concentration de l'espèce absorbante en solution ;
- $l$  la longueur de la cuve.

Cette loi est linéaire pour des solutions diluées, si on a plusieurs espèces absorbante  $A_i$  on peut alors calculer :

$$A = l \sum_{i=1}^N \epsilon_i [A_i]$$

**Remarque : Choix de la longueur d'onde**

On choisit la longueur d'onde  $\lambda$  pour laquelle l'absorbance est maximum pour diminuer l'incertitude sur la mesure.

## 4 Méthode intégrale

**Definition : Principe**

Pour une réaction admettant un ordre du type :



La vitesse de réaction s'écrit :

$$r = -\frac{1}{\alpha} \frac{d[A]}{dt} = k [A]^n$$

Pour chaque ordre, on pose  $[A](t=0) = [A]_0$ , et on utilise pour résoudre cette équation la méthode de séparation des variables.

**Propriété : Ordre 0**

L'équation différentielle devient alors :

$$-\frac{1}{\alpha} \frac{d[A]}{dt} = k$$

On obtient alors :  $[A](t) = [A]_0 - \alpha kt$

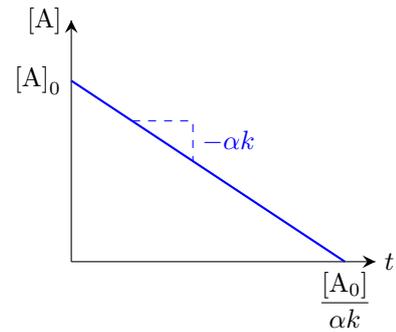
On cherche à effectuer une régression linéaire sur les  $N$  mesures de  $t_i$  et  $[A]_i$  effectuées de type  $Y = aX + b$  sur le tableau de valeurs :

On en déduit immédiatement que :

$$d[A] = -\alpha k dt \iff \int_{[A]_0}^{[A](t)} d[A] = -\alpha k \int_{t=0}^t dt'$$

$X_i$	$Y_i$
$t_1$	$[A]_1$
$t_2$	$[A]_2$
...	...
$t_N$	$[A]_N$

$$a = -\alpha k \quad b = [A]_0$$



**Propriété : Ordre 1**

L'équation différentielle devient alors :  $-\frac{1}{\alpha} \frac{d[A]}{dt} = k[A]$

On en déduit immédiatement que :

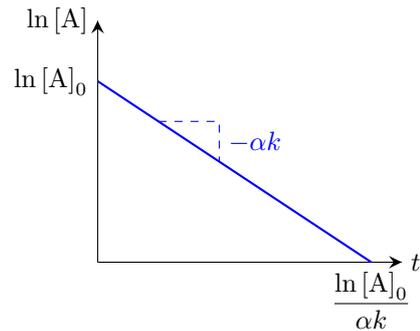
$$\frac{1}{[A]} d[A] = -\alpha k dt \iff \int_{[A]_0}^{[A](t)} \frac{1}{[A]} d[A] = -\alpha k \int_{t=0}^t dt' \implies \ln \frac{[A]}{[A]_0} = -\alpha k t$$

On obtient alors :  $[A](t) = [A]_0 e^{-\alpha k t}$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les  $N$  mesures de  $t_i$  et  $[A]_i$  effectuées de type  $Y = aX + b$  sur le tableau de valeurs :

$X_i$	$Y_i$
$t_1$	$\ln([A]_1)$
$t_2$	$\ln([A]_2)$
...	...
$t_N$	$\ln([A]_N)$

$$a = -\alpha k \quad b = \ln([A]_0)$$



**Propriété : Ordre 2**

L'équation différentielle devient alors :

$$-\frac{1}{\alpha} \frac{d[A]}{dt} = k[A]^2$$

On en déduit immédiatement que :

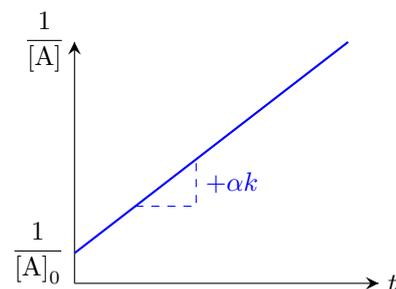
$$\frac{1}{[A]^2} d[A] = -\alpha k dt \iff \int_{[A]_0}^{[A](t)} \frac{1}{[A]^2} d[A] = -\alpha k \int_{t=0}^t dt' \implies -\frac{1}{[A]} + \frac{1}{[A]_0} = -\alpha k t$$

On obtient alors :  $[A](t) = \frac{[A]_0}{1 + \alpha [A]_0 k t}$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les  $N$  mesures de  $t_i$  et  $[A]_i$  effectuées de type  $Y = aX + b$  sur le tableau de valeurs :

$X_i$	$Y_i$
$t_1$	$\frac{1}{[A]_1}$
$t_2$	$\frac{1}{[A]_2}$
...	...
$t_N$	$\frac{1}{[A]_N}$

$$a = -\alpha k \quad b = \frac{1}{[A]_0}$$



**Definition : Temps de demi-réaction**

On définit pour une réaction donnée le temps de demi-réaction comme le temps nécessaire pour consommer la moitié de la quantité de matière initiale du réactif limitant  $A$ . On peut alors définir le temps de demi-réaction  $t_{\frac{1}{2}}$  :

$$[A] (t = t_{\frac{1}{2}}) = \frac{[A]_0}{2}$$

**Propriété : Expression de  $t_{1/2}$**

On peut alors exprimer pour chaque ordre le temps de demi-réaction en fonction de la concentration initiale  $[A]_0$ . On peut alors effectuer plusieurs expériences à partir de plusieurs concentrations initiales différentes, en mesurant  $t_{\frac{1}{2}}$  en fonction de  $[A]_0$  on peut alors déterminer l'ordre de la réaction.

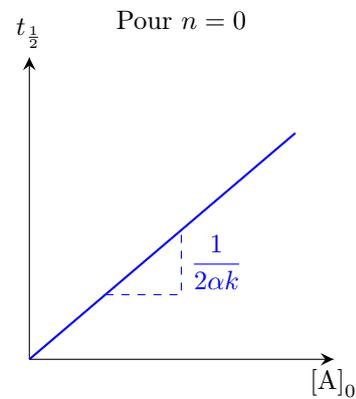
**Pour l'ordre  $n = 0$  :** On a

$$[A] (t = t_{\frac{1}{2}}) = [A]_0 - \alpha k t_{\frac{1}{2}} = \frac{[A]_0}{2} \implies t_{\frac{1}{2}} = \frac{[A]_0}{2\alpha k}$$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les  $N$  mesures de  $t_{1/2,i}$  et  $[A]_{0,i}$  effectuées de type  $Y = aX$  sur le tableau de valeurs :

$X_i$	$Y_i$
$t_{1/2,1}$	$[A]_{0,1}$
$t_{1/2,2}$	$[A]_{0,2}$
...	...
$t_{1/2,N}$	$[A]_{0,N}$

$$a = \frac{1}{2\alpha k} > 0$$



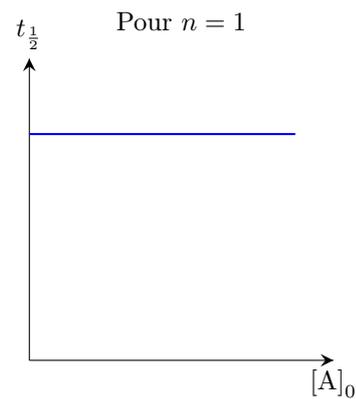
**Pour l'ordre  $n = 1$  :** On a

$$[A] (t = t_{\frac{1}{2}}) = [A]_0 e^{-\alpha k t_{\frac{1}{2}}} = \frac{[A]_0}{2} \implies t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\alpha k}$$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les  $N$  mesures de  $t_{1/2,i}$  et  $[A]_{0,i}$  effectuées de type  $Y = aX + b$  sur le tableau de valeurs :

$X_i$	$Y_i$
$t_{1/2,1}$	$[A]_{0,1}$
$t_{1/2,2}$	$[A]_{0,2}$
...	...
$t_{1/2,N}$	$[A]_{0,N}$

$$a = 0$$



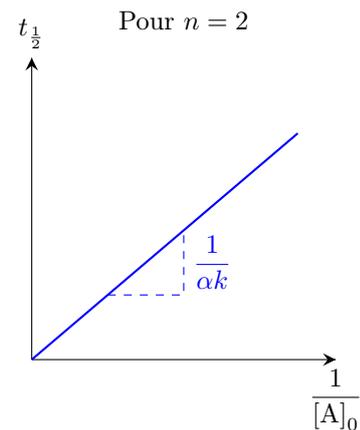
**Pour l'ordre  $n = 2$  :** On a

$$[A] (t = t_{\frac{1}{2}}) = \frac{[A]_0}{1 + \alpha [A]_0 k t_{\frac{1}{2}}} = \frac{[A]_0}{2} \implies t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\alpha k [A]_0}$$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les  $N$  mesures de  $t_{1/2,i}$  et  $[A]_{0,i}$  effectuées de type  $Y = aX$  sur le tableau de valeurs :

$X_i$	$Y_i$
$t_{1/2,1}$	$\frac{1}{[A]_{0,1}}$
$t_{1/2,2}$	$\frac{1}{[A]_{0,2}}$
...	...
$t_{1/2,N}$	$\frac{1}{[A]_{0,N}}$

$$a = \frac{1}{\alpha k} > 0$$



## 5 Influence de la température

### Loi d'Arrhenius

On modélise la dépendance de  $k$  avec la température par la loi d'Arrhénius :

$$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}$$

avec  $E_a$  l'énergie d'activation en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $R$  la constante des gaz parfaits, et  $T$  la température en K. Ici  $A$  est seulement un pré-facteur de la même unité que  $k$ .

### Méthode : Mesure de $E_a$

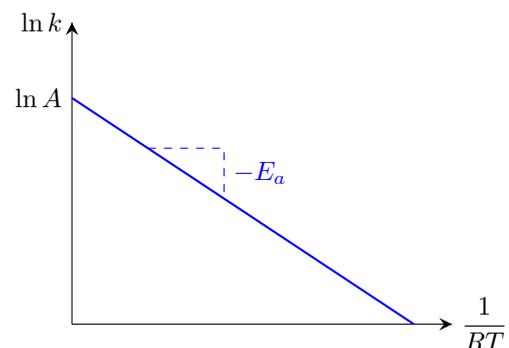
On peut mesurer l'énergie d'activation en faisant le suivi cinétique d'une réaction à différentes températures. Pour chaque suivi on effectue une mesure de  $k(T)$  et on trace en suite :

$$\ln(k) = \ln(A) - \frac{E_a}{RT}$$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les  $N$  mesures de  $k_i$  et  $T_i$  effectuées de type  $Y = aX + b$  sur le tableau de valeurs :

$X_i$	$Y_i$
$\frac{1}{T_1}$	$\ln(k_1)$
$\frac{1}{T_2}$	$\ln(k_2)$
...	...
$\frac{1}{T_N}$	$\ln(k_N)$

$$a = -\frac{E_a}{R} \quad b = \ln(A)$$



### Remarque : Échelle microscopique

À l'échelle microscopique, c'est la collision entre les molécules réactifs qui provoque la formation des molécules produits. La collision entre les molécules est directement liée à l'agitation thermique des molécules et donc à la température  $T$  en K.

## Chimie 4 : Équilibre acido-basique en solution aqueuse

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>4.4.1. Réactions acide-base et de précipitation</b>	
<b>Réactions acido-basiques</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• constante d'acidité;</li> <li>• diagramme de prédominance, de distribution;</li> <li>• exemples usuels d'acides et bases : nom, formule et nature – faible ou forte – des acides sulfurique, nitrique, chlorhydrique, phosphorique, acétique, de la soude, l'ion hydrogéné-carbonate, l'ammoniac.</li> </ul>	Identifier le caractère acido-basique d'une réaction en solution aqueuse. Écrire l'équation de la réaction modélisant une transformation en solution aqueuse en tenant compte des caractéristiques du milieu réactionnel (nature des espèces chimiques en présence, pH...) et des observations expérimentales. Déterminer la valeur de la constante d'équilibre pour une équation de réaction, combinaison linéaire d'équations dont les constantes thermodynamiques sont connus. Utiliser les diagrammes de prédominance pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. <b>Mettre en œuvre une réaction acide-base pour réaliser une analyse quantitative en solution aqueuse.</b>

### 1 Couple acido-basique :

#### Definition : Acide

Un acide est une espèce susceptible de libérer un ou plusieurs protons  $H^+$ . On parlera de «monoacide» dans le cas d'un seul proton, une espèce pouvant libérer plusieurs protons est un «polyacide».

Lorsqu'un acide  $AH$  libère un proton  $H^+$  il se transforme en sa base conjugué  $A^-$ . Ils forment un couple acide/base :  $AH/A^-$ .

#### Definition : Base

Une base est une espèce susceptible de capter un ou plusieurs protons  $H^+$ . On parlera de «monobase» dans le cas d'un seul proton, une espèce pouvant capter plusieurs protons est une «polybase».

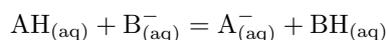
Lorsqu'une base  $A^-$  capte un proton  $H^+$  elle se transforme en son acide conjugué  $AH$ . Ils forment un couple acide/base :  $AH/A^-$ .

#### Propriété : Amphotère

Une espèce qui est à la fois acide et base de deux couples différents est une espèce amphotère.

#### Remarque :

Un proton n'existe pas dans l'eau de manière stable, dès qu'il est cédé par un acide, il est immédiatement capté par une base. On appelle alors une réaction acido-basique entre un couple  $AH_{(aq)}/A^-_{(aq)}$  et un couple  $BH_{(aq)}/B^-_{(aq)}$  une réaction acido-basique de la forme :



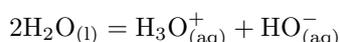
#### Propriété : Les couples de l'eau

L'eau est une espèce amphotère :

- C'est la base conjuguée de l'ion oxonium ou hydronium dans le couple  $H_3O^+_{(aq)}/H_2O_{(l)}$  ;
- C'est l'acide conjugué de l'ion hydroxyde dans le couple  $H_2O_{(l)}/HO^-_{(l)}$ .

#### Propriété : Autoprotolyse de l'eau

La réaction de l'eau comme acide avec l'eau comme base est appelée autoprotolyse de l'eau d'équation de réaction :



La constante d'équilibre associée est appelée produit ionique de l'eau  $K_e(T)$  :

$$K_e(T) = \frac{a(H_3O^+_{(aq)})a(HO^-_{(aq)})}{a^2(H_2O_{(l)})} = \frac{[H_3O^+][HO^-]}{(C^\circ)^2}$$

À 25 °C le produit ionique de l'eau vaut :  $K_e(T) = 10^{-14}$ .

**Remarque :**

On définit pour une grandeur adimensionnée  $X$  la quantité  $pX = -\log(X)$ .  
En particulier, on définit  $pK_e = -\log(K_e(T)) = 14$  (à 25 °C).

**Definition : Le pH d'une solution aqueuse**

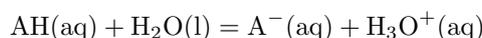
On définit le pH d'une solution aqueuse par :  $\text{pH} = -\log\left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C^\circ}\right)$

**2 Constante d'acidité :****Definition : Force d'un acide**

Pour définir la force des acides et les classer entre eux, l'idée est de les faire réagir sur la même base et d'observer l'avancement de la réaction à l'équilibre : plus la réaction est avancée, plus l'acide est «fort». On choisit comme base commune l'eau.

**Propriété : Constante d'acidité**

On a alors l'équation caractéristique d'un acide  $\text{AH}_{(\text{aq})}$  :



On définit la constante d'acidité  $K_A(T)$  comme la constante d'équilibre de cette réaction notée  $K_A(T)$  :

$$K_A = \frac{a(\text{A}^-(\text{aq}))a(\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq}))}{a(\text{AH}(\text{aq}))a(\text{H}_2\text{O}(\text{l}))} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{AH}]c^\circ}$$

avec  $pK_A = -\log(K_A)$ .

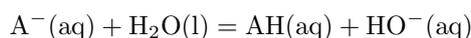
Un acide est d'autant plus fort que la constante d'acidité  $K_A$  du couple auquel il appartient est élevé. Un acide est donc d'autant plus fort que son  $pK_A$  est faible.

**Definition : Force d'une base**

Pour classer entre elles les bases on les fait réagir avec le même acide et on fait la même chose. On choisit également comme acide commun l'eau.

**Propriété : Constante de basicité**

On a alors l'équation caractéristique d'une base  $\text{A}^-(\text{aq})$  :



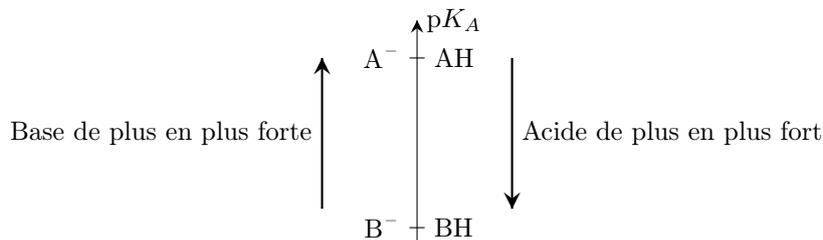
On définit la constante de basicité  $K_B(T)$  comme la constante d'équilibre de cette réaction notée  $K_B(T)$  :

$$K_B = \frac{a(\text{AH}(\text{aq}))a(\text{HO}^-(\text{aq}))}{a(\text{A}^-(\text{aq}))a(\text{H}_2\text{O}(\text{l}))} = \frac{[\text{HO}^-][\text{AH}]}{[\text{A}^-]c^\circ}$$

avec  $pK_B = -\log(K_B)$ .

**Propriété : Relation entre acidité et basicité dans un couple**

Une base est d'autant plus forte que la constante d'acidité  $K_A$  du couple auquel elle appartient est faible. Une base est d'autant plus forte que son  $pK_A$  est élevé.



**Exemple : Exemples à connaître**

Nom	Formule	Nature
Acide sulfurique	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	Diacide (Fort puis faible)
Acide nitrique	HNO <sub>3</sub>	Acide fort
Acide chlorhydrique	HCl	Triacide faible
Acide phosphorique	H <sub>3</sub> PO <sub>4</sub>	Triacide faible
Acide acétique	CH <sub>3</sub> CO <sub>2</sub> H	Acide faible
Soude	NaOH	Base forte
Ion hydrogénocarbonate	HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	Acide et base faible
Ammoniac	NH <sub>3</sub>	Base faible

**Propriété : Les couples de l'eau**

On calcule la constante d'acidité associée à chaque couple de l'eau.

- Pour le couple H<sub>3</sub>O<sup>+</sup>(aq)/H<sub>2</sub>O(l) on a la réaction suivante : H<sub>3</sub>O<sup>+</sup>(aq) + H<sub>2</sub>O(l) = H<sub>2</sub>O(l) + H<sub>3</sub>O<sup>+</sup>(aq)

À l'équilibre :  $K_A(\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})/\text{H}_2\text{O}(\text{l})) = \frac{a(\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq}))a(\text{H}_2\text{O}(\text{l}))}{a(\text{H}_2(\text{l}))a(\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq}))} = 1$  soit  $\text{p}K_A(\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})/\text{H}_2\text{O}(\text{l})) = 0$

- Pour le couple H<sub>2</sub>O(l)/HO<sup>-</sup>(aq) on a la réaction suivante : H<sub>2</sub>O(l) + H<sub>2</sub>O(l) = H<sub>3</sub>O<sup>+</sup>(aq) + HO<sup>-</sup>(aq)  
C'est l'autoprotolyse de l'eau, dont la constante d'équilibre est  $K_e$ . À 25 °C  $\text{p}K_A(\text{H}_2\text{O}(\text{l})/\text{HO}^-(\text{aq})) = 14$

**Definition : Acide fort**

On désigne par acide fort une acide qui réagit quasiment totalement avec l'eau. On considère alors que sa réaction avec l'eau est totale.

Les acides fort n'existent pas dans l'eau, ils réagissent immédiatement pour donner un ion H<sub>3</sub>O<sup>+</sup>(aq).

**Definition : Base forte**

La base conjuguée d'un acide fort ne réagit pas avec l'eau, on dit qu'elle est indifférente.

De manière équivalente on désigne par base forte une base qui réagit quasiment totalement avec l'eau. On considère alors qu sa réaction avec l'eau est totale.

Les bases fortes n'existent pas dans l'eau, elles réagissent immédiatement avec l'eau pour donner un ion HO<sup>-</sup>(aq).

**Propriété : Nivellement du solvant**

L'ion oxonium est l'acide le plus fort dans l'eau dont on peut mesurer le  $\text{p}K_A$ .

Un acide plus fort que l'oxonium verra sa réaction avec l'eau totale et donc on aura en solution comme acide le plus fort l'oxonium. On appelle ça le nivellement du solvant.

L'ion hydroxyde est la base la plus forte dans l'eau dont on peut mesurer le  $\text{p}K_A$ .

Une base plus forte que l'hydroxyde verra sa réaction avec l'eau totale et donc on aura en solution comme base la plus forte l'hydroxyde.

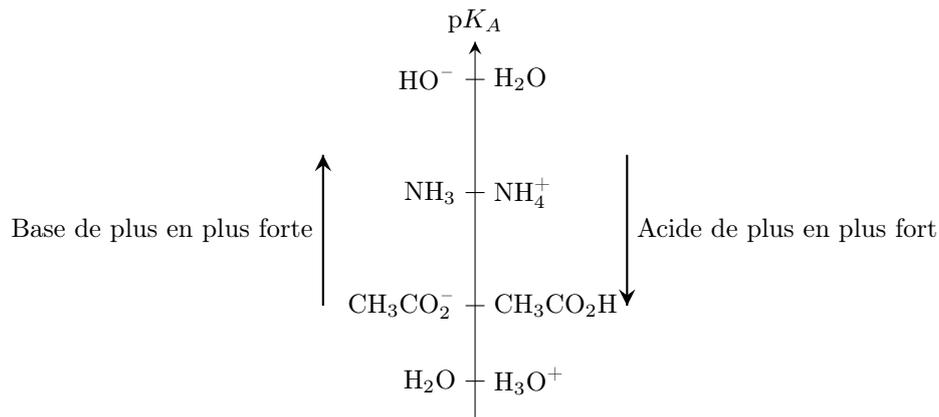
**Exemple :**

HCl(aq) + H<sub>2</sub>O(l) = H<sub>3</sub>O<sup>+</sup>(aq) + Cl<sup>-</sup>(aq) La réaction est totale et donc à l'équilibre on a uniquement l'acide H<sub>3</sub>O<sup>+</sup>(aq) en solution.

NaOH(aq) + H<sub>2</sub>O(l) = Na<sup>+</sup>(aq) + HO<sup>-</sup>(aq) La réaction est totale et donc à l'équilibre on a uniquement la base HO<sup>-</sup>(aq) en solution.

**Propriété : Échelle des  $\text{p}K_A$** 

On peut alors borner l'échelle des  $\text{p}K_A$  utile en solution aqueuse :



### Propriété : Diagramme de prédominance

Lorsque l'acide n'est pas fort et que la base n'est pas faible, on parle d'acide faible-base faible, la réaction avec l'eau n'est pas totale. On montre alors que pour un couple  $\text{AH}_{(\text{aq})} + \text{A}^-_{(\text{aq})}$  :

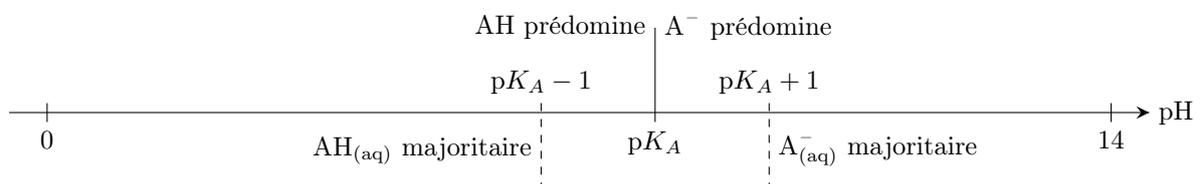
$$pK_A = -\log(K_A) = -\log\left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{AH}]C^\circ}\right) = \text{pH} + \log\left(\frac{[\text{AH}]}{[\text{A}^-]}\right) \implies \text{pH} = pK_A + \log\left(\frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}\right)$$

On parle de prédominance si une espèce est plus nombreuse qu'une autre, on en déduit alors que :

- Si  $\text{pH} > pK_A$  alors  $[\text{A}^-] > [\text{AH}]$  ;
- Si  $\text{pH} < pK_A$  alors  $[\text{A}^-] < [\text{AH}]$  ;

Maintenant si on cherche les domaines où une espèce est majoritaire, c'est à dire que sa concentration est 10 fois supérieure à la concentration de son espèce conjuguée :

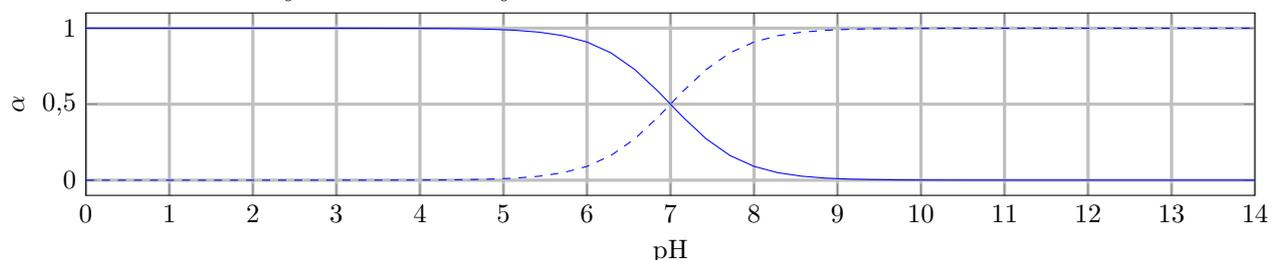
- Si  $\text{pH} > pK_A + 1$  alors  $[\text{A}^-] > 10[\text{AH}]$  ;
- Si  $\text{pH} < pK_A - 1$  alors  $10[\text{A}^-] < [\text{AH}]$  ;



### Propriété : Courbe de distribution d'un monoacide faible

Pour un monoacide  $\text{AH}_{(\text{aq})}$ , on a  $[\text{AH}] + [\text{A}^-] = C_0$  la concentration initiale de l'espèce introduite dans la solution.

On affiche alors  $\alpha(\text{AH}) = \frac{[\text{AH}]}{C_0}$  et  $\alpha(\text{A}^-) = \frac{[\text{A}^-]}{C_0}$  en fonction du pH.



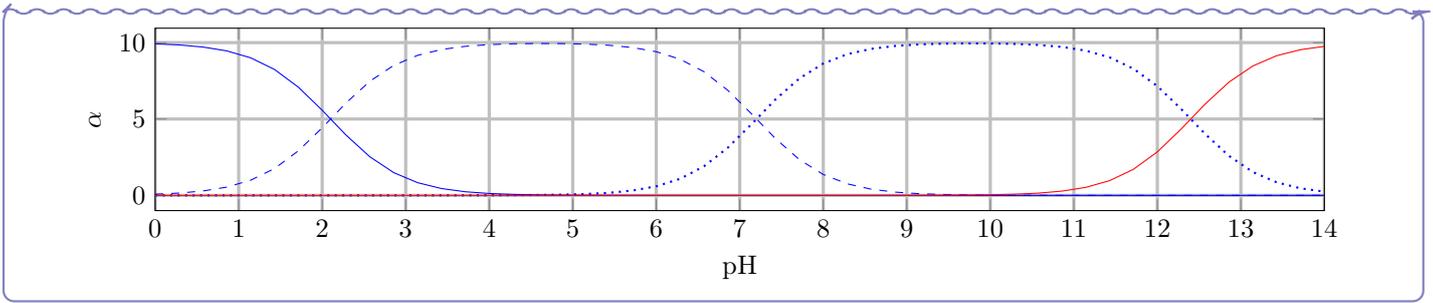
### Propriété : Courbe de distribution d'un polyacide faible

On a la conservation de la matière qui donne :

$$C_0 = [\text{AH}_n] + [\text{AH}_{n-1}^-] + \dots + [\text{A}^{n-}] = \sum_{i=0}^n [\text{AH}_i^{(n-i)-}]$$

On trace alors les  $\alpha(\text{AH}_i^{(n-i)-})$  en fonction du pH.

Exemple avec  $\text{AH}_3$  :

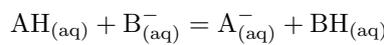


### 3 réaction

**Propriété : Constante de réaction entre un acide faible / base faible**

Lors d'une réaction acido-basique entre un acide faible et une base faible on peut déterminer la constante d'équilibre à partir des constantes d'acidité des deux couples.

Soit un couple  $AH_{(aq)}/A^{-}_{(aq)}$  et un couple  $BH_{(aq)}/B^{-}_{(aq)}$  qui réagissent lors d'une réaction acido-basique de la forme :



La constante d'équilibre de cette réaction est  $K^{\circ}$  tel que :  $K^{\circ} = \frac{K_A(AH_{(aq)}/A^{-}_{(aq)})}{K_A(BH_{(aq)}/B^{-}_{(aq)})}$

**Exemple :**



**Méthode : Réaction prépondérante**

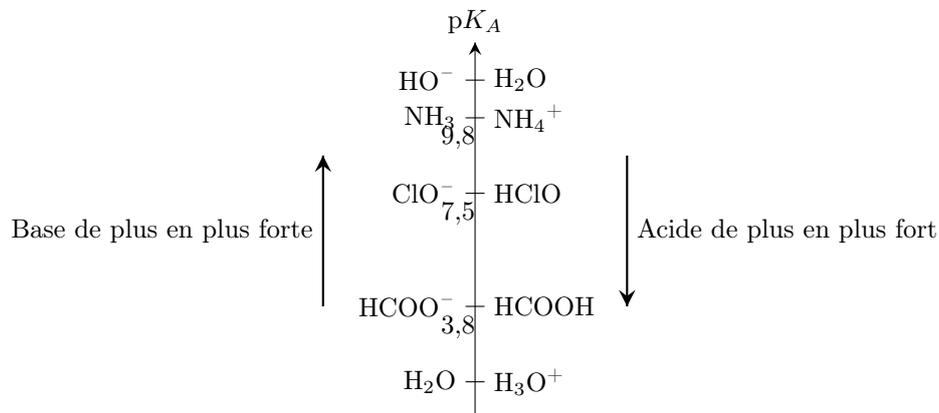
Lorsque plusieurs espèces sont en solution, on doit recenser tous les couples présents que l'on place sur une échelle des  $pK_A$  pour déterminer la classe des acides et bases en fonction de leurs forces.

La réaction prépondérante est celle qui possède la constante d'équilibre la plus élevée. C'est la réaction de la base la plus forte avec l'acide le plus fort présents en solution.

On utilise la règle du «gamma» pour obtenir l'équation de la réaction prépondérante.

**Exemple :**

On mélange en solution aqueuse les espèces suivantes :  $ClO^{-}_{(aq)}$ ,  $HCOOH_{(aq)}$ ,  $NH_3_{(aq)}$ .



On a alors comme réaction prépondérante :

### 4 Titrage acide-base

**Definition : Réaction de titrage**

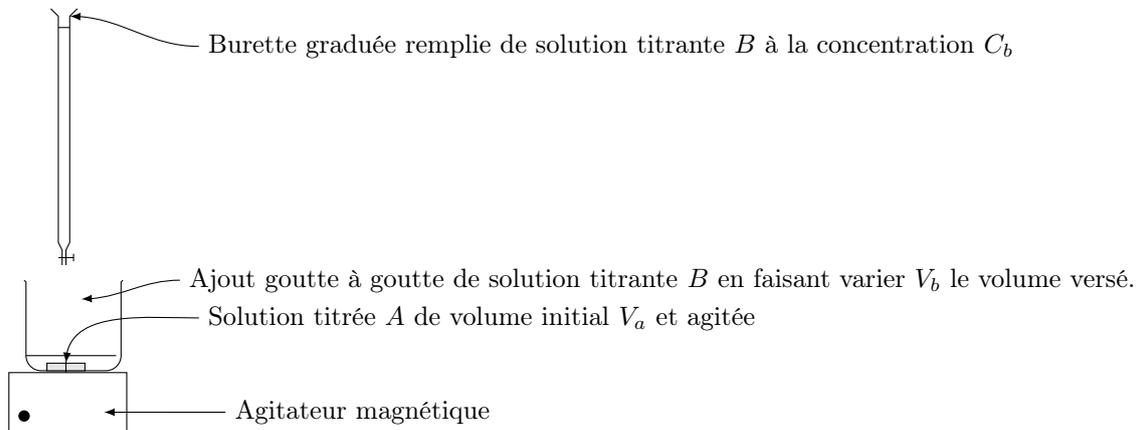
Doser une espèce signifie déterminer sa quantité de matière. Un titrage est une méthode de dosage mettant en œuvre une réaction chimique entre une espèce à doser appelée espèce titrée et une espèce appelée réactif titrant.

Une réaction de titrage doit être :

- Totale ( $K^\circ > 10^4$ );
- Unique (Pas de réaction parasite);
- Rapide.

L'espèce à titrer est généralement dans un bécher contenant un volume  $V_a$  de solution  $A$  à titrer. On cherche alors à déterminer la concentration de la solution  $A$  :  $C_a$ .

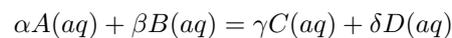
L'espèce titrante est généralement dans une burette placée au dessus du bécher, contenant une solution  $B$  de l'espèce titrante à la concentration connue  $C_b$ . On note  $V_b$  le volume versé par la burette graduée au cours du titrage.



### Definition : Équivalence

À l'équivalence, l'espèce titrante et titrée ont été introduites en proportion stœchiométriques.

Pour un titrage de  $A$  par  $B$  on a la réaction :



Si on introduit  $n_0(A)$  et  $n_0(B)$  à l'équivalence on a

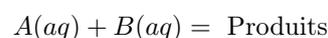
$$\frac{n_0(A)}{\alpha} = \frac{n_0(B)}{\beta}$$

On définit alors le volume équivalent  $V_{eq}$  tel que  $V_b = V_{eq}$  à l'équivalence. On a alors :

$$\frac{C_a V_a}{\alpha} = \frac{C_b V_{eq}}{\beta}$$

### Méthode : Suivi du titrage

Pour illustrer la méthode de suivi du titrage on prend une réaction de titrage simple du type :



où on ne s'intéresse pas aux produits ici.

Lors du titrage on étudie l'état final de la réaction de titrage qu'on suppose totale en fonction de l'ajout de solution  $B$  titrante, donc du volume  $V_B$ . On a alors trois cas possibles :

- Cas où  $V_b < V_{eq}$  : alors le réactif limitant est l'espèce titrante.

	A(aq)	+	B(aq)	=	Produits
EI	$C_a V_a$		$C_b V_b$		
EF	$C_a V_a - C_b V_b$		$\epsilon$		

- Cas où  $V_b = V_{eq}$  : d'après la définition de l'équivalence, les deux réactifs sont limitants.

	A(aq)	+	B(aq)	=	Produits
EI	$C_a V_a$		$C_b V_b$		
EF	$C_a V_a - C_b V_{eq} = \epsilon$		$\epsilon$		

- Cas où  $V_b > V_{eq}$  : le réactif limitant est l'espèce titrée.

	A(aq)	+	B(aq)	=	Produits
EI	$C_a V_a$		$C_b V_b$		
EF	$\epsilon$		$C_b V_b - C_b V_{eq} =$ $C_b V_b - C_a V_a$		

Comme la réaction est rapide, on s'intéresse uniquement à l'état final de chaque tableau d'avancement, et on dresse un tableau d'avancement de titrage qui reprend chaque dernière ligne de chaque tableau d'avancement :

	A(aq)	+	B(aq)	=	Produits
$V_b = 0$	$C_a V_a$		0		
$V_b$ avant équivalence	$C_a V_a - C_b V_b$		$\epsilon$		
$V_b = V_{eq}$	$C_a V_a - C_b V_{eq} = \epsilon$		$\epsilon$		
$V_b$ après équivalence	$\epsilon$		$C_b V_b - C_a V_a$		

De cette manière on obtient la quantité de matière de chaque espèce en fonction du volume  $V_b$  versé lors du titrage.

On peut repérer l'équivalence par :

- l'utilisation d'un indicateur coloré ;
- un suivi conductimétrique ;
- un suivi pH-métrique ;
- un suivi potentiométrique.

La suite de ce chapitre constitue une suite d'exemple permettant de mettre en application le suivi d'un titrage pour repérer l'équivalence. Les résultats ne sont pas à connaître par cœur, il faut connaître la méthode qui constitue une application des connaissances et grandeurs introduites dans les chapitres précédents.

## 5 Titrage acido-basique par suivi conductimétrique

### Definition : Rappel sur la conductivité d'une solution

Si la solution étudiée est composée de  $N$  ions  $A_i^{z_i \pm}$  avec  $z_i$  le nombre de charges élémentaires, positives ou négatives, portées par l'ion  $A_i^{z_i \pm}$ . Alors la conductivité de la solution est :

$$\sigma = \sum_{i=1}^N z_i [A_i^{z_i \pm}] \lambda_i^\circ$$

avec  $\lambda_i^\circ$  la conductivité molaire ionique limite de l'ion  $A_i^{z_i \pm}$ .

### Exemple :

On considère le titrage d'une solution de HCl (acide fort donc dissocié totalement dans l'eau) par une solution de soude ( $\text{Na}^+ + \text{HO}^-$ , obtenue par dissolution de  $\text{NaOH(s)}$ ). On note :

- $C_a = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  la concentration initiale en  $\text{H}_3\text{O}^+$  dans la solution de HCl et  $V_a = 10 \text{ mL}$  le volume de la solution de HCl à titrer.
- $C_b = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  la concentration initiale en  $\text{HO}^-$  dans la solution titrante de soude et  $V_b$  le volume de la solution versé.

La constante de la réaction associée est  $K^\circ = \frac{1}{K_e} = 10^{14}$ , on peut donc considérer la réaction comme totale.

On dresse alors le tableau d'avancement du titrage :

	$\text{H}_3\text{O}^+_{(\text{aq})}$	+	$\text{HO}^-_{(\text{aq})}$	=	$2\text{H}_2\text{O}_{(l)}$
$V_b = 0$	$C_a V_a$		$\epsilon$		
$V_b < V_{eq}$	$C_a V_a - C_b V_b$		$\epsilon$		
$V_b = V_{eq}$	$C_a V_a - C_b V_{eq} = \epsilon$		$\epsilon$		
$V_b > V_{eq}$	$\epsilon$		$C_b V_b - C_a V_a$		

**Propriété : Suivi conductimétrique du titrage**

On effectue un suivi conductimétrique du titrage en plongeant une cellule conductimétrique dans la solution contenue dans le bécher.

On peut alors exprimer la conductivité  $\sigma$  de la solution dans le becher en fonction de  $V_b$  le volume de solution titrante versée :  $\sigma = \lambda^\circ(\text{Na}^+) [\text{Na}^+] + \lambda^\circ(\text{HO}^-) [\text{HO}^-] + \lambda^\circ(\text{Cl}^-) [\text{Cl}^-] + \lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+) [\text{H}_3\text{O}^+]$

- Avant l'équivalence :  $V_b < V_{eq}$

$$\sigma = \lambda^\circ(\text{Na}^+) [\text{Na}^+] + \lambda^\circ(\text{Cl}^-) [\text{Cl}^-] + \lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+) [\text{H}_3\text{O}^+]$$

On utilise alors les expressions des quantités de matières contenue dans le tableau d'avancement :

$$\sigma = \lambda^\circ(\text{Na}^+) \frac{C_b V_b}{V_a + V_b} + \lambda^\circ(\text{Cl}^-) \frac{C_a V_a}{V_a + V_b} + \lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+) \frac{C_a V_a - C_b V_b}{V_a + V_b}$$

- Après l'équivalence :  $V_b > V_{eq}$

$$\sigma = \lambda^\circ(\text{Na}^+) [\text{Na}^+] + \lambda^\circ(\text{HO}^-) [\text{HO}^-] + \lambda^\circ(\text{Cl}^-) [\text{Cl}^-]$$

On utilise alors les expressions des quantités de matières contenue dans le tableau d'avancement :

$$\sigma = \lambda^\circ(\text{Na}^+) \frac{C_b V_b}{V_a + V_b} + \lambda^\circ(\text{HO}^-) \frac{C_b V_b - C_a V_a}{V_a + V_b} + \lambda^\circ(\text{Cl}^-) \frac{C_a V_a}{V_a + V_b}$$

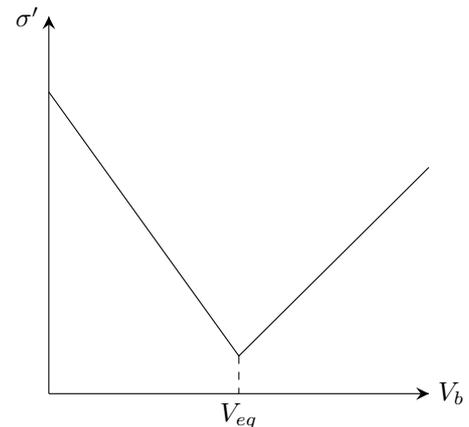
En sachant que  $\lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+)$  et  $\lambda^\circ(\text{HO}^-)$  sont grands devant les autres  $\lambda^\circ$ . On peut alors tracer la courbe  $\sigma' = \sigma(V_a + V_b) = f(V_b)$  :

- Avant l'équivalence :  $V_b < V_{eq}$

$$\begin{aligned} \sigma' &= \lambda^\circ(\text{Na}^+) C_b V_b + \lambda^\circ(\text{Cl}^-) C_a V_a + \lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+) (C_a V_a - C_b V_b) \\ &= (\lambda^\circ(\text{Cl}^-) + \lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+)) C_a V_a + (\lambda^\circ(\text{Na}^+) - \lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+)) C_b V_b \\ &\approx \underbrace{\lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+) C_a V_a}_{\alpha_1} - \underbrace{\lambda^\circ(\text{H}_3\text{O}^+) C_b V_b}_{-\beta_1} \end{aligned}$$

- Après l'équivalence :  $V_b > V_{eq}$

$$\begin{aligned} \sigma' &= \lambda^\circ(\text{Na}^+) C_b V_b + \lambda^\circ(\text{HO}^-) (C_b V_b - C_a V_a) + \lambda^\circ(\text{Cl}^-) C_a V_a \\ &= (\lambda^\circ(\text{Cl}^-) - \lambda^\circ(\text{HO}^-)) C_a V_a + (\lambda^\circ(\text{Na}^+) + \lambda^\circ(\text{HO}^-)) C_b V_b \\ &\approx \underbrace{-\lambda^\circ(\text{HO}^-) C_a V_a}_{\alpha_2} + \underbrace{\lambda^\circ(\text{HO}^-) C_b V_b}_{\beta_2} \end{aligned}$$



On a donc une pente  $\beta_1 < 0$  avant l'équivalence et une pente  $\beta_2 > 0$  après l'équivalence.

**Remarque :**

Cet exemple illustre très bien l'intérêt de ce suivi car la rupture de pente lors du titrage est très grande.

On peut appliquer le même suivi à d'autres réactions du moment que les porteurs de charges sont différents avant l'équivalence et après, on a alors une rupture de pente.

**6 Titrage acido-basique par suivi pH-métrique****Définition : Principe du pH-mètre**

Un pH-mètre est un voltmètre qui mesure la différence de potentiel entre une électrode de verre (dont le potentiel dépend du pH de la solution) et une électrode de référence dont le potentiel est fixe (par exemple l'électrode au calomel saturée ECS) plongeant dans la solution étudiée. Cette tension est convertie en valeur de pH (après étalonnage).

Les deux électrodes sont en pratique présente au sein du même élément qu'on plonge dans la solution.

**Exemple :**

On considère le titrage d'une solution d'acide éthanóïque  $\text{CH}_3\text{COOH}$  (acide faible) par une solution de soude ( $\text{Na}^+ + \text{HO}^-$ , obtenue par dissolution de  $\text{NaOH(s)}$ ). On note :

- $C_a = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  la concentration initiale en  $\text{CH}_3\text{COOH}$  dans la solution d'acide éthanóïque et  $V_a = 10 \text{ mL}$  le volume de la solution à titrer.

- $C_b = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  la concentration initiale en  $\text{HO}^-$  dans la solution titrante de soude et  $V_b$  le volume de la solution versé.

Sachant que le  $\text{p}K_a(\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-) = 4,8$ , la constante de la réaction associée est  $K^\circ = \frac{K_a}{K_e} = 10^{9,2}$ , on peut donc considérer la réaction comme totale.

On dresse alors le tableau d'avancement du titrage :

	$\text{CH}_3\text{COOH}(\text{aq})$	+	$\text{HO}^-(\text{aq})$	=	$\text{CH}_3\text{COO}^-(\text{aq})$	+	$\text{H}_2\text{O}(\text{l})$
$V_b = 0$	$C_a V_a$		0		0		
$V_b < V_{eq}$	$C_a V_a - C_b V_b$		0		$C_b V_b$		
$V_b = V_{eq}$	$C_a V_a - C_b V_{eq} = 0$		0		$C_b V_b = C_a V_a$		
$V_b > V_{eq}$	0		$C_b V_b - C_a V_a$		$C_a V_a$		

### Propriété : Suivi pH-métrique du titrage

On effectue un suivi pH-métrique du titrage en plongeant une électrode de verre reliée à un pH-mètre préalablement étalonné dans la solution contenue dans le bécher.

- Avant l'équivalence :  $V_b < V_{eq}$

$$\text{pH} = \text{p}K_a + \log \left( \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} \right) = \text{p}K_a + \log \left( \frac{C_b V_b}{C_a V_a - C_b V_b} \right)$$

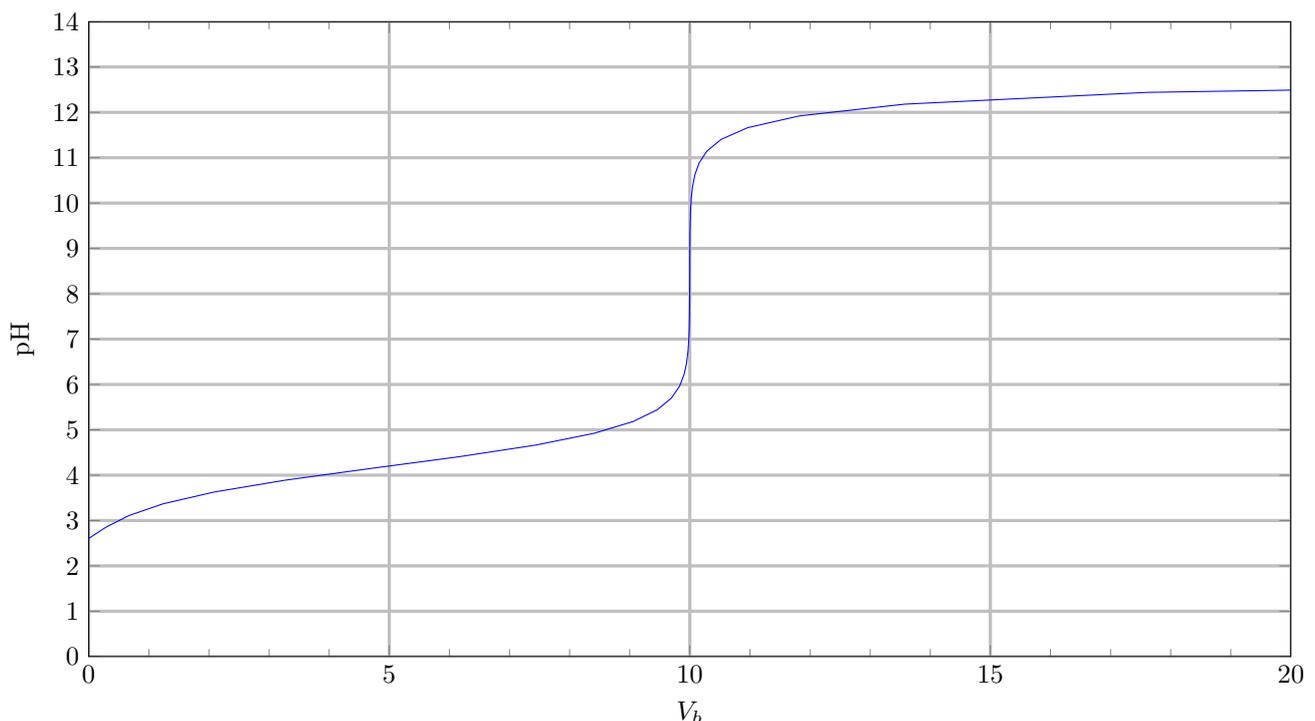
- Après l'équivalence :  $V_b > V_{eq}$

$$\text{pH} = -\log \left( \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{c^\circ} \right) = -\log \left( \frac{K_e c^\circ}{[\text{HO}^-]} \right) = \text{p}K_e + \log \left( \frac{[\text{HO}^-]}{c^\circ} \right)$$

On utilise alors les expressions des quantités de matières contenue dans le tableau d'avancement :

$$\text{pH} = \text{p}K_e + \log \left( \frac{C_b V_b - C_a V_a}{c^\circ (V_a + V_b)} \right)$$

Titration d'un acide faible par une base forte



On peut alors tracer la courbe  $\text{pH} = f(V_b)$  avec les points caractéristiques suivants :

- À  $V_b = 0$  on obtient le pH en étudiant la réaction de  $\text{CH}_3\text{COOH}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ .

- À  $V_b = \frac{V_{eq}}{2}$  :  $\text{pH} = \text{p}K_a$ .
- À  $V_b = V_{eq}$  : on obtient le  $\text{pH}_e$  en étudiant la réaction de  $\text{CH}_3\text{COO}^-(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ .
- À  $V_b \rightarrow +\infty$  :  $\text{pH}_\infty = 14 + \log\left(\frac{C_b}{c^\circ}\right) = 13$ .

Expérimentalement on repère l'équivalence en traçant  $\frac{\text{d}\text{pH}}{\text{d}V_b} = g(V_b)$ . L'équivalence correspond au maximum de la dérivée.

## Chimie 5 : Dissolution et précipitation

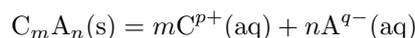
Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>4.4.1. Réactions acide-base et de précipitation</b>	
<b>Réactions de dissolution ou de précipitation</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• constante de l'équation de dissolution, produit de solubilité <math>K_s</math> ;</li> <li>• solubilité et condition de précipitation ;</li> <li>• domaine d'existence ;</li> <li>• facteurs influençant la solubilité.</li> </ul>	Déterminer la valeur de la constante d'équilibre pour une équation de réaction, combinaison linéaire d'équations dont les constantes thermodynamiques sont connues. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. Prévoir l'état de saturation ou de non saturation d'une solution. Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. Exploiter des courbes d'évolution de la solubilité d'un solide en fonction d'une variable. <b>Illustrer un procédé de retraitement, de recyclage, de séparation en solution aqueuse.</b>

### 1 Précipitation et dissolution d'un sel

#### Definition : Équation de réaction de dissolution

On considère un solide ionique (appelé sel) de la forme :  $C_m A_n(s)$

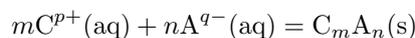
Composé de  $m$  cations  $C^{p+}$  et  $n$  anions  $A^{q-}$ . Dans l'eau, la dissolution du sel est modélisée par l'équation bilan :



de constante d'équilibre  $K_s$  appelé produit de solubilité.

#### Remarque : Équation de précipitation

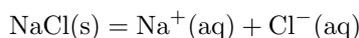
On utilise presque toujours le sens de la dissolution avec  $K_s$ , on peut écrire la réaction dans le sens de la précipitation :



de constante d'équilibre  $K^\circ = 1/K_s$

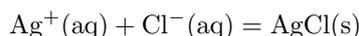
#### Exemple :

Si on introduit du chlorure de sodium  $NaCl(s)$  dans de l'eau, celui-ci se dissout en ses ions constitutifs :



#### Exemple :

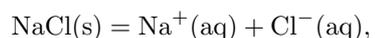
On mélange dans un tube à essai quelques millilitres d'une solution de nitrate d'argen ( $Ag^+$ ,  $NO_3^-$ ) et quelques millilitres d'une solution de chlorure de potassium ( $K^+$ ,  $Cl^-$ ). On observe la formation d'un précipité blanc. Ce solide est du chlorure d'argent  $AgCl(s)$ . On dit que les ions  $Ag^+$  et  $Cl^-$  ont précipité en chlorure d'argent :



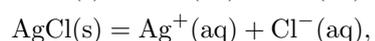
#### Propriété : Neutralité du solide

La neutralité du solide impose :  $mp = nq$

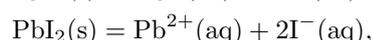
#### Exemple :



$$K_s = 32,98$$



$$K_s = 1,78 \times 10^{-10}$$



$$K_s = 9,8 \times 10^{-9}$$

**Propriété : Condition de précipitation**

Soit une solution contenant des ions  $C^{p+}(\text{aq})$  à la concentration  $C_1$  de volume  $V_1$  qu'on mélange à une solution contenant des ions  $A^{q-}(\text{aq})$  à la concentration  $C_2$  de volume  $V_2$ . Après mélange on obtient une solution contenant des ions aux concentrations :

$$[C^{p+}]_0 = \frac{C_1 V_1}{V_1 + V_2} \text{ et } [A^{q-}]_0 = \frac{C_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

On peut alors calculer le quotient de réaction initiale :  $Q_{r,i} = \frac{[C^{p+}]_0^m [A^{q-}]_0^n}{(c^\circ)^{m+n}}$

On a alors deux situations possibles :

- Si  $Q_{r,i} < K_s$  : aucun précipité se forme.
- Si  $Q_{r,i} > K_s$  : il y a apparition d'un précipité solide  $P_m A_n(\text{s})$ .

**2 Solubilité****Definition : Solution saturée/insaturée**

On appelle solution saturée, une solution dans laquelle la quantité maximale du sel a été dissoute. À l'état final, le sel existe dans la solution. Ainsi, l'état final est un état d'équilibre.

Une solution dans laquelle on peut encore dissoudre ce sel est dite insaturée. À l'état final, le sel n'existe pas dans la solution. Ainsi, l'état final n'est pas un état d'équilibre.

**Definition : Solubilité**

La solubilité  $s$  d'un solide est la quantité maximale de solide pouvant être dissoute par litre d'eau pure. Elle s'exprime souvent en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

**Propriété : Détermination de la solubilité**

Pour un solide  $C_m A_n(\text{s})$  qu'on dissout dans l'eau suivant la réaction :  $C_m A_n(\text{s}) = m C^{p+}(\text{aq}) + n A^{q-}(\text{aq})$  de produit de solubilité  $K_s$ , on ajoute  $s$  mole par litre d'eau et on obtient le tableau d'avancement suivant :

	$C_m A_n(\text{s})$	=	$m C^{p+}(\text{aq})$	+	$n A^{q-}(\text{aq})$
EI	$sV$		0		0
EF	$\epsilon$		$msV$		$nsV$

On obtient alors l'expression du produit de solubilité :

$$K_s = \frac{(ms)^m (ns)^n}{(c^\circ)^{m+n}} \implies s = c^\circ \left( \frac{K_s}{m^m n^n} \right)^{\frac{1}{m+n}}$$

**Exemple :**

On va chercher à calculer la solubilité  $s_m$  en  $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$  de l'iodure de plomb  $\text{PbI}_2(\text{s})$  dans de l'eau pure. On donne  $pK_s(\text{PbI}_2) = 8,0$  et  $M(\text{PbI}_2) = 461 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

La réaction de dissolution de  $\text{PbI}_2$  est :  $\text{PbI}_2(\text{s}) = \text{Pb}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{I}^{-}(\text{aq})$

On dresse le tableau d'avancement après avoir versé  $s$  moles de sel par litre d'eau pure :

	$\text{PbI}_2(\text{s})$	=	$\text{Pb}^{2+}(\text{aq})$	+	$2\text{I}^{-}(\text{aq})$
EI	$sV$		0		0
EF	$\epsilon$		$sV$		$2sV$

On a saturé la solution et on peut donc calculer la constante d'équilibre  $K_s$  en fonction de  $s$  :

$$K_s = \frac{[\text{Pb}^{2+}] [\text{I}^{-}]^2}{(c^\circ)^3} = \frac{4s^3}{(c^\circ)^3} \implies s = c^\circ \left( \frac{K_s}{4} \right)^{\frac{1}{3}}$$

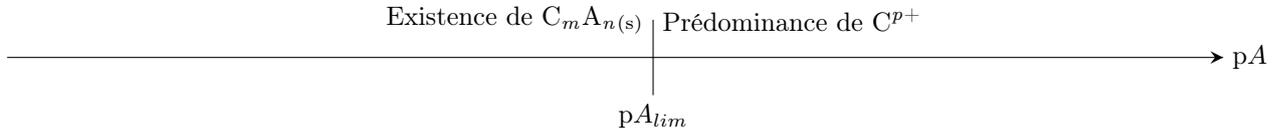
AN :  $s = 1,36 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . En multipliant la masse molaire, on obtient :  $s_m = 627 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ .

**Propriété : Diagramme d'existence**

On considère une solution de  $C^{p+}$  à la concentration  $C_0$ . On ajoute à cette solution de concentration  $[A^{q-}]$ . On cherche la concentration limite  $[A^{q-}]_{lim}$  tel que :

$$K_s = (c_0)^m [A^{q-}]_{lim}^n \implies pK_s = -m \log c_0 + npA_{lim}$$

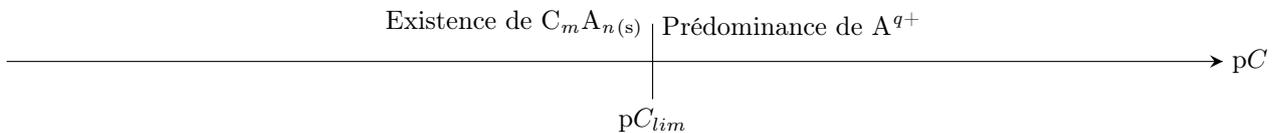
On définit alors  $pA = -\log [A^{q-}]$  et on peut tracer la diagramme d'existence de  $C_m A_n(s)$  en fonction de  $pA$  :



On considère une solution de  $A^{q-}$  à la concentration  $C_0$ . On ajoute à cette solution de concentration  $[C^{p+}]$ . On cherche la concentration limite  $[C^{p+}]_{lim}$  tel que :

$$K_s = (c_0)^n [C^{p+}]_{lim}^m \implies pK_s = -n \log c_0 + mpC_{lim}$$

On définit alors  $pC = -\log [C^{p+}]$  et on peut tracer la diagramme d'existence de  $C_m A_n(s)$  en fonction de  $pC$  :



### 3 Facteurs d'influences

**Propriété : Influence de la température**

La solubilité dépend de la température car le produit de solubilité est une constante qui ne dépend que de la température ( $K_s(T)$ ). La plupart du temps la solubilité augmente avec la température sauf pour le carbonate de calcium (le calcaire).

**Propriété : Influence des ions communs**

Si un solide  $C_m A_n(s)$  est versé dans une solution contenant une concentration  $[A^{q-}]_0$ . Alors on définit la solubilité  $s'$  tel que  $s' < s$  avec  $s$  la solubilité de  $C_m A_n(s)$  dans de l'eau pure.

**Exemple :**

Déterminons la solubilité  $s'$  du carbonate de calcium dans de l'eau contenant déjà des ions carbonate résultant d'une dissolution de carbonate de magnésium telle que  $[CO_3^{2-}]_0 = c = 2,6 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  :

	$\text{CaCO}_3(s)$	=	$\text{Ca}^{2+}(aq)$	+	$\text{CO}_3^{2-}(aq)$
$t = 0 \text{ s}$			0		$c$
$t \rightarrow +\infty$			$s'$		$s' + c$

À l'équilibre on suppose que  $s' \ll c$  et on a :  $K_s = \frac{s'(s' + c)}{(c^0)^2} \approx \frac{s'c}{(c^0)^2} = 5,0 \times 10^{-9} \implies s' = \frac{K_s (c^0)^2}{c}$

**Propriété : Influence du pH**

Si l'un des ions présente un caractère acido-basique alors le pH de la solution influence la solubilité du solide.

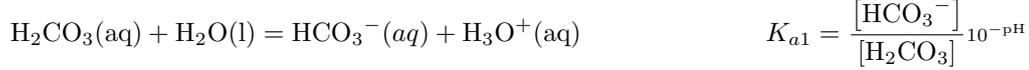
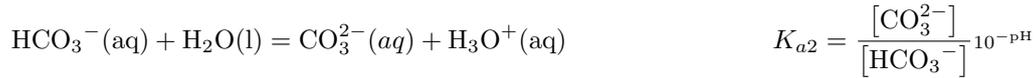
**Exemple :**

Déterminons les liens entre la solubilité  $s$  du carbonate de calcium et le pH de la solution. On considère dans un premier temps la dissolution du carbonate de calcium dans de l'eau jusqu'à saturation de la solution :

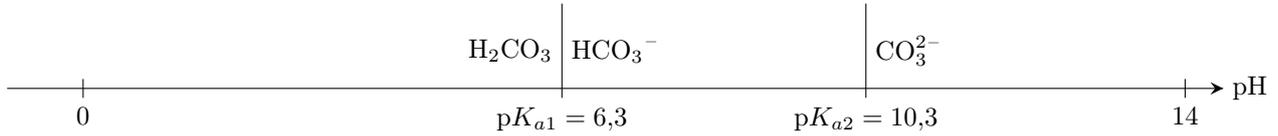
	$\text{CaCO}_3(s)$	=	$\text{Ca}^{2+}(aq)$	+	$\text{CO}_3^{2-}(aq)$
EI	$sV$		0		0
EF	0		$sV$		$sV$

On voit alors que  $[\text{Ca}^{2+}] = s$ . Pour l'ion carbonate, à l'équilibre sa concentration dépend du pH car c'est une base qui

dans les réactions :



On peut alors tracer le diagramme de prédominance :



À l'équilibre la conservation de la matière nous donne :

$$s = [\text{CO}_3^{2-}] + [\text{HCO}_3^-] + [\text{H}_2\text{CO}_3]$$

de plus :

$$K_s = \frac{[\text{Ca}^{2+}] [\text{CO}_3^{2-}]}{(c^\circ)^2} = \frac{s [\text{CO}_3^{2-}]}{(c^\circ)^2}$$

On se place alors dans les différents domaines de prédominance :

- pour  $\text{pH} > \text{p}K_{a2} + 1$  :  $[\text{CO}_3^{2-}] \gg [\text{HCO}_3^-] \gg [\text{H}_2\text{CO}_3]$

$$s \simeq [\text{CO}_3^{2-}] \implies \log\left(\frac{s}{c^\circ}\right) = -\frac{1}{2}\text{p}K_s$$

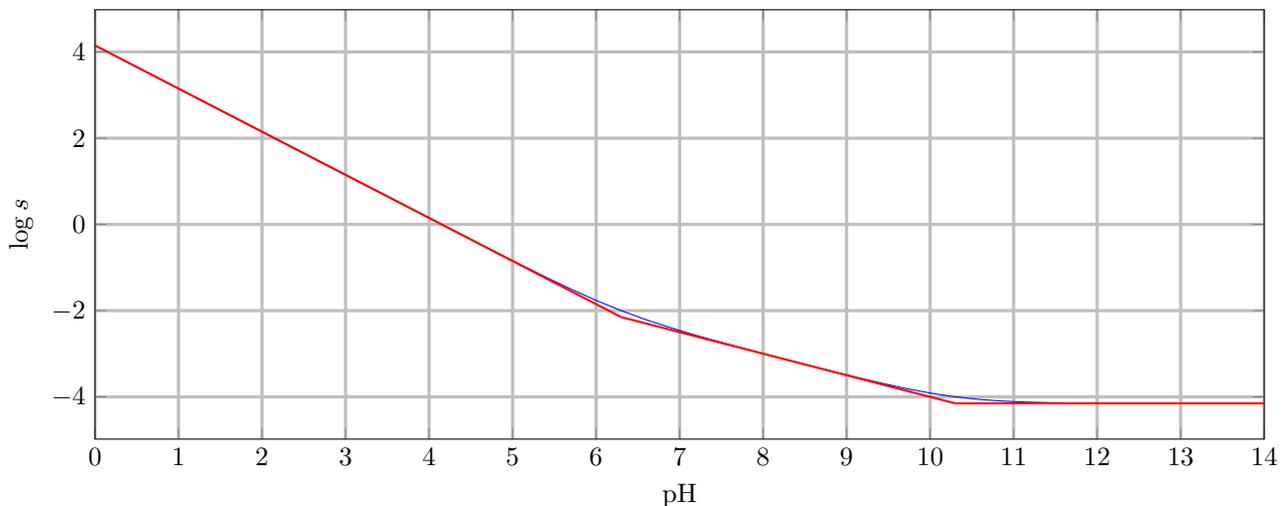
- pour  $\text{p}K_{a1} + 1 < \text{pH} < \text{p}K_{a2} - 1$  :

$$s \simeq [\text{HCO}_3^-] \quad \text{or} \quad [\text{CO}_3^{2-}] = [\text{HCO}_3^-] 10^{\text{pH} - \text{p}K_{a2}} \implies \log\left(\frac{s}{c^\circ}\right) = -\frac{1}{2}\text{p}K_s - \frac{1}{2}(\text{pH} - \text{p}K_{a2})$$

- pour  $\text{pH} < \text{p}K_{a1} - 1$  :  $[\text{H}_2\text{CO}_3] \gg [\text{HCO}_3^-] \gg [\text{CO}_3^{2-}]$

$$s \simeq [\text{H}_2\text{CO}_3] \quad \text{or} \quad [\text{CO}_3^{2-}] = [\text{H}_2\text{CO}_3] 10^{2\text{pH} - \text{p}K_{a2} - \text{p}K_{a1}} \implies \log\left(\frac{s}{c^\circ}\right) = -\frac{1}{2}\text{p}K_s + \frac{1}{2}(\text{p}K_{a2} + \text{p}K_{a1}) - \text{pH}$$

On peut alors tracer avec  $\text{p}K_s = 8,3$  :



## Chimie 6 : Réaction d'oxydo-réduction

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>4.4.2. Réactions d'oxydo-réduction</b>	
<b>Oxydants et réducteurs, réactions d'oxydo-réduction</b> Nombre d'oxydation. Exemples d'oxydants et de réducteurs minéraux usuels : nom, nature et formule des ions thiosulfate, permanganate, hypochlorite, du peroxyde d'hydrogène.  Pile, tension à vide, potentiel d'électrode, formule de Nernst, électrodes de référence.	Relier la position d'un élément dans le tableau périodique et le caractère oxydant ou réducteur du corps simple correspondant. Prévoir les nombres d'oxydation extrêmes d'un élément à partir de sa position dans le tableau périodique. Identifier l'oxydant et le réducteur d'un couple.  Décrire le fonctionnement d'une pile à partir d'une mesure de tension à vide ou à partir des potentiels d'électrode.
Diagrammes de prédominance ou d'existence.  Aspect thermodynamique des réactions d'oxydo-réduction. Dismutation et médimutation.	Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires.  Prévoir qualitativement ou quantitativement le caractère thermodynamiquement favorisé ou défavorisé d'une réaction d'oxydo-réduction à partir des potentiels standard des couples. <b>Mettre en œuvre une réaction d'oxydo-réduction pour réaliser une analyse quantitative en solution aqueuse.</b> <b>Réaliser une pile et étudier son fonctionnement.</b>

### 1 Oxydants et réducteurs

#### Definition : Couple Oxydant/Réducteur

Un oxydant est une espèce susceptible de capter un ou plusieurs électrons. Lorsqu'il gagne des électrons, subit une réduction. Il devient un réducteur.

Un réducteur est une espèce susceptible de céder un ou plusieurs électrons., lorsqu'il perd des électrons, subit une oxydation. Il devient un oxydant.

Lors d'une oxydation, un réducteur est transformé en son oxydant conjugué. Ils forment alors un couple Red/Ox.

Lors d'une réduction, un oxydant est transformé en son réducteur conjugué.

#### Propriété : Demi-équation d'un couple Ox/Red

L'oxydant et le réducteur sont reliés par une demi-équation du type :



La demi-équation doit être équilibrée en atomes et charges avec des molécules de H<sub>2</sub>O et des ions hydronium qu'on note H<sup>+</sup> par simplicité.

#### Definition : Nombre d'oxydation

Le nombre d'oxydation permet de caractériser l'état d'oxydation d'un élément dans une molécule ou un ion. On le définit en attribuant la charge électrique qu'il porterait si on attribuait les électrons d'une liaison à l'atome le plus électronégatif. Lors d'une oxydation ou d'une réduction le nombre d'oxydation d'un ou plusieurs éléments varie.

#### Propriété : nombre d'oxydation lors d'une réduction ou d'une oxydation

Le nombre d'oxydation d'un élément subissant une oxydation augmente du nombre d'électron qu'il a perdu.

Le nombre d'oxydation d'un élément subissant une réduction diminue du nombre d'électron qu'il a capté.

#### Propriété : Règles de calcul du nombre d'oxydation

Les nombres d'oxydations sont écrits en chiffres romains, pour connaître le nombre d'oxydation d'un élément on utilise les règles suivantes :

- Le n.o. d'un élément dans une espèce monoatomique est égal à la charge algébrique de cette espèce.

**Exemple :** n.o.(Fe(s))=0, n.o.(Fe<sup>2+</sup>(aq))=+II, n.o.(Fe<sup>3+</sup>(aq))=+III, n.o.(Cl<sup>-</sup>(aq))=-I

- Dans un édifice polyatomique, la somme des nombres d'oxydations de chaque élément est égale à la charge de l'édifice.

**Exemple :** Dans  $O_2$  :  $n.o(O)=0$

- Lors de l'attribution des électrons d'une liaison covalente à l'atome le plus électronégatif, le  $n.o(O)=-II$  dans les oxydes de type  $M_xO_y$  ou les hydroxydes de type  $M_x(OH)_y$ .

**Exemple :** Dans  $MnO_4^-$  :  $n.o(Mn)+4 \times n.o(O)=-I$  soit  $n.o(Mn)=+VII$

- Lors de l'attribution des électrons d'une liaison covalente à l'atome le plus électronégatif, le  $n.o(O)=-I$  dans les peroxydes de type  $R-O-O-R$ .

**Exemple :** Dans  $H_2O_2$  :  $n.o(H)=+I$ ,  $n.o(O)=-I$

- Le plus grand nombre d'oxydation accessible correspond à son nombre d'électron de valence.

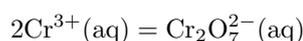
**Exemple :** Mg possède deux électrons de valences, son plus grand nombre d'oxydation possible est  $+II$

- Le plus petit nombre d'oxydation accessible correspond au nombre d'électrons à ajouter pour obtenir la configuration électronique d'un gaz noble qui le suit.

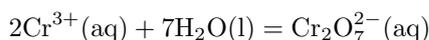
**Exemple :** O possède le nombre d'électrons de valence d'un gaz noble quand son  $n.o$  est  $-II$

### Méthode : Écrire une demi-équation redox à l'aide des nombres d'oxydation

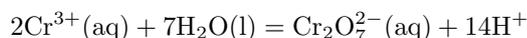
- Placer le réactif et sa forme conjuguée de chaque côté du signe  $\ll == \gg$ .
- Assurer la conservation de l'élément commun à l'oxydant et au réducteur.



- Assurer l'équilibrage des atomes d'oxygène O à l'aide de molécules d'eau  $H_2O$  :



- Assurer l'équilibrage des atomes d'hydrogène H à l'aide d'ions  $H^+$  :



- Assurer la conservation de la charge avec des électrons  $e^-$



- On peut calculer le  $n.o.$  inconnu à l'aide de la demi-équation :

$$2n.o(Cr^{3+}) = 2n.o(Cr \in Cr_2O_7^{2-}) - 6 \quad \implies n.o(Cr \in Cr_2O_7^{2-}) = +VI$$

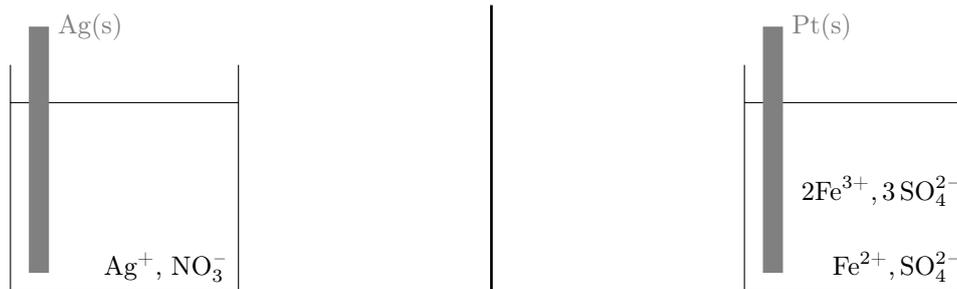
### Exemple : Exemples à connaître

Nom	Formule	Couple
Ion permanganate	$MnO_4^-$	$MnO_4^-/Mn^{2+}$
Ion hypochlorite	$ClO^-$	$ClO^-/Cl^-$
Peroxyde d'hydrogène	$H_2O_2$	$H_2O_2/H_2O$
Ion thiosulfate	$S_2O_3^{2-}$	$S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}$

## 2 Piles et potentiels

### Definition : Demi-pile

C'est le lieu où on peut avoir une réaction soit d'oxydation soit de réduction. Elle est composée d'un conducteur métallique qui peut être le réducteur du couple (électrode active) ou d'un métal inerte qui ne réagit pas avec les espèces. L'ensemble des deux espèces du couple sont en contact avec l'électrode.

**Exemple :****Definition : Anode et cathode**

L'électrode où la réaction d'oxydation a lieu est appelée anode tandis que l'électrode où la réaction de réduction a lieu est appelée cathode.

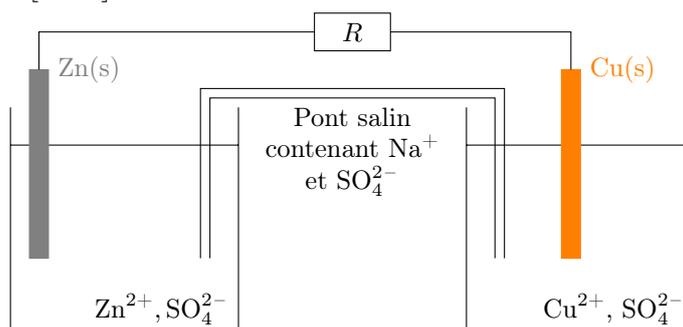
**Definition : Pile électrochimique**

Une pile électrochimique est l'association en série de deux demi-piles reliées par une jonction électrolytique qui peut être :

- une paroi poreuse ;
- un pont salin.

**Exemple : La pile Daniell**

$[Zn^{2+}] = 5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $[Cu^{2+}] = 5 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  soit  $e = 1,16 \text{ V}$ .

**Definition : Force électromotrice**

La force électromotrice de la pile est la différence de potentiels mesurée par un voltmètre lorsque la pile ne débite aucun courant :

$$e = V_+ - V_-$$

où  $V_+$  est le potentiel de la cathode et  $V_-$  est le potentiel de l'anode.

**Definition : Capacité d'une pile**

On appelle capacité d'une pile  $Q$  la quantité maximale de charge électrique qu'elle peut fournir au cours de sa décharge.

**Definition : Électrodes de référence**

On choisit des demi-piles particulières dont le potentiel est constant :

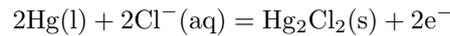
**Électrode standard à hydrogène (ESH) :**

L'électrode standard à hydrogène (ESH) fait intervenir le couple  $H^+(aq)/H_2(g)$ . Elle est constituée d'une électrode en platine plongée dans une solution contenant des ions  $H_3O^+$ , de pH nul, dans laquelle barbote du dihydrogène à la pression partielle  $P^\circ = 1 \text{ bar}$ . On lui attribue conventionnellement la valeur  $E^\circ(H^+/H_2) = 0 \text{ V}$  afin qu'elle serve d'origine des potentiels.

**Électrode au calomel saturée (ECS)**

L'ESH étant peu pratique d'emploi, on lui privilégie souvent l'électrode au calomel saturée en  $KCl(s)$ , de potentiel connu (par rapport à l'ESH) et constant. Elle fait intervenir le couple  $Hg_2Cl_2(s)/Hg(l)$  où  $Hg_2Cl_2$  est le précipité de chlorure

mercureux appelé calomel.



On fixe  $[\text{Cl}^-]$  en saturant la solution en KCl.

À 25 °C :  $E_{\text{ECS}} = 0,24\text{V}$

### Formule de Nernst

On considère le potentiel d'électrode d'une demi-pile associée au couple (Ox/Red) comme la différence de potentiel de cette demi-pile avec une ESH. Celle-ci est donnée par la formule de Nernst associée à la demi-équation électronique :



le potentiel rédox  $E(\text{Ox}/\text{Red})$  dépend des activités de l'oxydant et du réducteur et du potentiel standard  $E^\circ(\text{Ox}/\text{Red})$  à la température  $T$  :

$$E(\text{Ox}/\text{Red}) = E^\circ(\text{Ox}/\text{Red}) + \frac{RT}{n\mathcal{F}} \ln \frac{a^\beta(\text{Ox})a^\gamma(\text{H}^+(\text{aq}))}{a^\alpha(\text{Red})a^\delta(\text{H}_2\text{O}(l))}$$

avec  $\mathcal{F} = \mathcal{N}_{Ae} = 96,5 \times 10^3 \text{C} \cdot \text{mol}^{-1}$  la constante de Faraday et  $R = 8,314 \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  la constante des gaz parfaits.

On retiendra qu'à  $T = 298 \text{K}$  on a :

$$E(\text{Ox}/\text{Red}) = E^\circ(\text{Ox}/\text{Red}) + \frac{0.059}{n} \log \left( \frac{a^\alpha(\text{Ox})}{a^\beta(\text{Red})} \right) - \frac{0.059\gamma}{n} \text{pH}$$

### Exemple :

Soit le couple  $\text{ClO}^-/\text{Cl}^-$  à  $T = 298 \text{K}$  de demi-équation :



On écrit la formule de Nernst :

$$E(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) = E^\circ(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) + \frac{0.06}{2} \log \left( \frac{a(\text{ClO}^-(\text{aq}))a^2(\text{H}^+(\text{aq}))}{a(\text{Cl}^-(\text{aq}))a(\text{H}_2\text{O}(l))} \right)$$

On obtient alors :

$$E(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) = E^\circ(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) + 0.03 \log \left( \frac{[\text{ClO}^-] [\text{H}^+]^2}{[\text{Cl}^-] c^\circ} \right)$$

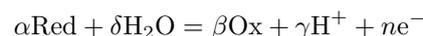
Ce qui donne :

$$E(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) = E^\circ(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) - 0.06\text{pH} + 0.03 \log \left( \frac{[\text{ClO}^-]}{[\text{Cl}^-]} \right)$$

## 3 Réaction d'oxydo-réduction

### Definition : Convention de tracé en oxydo-réduction

On considère un couple Ox/Red. La demi-équation électronique peut s'écrire :



On fait intervenir ici, de manière inhabituelle, les ions  $\text{H}^+$  pour bien mettre en évidence l'influence du pH. Le potentiel  $E$  de la solution est :

$$E = E^\circ(\text{Ox}/\text{Red}) + \frac{0.059}{n} \log \left( \frac{a(\text{Ox})^\beta [\text{H}^+]^\gamma}{a(\text{Red})^\alpha (c^\circ)^\gamma} \right) = E^\circ(\text{Ox}/\text{Red}) + \frac{0.059}{n} \log \left( \frac{a(\text{Ox})^\beta}{a(\text{Red})^\alpha} \right) - \frac{0.059\gamma}{n} \text{pH}$$

Pour pouvoir étudier la stabilité des espèces du couple (Ox/Red) en fonction du potentiel d'électrode  $E$ , il faut fixer la valeur du terme  $\frac{a(\text{Ox})^\beta}{a(\text{Red})^\alpha}$  à la frontière entre les domaines de stabilités. Pour cela, on utilise des conventions de tracé arbitraires, c.à.d. que l'on choisit arbitrairement les activités des espèces pour fixer la valeur de ce terme.

**Propriété : Diagramme de stabilité redox**

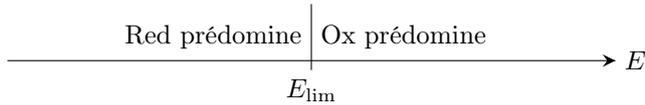
On considère un couple redox tel que la demi-équation électronique s'écrit :



On calcule alors le potentiel de Nernst de la solution :

$$E = E^\circ(\text{Ox}/\text{Red}) + \frac{0.06}{n} \log \left( \frac{a(\text{Ox})^\gamma}{a(\text{Red})^\alpha} \right)$$

À la frontière entre les deux domaines de stabilités on utilise la convention de tracé qui fixe la valeur de  $E_{\text{lim}}$ . On obtient alors le diagramme de stabilité suivant :



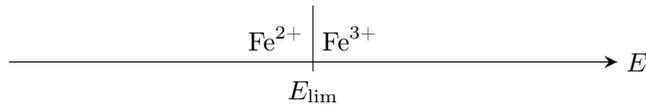
avec  $E_{\text{lim}}$  calculé selon la convention de tracé choisie.

**Exemple : Diagramme de prédominance du couple  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$** 

Soit la demi équation électronique :  $\text{Fe}^{2+}(\text{aq}) = \text{Fe}^{3+}(\text{aq}) + e^-$

On obtient alors :  $E = E^\circ(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) + 0.06 \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right)$

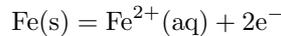
On obtient le diagramme de prédominance suivant :



avec  $E_{\text{lim}} = E^\circ(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+})$ .

**Exemple : Diagramme de stabilité du couple  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$** 

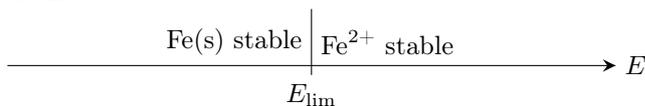
Soit la demi équation électronique :



On obtient alors :

$$E = E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) + 0.03 \log \left( \frac{[\text{Fe}^{2+}]}{c^\circ} \right)$$

On doit ici prendre une convention de tracé, on prend  $[\text{Fe}^{2+}] = c_{\text{tr}}$  choisi arbitrairement. On obtient le diagramme de stabilité suivant :



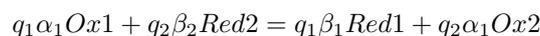
avec  $E_{\text{lim}} = E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) + 0.03 \log \left( \frac{c_{\text{tr}}}{c^\circ} \right)$ .

**Méthode : Équilibrer une réaction d'oxydo-réduction**

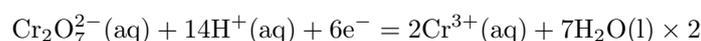
On considère une réaction d'oxydo-réduction entre un oxydant  $\text{Ox}1$  appartenant à un couple  $\text{Ox}1/\text{Red}1$  et un réducteur  $\text{Red}2$  appartenant à un couple  $\text{Ox}2/\text{Red}2$  de demi-équations :



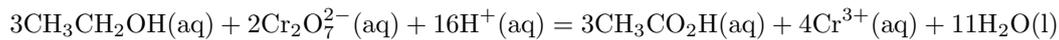
L'équation de la réaction d'oxydo-réduction s'obtient multipliant les deux demi-équations par  $q_1$  et  $q_2$  de manière à égaliser les nombres d'électrons tel quel  $q_1 n_1 = q_2 n_2$  :

**Exemple :**

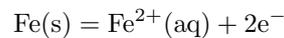
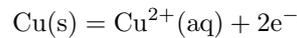
Soit  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  qui réagit avec  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$  :



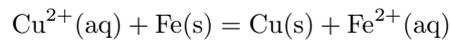
Dans ce cas :



Soit  $\text{Cu}^{2+}(\text{aq})$  qui réagit avec  $\text{Fe}(\text{s})$  :



Dans ce cas :



### Propriété : Constante d'équilibre

À l'équilibre thermodynamique, les potentiels de tous les couples rédox en solution sont égaux. Dans le cas d'une réaction entre un oxydant  $\text{Ox1}$  appartenant à un couple  $\text{Ox1}/\text{Red1}$  et un réducteur  $\text{Red2}$  appartenant à un couple  $\text{Ox2}/\text{Red2}$  :

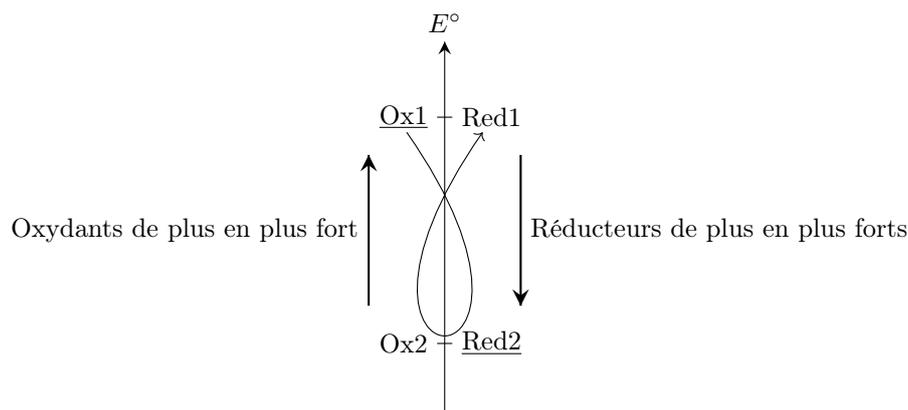
$$E(\text{Ox1}/\text{Red1}) = E(\text{Ox2}/\text{Red2})$$

On obtient alors :

$$K^\circ = 10^{\pm \frac{n}{0.059} |\Delta E^\circ|}$$

### Propriété : Échelle des potentiels standards

On peut classer couples red/ox sur une échelle des  $E^\circ$  :



On retiendra que :

- Si  $E^\circ(\text{Ox}) > E^\circ(\text{Red})$  alors  $K^\circ > 1$  la réaction est thermodynamiquement favorable.
- Si  $E^\circ(\text{Ox}) - E^\circ > 0,2\text{V}$  alors  $K^\circ > 10^3$  la réaction est quantitative.
- Si  $E^\circ(\text{Ox}) < E^\circ(\text{Red})$  alors  $K^\circ < 1$  la réaction est thermodynamiquement défavorable.
- Si  $E^\circ(\text{Ox}) - E^\circ > -0,2\text{V}$  alors  $K^\circ < 10^{-3}$  la réaction est limitée.

### Définition : Dismutation et médiamutation

Lors d'une dismutation, une espèce amphotère instable réagit sur elle-même en jouant le rôle à la fois d'oxydant et de réducteur. La réaction inverse est appelée une médiamutation.

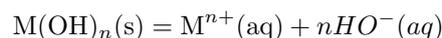
## Chimie 7 : Diagramme potentiel-pH

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>4.4.2. Réactions d'oxydo-réduction</b>	
<b>Diagrammes potentiel-pH</b> Principe de construction, lecture et utilisation d'un diagramme potentiel-pH.  Diagramme potentiel-pH de l'eau	Identifier les différents domaines d'un diagramme fourni associés à des espèces chimiques données. Déterminer la valeur de la pente d'une frontière dans un diagramme potentiel-pH. Justifier la position d'une frontière verticale. Prévoir le caractère thermodynamiquement favorisé ou non d'une transformation par superposition de diagrammes.  Prévoir la stabilité des espèces dans l'eau. Prévoir une dismutation ou médiamutation en fonction du pH du milieu. Confronter les prévisions à des données expérimentales et interpréter d'éventuels écarts en termes cinétiques. <b>Mettre en œuvre des réactions d'oxydo-réduction en s'appuyant sur l'utilisation de diagrammes potentiel-pH.</b>

## 1 Rappel sur les diagrammes

**Definition : Convention de tracé lors d'une précipitation**

On considère un sel du type  $M(OH)_n(s)$ , et on considère la réaction de dissolution est la suivante :



On peut alors définir un couple  $M^{n+}/M(OH)_n$  dont on pourra tracer le diagramme d'existence de  $M(OH)_n$  en fonction du pH. Pour cela il faudra fixer la valeur de  $[M^{n+}]$  arbitrairement.

**Propriété : Diagramme d'existence**

Soit la dissolution d'un sel du type  $M(OH)_n(s)$ , on cherche à tracer le diagramme d'existence du couple  $M^{n+}/M(OH)_n$  en fonction du pH. On cherche le  $pH_{lim}$  pour lequel le quotient de réaction est égal au produit de solubilité :

$$K_s = \frac{[M^{n+}][HO^-]_{lim}^n}{(c^\circ)^{n+1}} = [M^{n+}] \left( \frac{K_e}{[H_3O^+]_{lim}} \right)^n = \frac{[M^{n+}]}{c^\circ} 10^{n(pH_{lim} - pK_e)}$$

On impose une convention de tracé :  $[M^{n+}] = c_{tr}$

$$pH_{lim} = pK_e + \frac{1}{n} \log \left( \frac{K_s c^\circ}{c_{tr}} \right)$$

On obtient alors le diagramme d'existence suivant :

**Exemple : Diagramme d'existence de  $Fe(OH)_2(s)$** 

Soit la réaction de dissolution suivante :  $Fe(OH)_2(s) = Fe^{2+}(aq) + 2HO^-(aq)$

On applique la loi de l'équilibre :  $K_s = \frac{[Fe^{2+}][HO^-]}{(c^\circ)^3} = [Fe^{2+}] \left( \frac{K_e}{[H_3O^+]} \right)^2$

Puis on se place à la frontière où  $[Fe^{2+}] = C_{tr}$  et  $pH = pH_{lim}$  :  $K_s = \frac{[Fe^{2+}]}{c^\circ} 10^{2(pH_{lim} - pK_e)}$

On obtient alors :  $pH_{lim} = pK_e + \frac{1}{2} \log \left( \frac{K_s c^\circ}{c_{tr}} \right)$

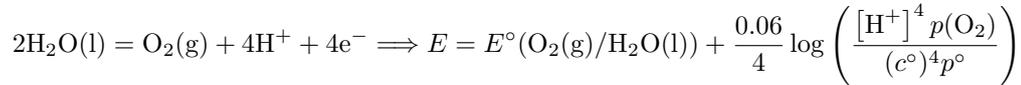
On trace alors le diagramme d'existence :

## 2 Diagramme potentiel-pH de l'eau

### Definition : Les couples de l'eau

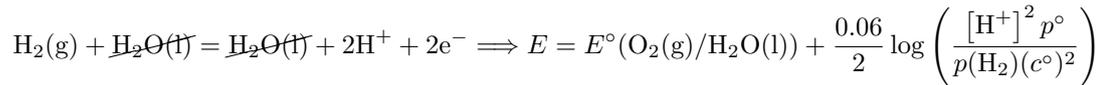
L'eau  $\text{H}_2\text{O}(\text{l})$  intervient dans deux couples oxydant réducteur :

- Le couple  $\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\text{l})$  de demi-équation :



En utilisant la convention de tracé  $p(\text{O}_2) = P_{\text{tr}} = p^\circ$  on obtient :  $E = 1,23 - 0.06\text{pH}$

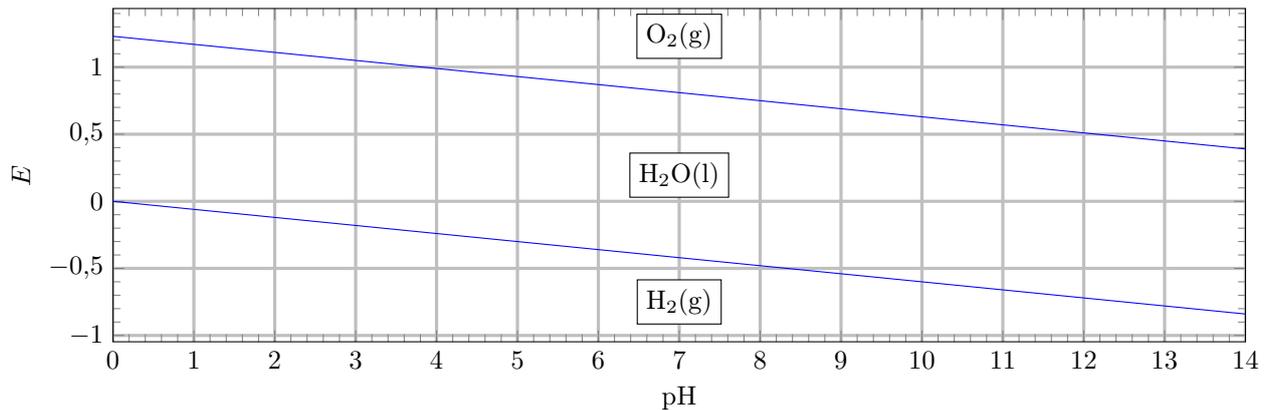
- Le couple  $\text{H}_2\text{O}(\text{l})/\text{H}_2(\text{g})$  de demi-équation :



En utilisant la convention de tracé  $P(\text{H}_2) = P_{\text{tr}} = p^\circ$  on obtient :  $E = -0.06\text{pH}$

### Propriété : Diagramme potentiel-pH de l'eau

On cherche à tracer le diagramme  $E - \text{pH}$  de toutes les espèces conjuguées à  $\text{H}_2\text{O}$ . On impose une convention de tracé  $p(\text{H}_2) = p(\text{O}_2) = P_{\text{tr}} = p^\circ$  :



### Propriété : Interprétation du diagramme

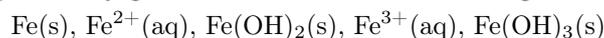
Le diagramme se décompose en trois zones :

- La zone au dessus de la courbe du haut : stabilité de  $\text{O}_2(\text{g})$ , l'eau va donc réagir comme réducteur lors d'une oxydation.
- La zone entre les deux courbes : stabilité de  $\text{H}_2\text{O}(\text{l})$ .
- La zone en dessous de la courbe du bas : stabilité de  $\text{H}_2(\text{g})$ , l'eau va donc réagir comme oxydant lors d'une réduction.

## 3 Diagramme potentiel-pH du fer

### Definition : Diagramme de situation

On souhaite placer la liste des espèces conjuguées du fer suivante dans un diagramme :



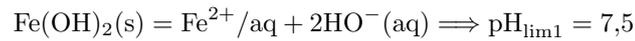
On dispose également des données thermodynamiques suivantes :

- $\text{p}K_s(\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s})) = 15,0$ ;
- $\text{p}K_s(\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})) = 37,2$ ;

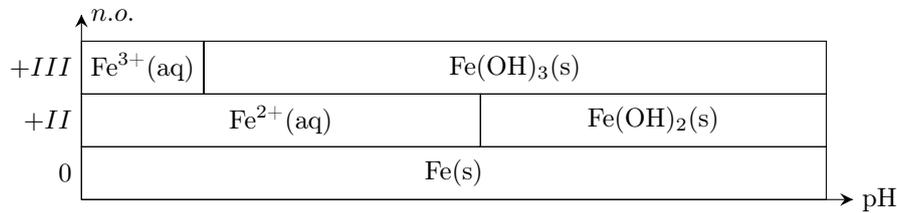
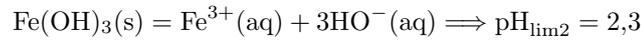
Le diagramme de situation consiste à tracer le diagramme d'existence en fonction du pH pour chaque nombre d'oxydation ( $n.o.$ ) du fer au sein des espèces. En utilisant comme convention de tracé la concentration  $c_{\text{tr}} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , on obtient :

- Pour  $n.o. = 0$  on a uniquement  $\text{Fe}(\text{s})$ ;

- Pour  $n.o. = +II$  on a  $Fe^{2+}(aq)$  et  $Fe(OH)_2(s)$  qui forment un couple via la réaction de dissolution :



- Pour  $n.o. = +III$  on a  $Fe^{3+}(aq)$  et  $Fe(OH)_3(s)$  qui forment un couple via la réaction de dissolution :



Une fois ce diagramme obtenu, ajouter les diagramme de prédominance ou d'existence entre des espèces de nombre d'oxydation différent via la demi-équation électronique.

### Propriété : Frontières entre espèces de nombre d'oxydation différent

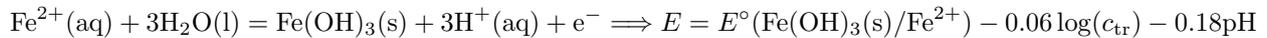
On peut vous demander de justifier ou de retrouver le pente d'une frontière entre deux domaines d'espèces qui possèdent un  $n.o.$  différent. Pour cela on calcule simplement le potentiel de Nernst associé au couple envisagé et on regarde le coefficient devant le pH.

On pour le diagramme potentiel-pH du fer les données suivantes :

- $E^\circ(Fe^{2+}/Fe) = -0,44 V$  ;
- $E^\circ(Fe^{3+}/Fe^{2+}) = 0,77 V$  ;

### Exemple : Frontière entre $Fe^{2+}$ et $Fe(OH)_3(s)$

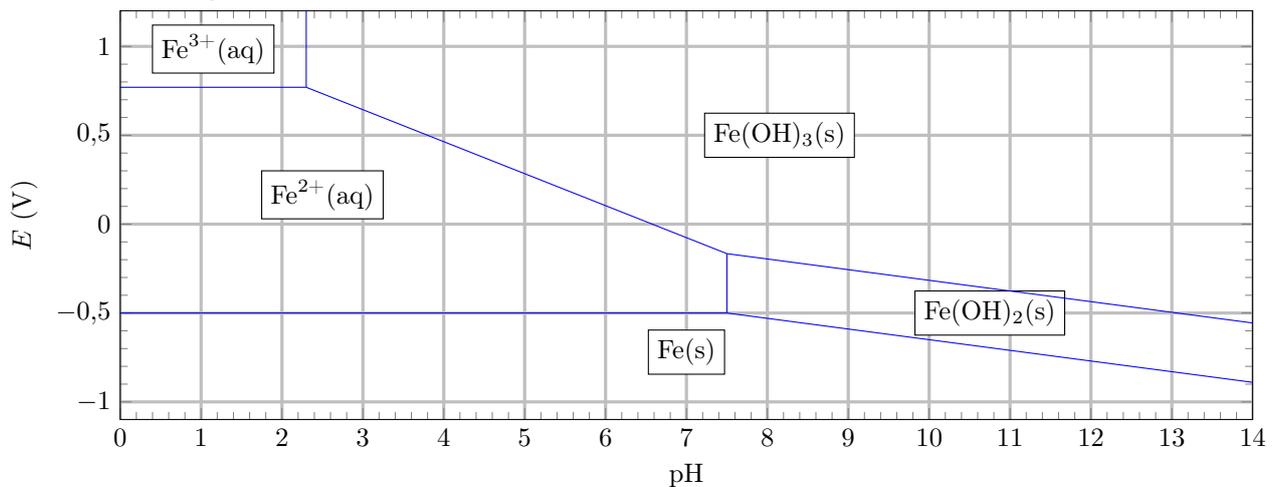
Considérons la demi-équation suivante :



On a alors une droite de pente  $-0,18$ . Comme on ne nous donne pas le potentiel standard du couple  $Fe(OH)_3(s)/Fe^{2+}$ , on utilise la continuité avec la frontière du couple  $Fe^{3+}/Fe^{2+}$  qui est égale au potentiel standard du couple.

### Propriété : Diagramme potentiel-pH du fer

On obtient alors le diagramme suivant :



## 4 Diagramme potentiel-pH du chlore

### Definition : Diagramme de situation

On souhaite placer les différentes espèces conjuguées du chlore dans un diagramme, on dispose de la liste des espèces suivantes :

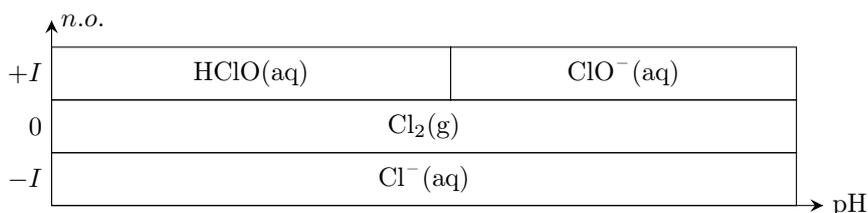
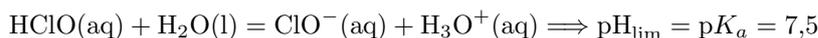


On dispose également des données thermodynamiques suivantes :

- $\text{p}K_a(\text{HClO}/\text{ClO}^-) = 7,5$  ;

Le diagramme de situation consiste à tracer le diagramme d'existence en fonction du pH pour chaque nombre d'oxydation (*n.o.*) du fer au sein des espèces. En utilisant comme convention de tracé la concentration  $c_{\text{tr}} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  on obtient :

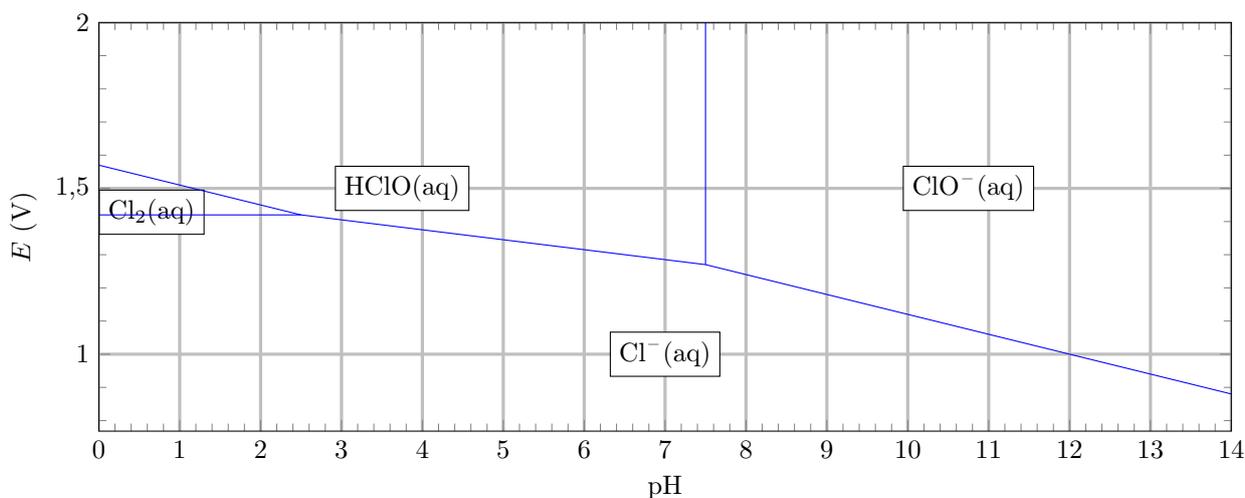
- Pour  $n.o. = -I$  on a uniquement  $\text{Cl}^-(\text{aq})$  ;
- Pour  $n.o. = 0$  on a uniquement  $\text{Cl}_2(\text{aq})$  ;
- Pour  $n.o. = +I$  on a  $\text{HClO}(\text{aq})$  et  $\text{ClO}^-(\text{aq})$  qui forment un couple acide-base :



Une fois ce diagramme obtenu, ajouter les diagramme de prédominance ou d'existence entre des espèces de nombre d'oxydation différent via la demi-équation électronique.

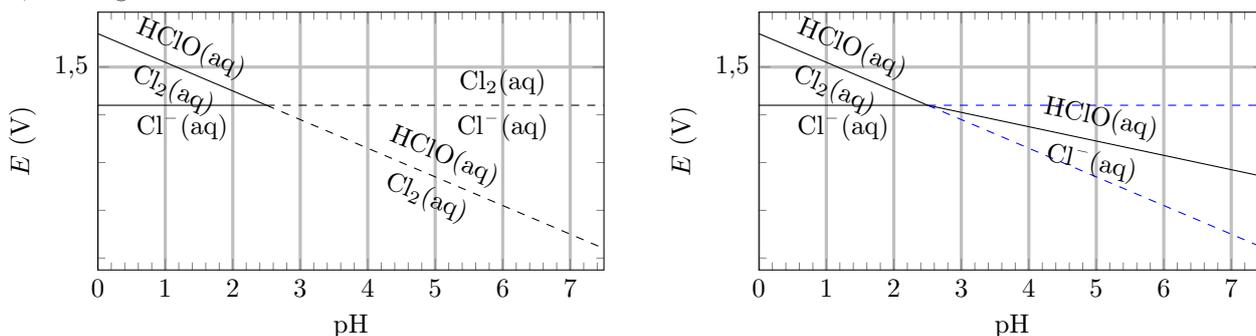
**Propriété : Diagramme potentiel-pH du chlore**

On obtient alors le diagramme suivant :



**Remarque : Dismutation du chlore**

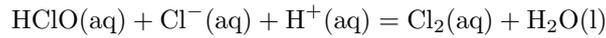
Pour un pH > 2,5 on a disparition du domaine de Cl<sub>2</sub>. En effet les frontières théoriques initiales devaient donner pour pH < 7,5 le diagramme suivant :



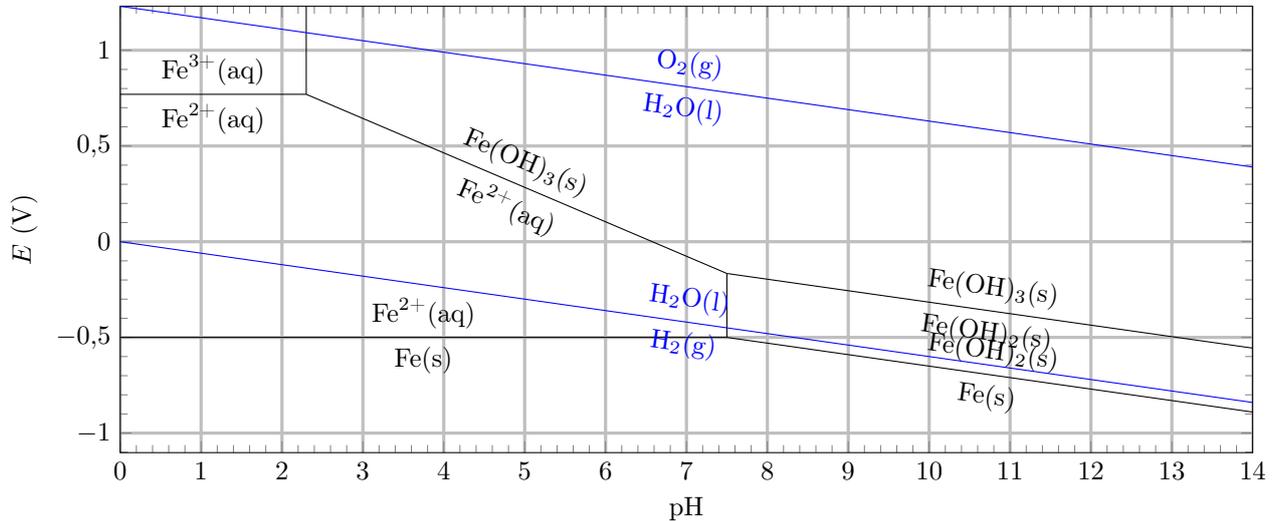
Les deux domaines de Cl<sub>2</sub> sont disjoints. On a alors Cl<sub>2</sub> oxydant dans le couple Cl<sub>2</sub>/Cl<sup>-</sup> qui réagit avec Cl<sub>2</sub> réducteur dans le couple Cl<sub>2</sub>/HClO. On trace alors une nouvelle frontière pour le nouveau couple HClO/Cl<sup>-</sup>.

**Remarque : Médimutation**

Pour  $pH < 2,5$  on a le domaine de stabilité de  $Cl_2$  où à lieu la réaction de médimutation :

**5 Utilisation des diagrammes potentiel-pH****Exemple : Superposition de deux diagrammes potentiel-pH**

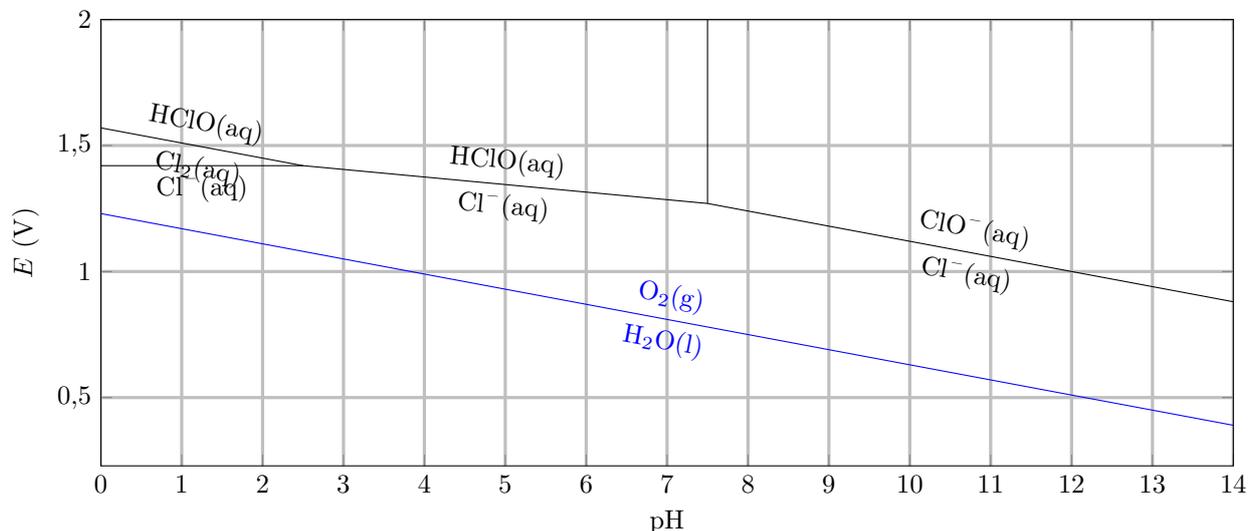
On superpose le diagramme du fer et de l'eau :

**Propriété : Stabilité d'une espèce dans l'eau**

Une espèce donnée est stable dans l'eau si lors de la superposition des deux diagrammes potentiel-pH les domaines se recoupent. Par exemple dans le diagramme potentiel-pH du fer et de l'eau on voit que le domaine de l'eau recoupe les domaines de :

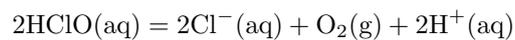
- $Fe^{2+}$ ,
- $Fe^{3+}$ ,
- $Fe(OH)_2$ ,
- $Fe(OH)_3$ .

Ces espèces sont donc stable dans l'eau, en revanche on voit que les domaines de Fe et  $H_2O$  sont disjointes, on a donc instabilité de Fe dans l'eau.

**Exemple : Superposition de deux diagrammes potentiel-pH**

**Propriété : Réaction thermodynamiquement favorisée**

Les espèces instables sont l'acide hypochloreux  $\text{HClO}$  et l'ion hypochlorite  $\text{ClO}^-$ . Les réactions entre l'eau et ces deux espèces sont donc favorisées et on a :

**Remarque : Instable mais à quelle vitesse ?**

On peut donc observer l'instabilité ou la stabilité d'une espèce dans l'eau, mais cette observation ne concerne que le caractère thermodynamiquement favorisé d'un état d'équilibre. On ne sait rien de la transformation pour l'atteindre et encore moins de la cinétique, certaines espèces peuvent paraître stable sur une échelle de temps donnée car elles ont une cinétique d'oxydation très lente. C'est le cas par exemple de l'ion hypochlorite  $\text{ClO}^-$ .

## Chimie 8 : Solides cristallins

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>4.3. Structure et propriétés physiques des solides</b>	
<b>Modèle du cristal parfait</b> Solide amorphe, solide cristallin, solide semi- cristallin ; variétés allotropiques.	<b>Illustrer l'influence des conditions expérimentales sur la formation de solides et de solides cristallins.</b>
Description du cristal parfait ; population, coordinence, compacité, masse volumique. Rayons métallique, covalent, de van der Waals ou ionique.	Décrire un cristal parfait comme un assemblage de mailles parallélépipédiques. Déterminer la population, la coordinence et la compacité pour une structure fournie. Déterminer la valeur de la masse volumique d'un matériau cristallisé selon une structure cristalline fournie. Relier le rayon métallique, covalent, de van der Waals ou ionique, selon le cas, aux paramètres d'une maille donnée. <b>Utiliser un logiciel ou des modèles cristallins pour visualiser des mailles et des sites interstitiels et pour déterminer des paramètres géométriques.</b>
Description des modèles d'empilement compact de sphères identiques. Maille conventionnelle CFC et ses sites interstitiels. Limites du modèle du cristal parfait.	Localiser les interstices tétraédriques et octaédriques entre les plans d'empilement. Localiser, dénombrer les sites tétraédriques et octaédriques d'une maille CFC et déterminer leur habitabilité. Confronter des données expérimentales aux prévisions du modèle.
<b>Métaux</b> Cohésion et propriétés physiques des métaux.	Positionner dans le tableau périodique et reconnaître les métaux et non métaux. Relier les caractéristiques de la liaison métallique (ordre de grandeur énergétique, non directionnalité) aux propriétés macroscopiques des métaux.
<b>Solides covalents et moléculaires</b> Cohésion et propriétés physiques des solides covalents et moléculaires.	Relier les caractéristiques des liaisons covalentes, des interactions de van der Waals et des interactions par pont hydrogène (directionnalité ou non, ordre de grandeur des énergies mises en jeu) et les propriétés macroscopiques des solides correspondants.
<b>Solides ioniques</b> Cohésion et propriétés physiques des solides ioniques.	Relier les caractéristiques de l'interaction ionique dans le cadre du modèle du solide ionique parfait (ordre de grandeur de l'énergie d'interaction, non directionnalité, charge localisée) avec les propriétés macroscopiques des solides ioniques.

### 1 Le modèle du cristal parfait

#### Definition : Solide cristallin

Un solide cristallin est un assemblage d'entités (atomes, molécules ou ions) caractérisé par une structure se répétant périodiquement dans les trois directions de l'espace. Il est ordonné sur des distances très grandes par rapport à la distance interatomique.

#### Remarque : Solide amorphe

Un solide amorphe est un assemblage d'entités (atomes, molécules ou ions) ayant un ordre à courte distance seulement (quelques nanomètres) mais par d'ordre à longue distance. Il ne comporte pas de structure périodique.

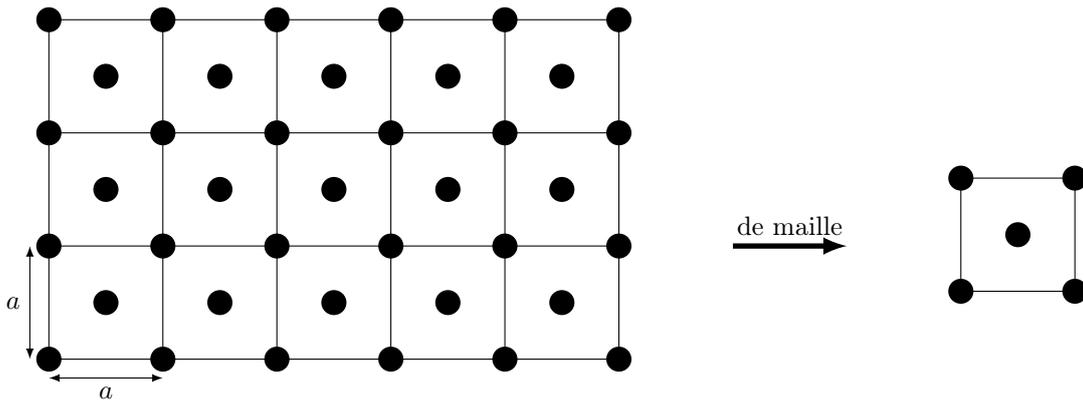
#### Definition : Maille d'un cristal

Un cristal parfait est décrit par une maille qui se répète périodiquement dans les trois directions de l'espace. L'étude d'une maille permet de connaître les propriétés de l'ensemble du cristal.

On se limitera à l'étude de mailles en forme de parallélépipède.

#### Exemple : Maille carrée bidimensionnelle

On considère le réseau représenté ci-dessous de paramètre de maille  $a$  :



Ici la maille est carré et on peut donc décrire la maille avec un seul paramètre  $a$ . Dans le cas général pour une maille à trois dimensions on a besoin de trois paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

### Definition : Population de la maille

La population de la maille est le nombre d'entités (atomes, molécules ou ions) par maille. Pour calculer la population on divise chaque entité par le nombre de maille auquel elle appartient et on fait la somme.

### Exemple :

Pour la maille ci-dessus à deux dimensions on a la population qui vaut :  $1 \times 1 + 4 \times \frac{1}{4} = 2$  atomes par mailles.

### Definition : Coordinence d'un atome

La coordinence d'un atome est le nombre de ses plus proches voisins.

### Remarque :

Les corps pur peuvent posséder plusieurs structure cristallines, on appelle ces différentes structures des variétés allotropiques. Le passage de l'une à l'autre est une transition de phase allotropique.

Les limites du modèle des cristaux parfaits sont :

- L'énergie cinétique non nulle des atomes sur le réseau, l'idée d'atomes immobiles est fautive.
- La présence de lacunes ou d'impuretés qui vient perturber la structure localement et modifie les propriétés physiques du cristal.

### Definition : Modèle des sphères dures

On associe chaque atome à une boule de rayon  $R_{at}$  indéformable et en contact avec ses plus proches voisins. On peut alors relier  $R_{at}$  au paramètre de maille  $a$ .

### Definition : Compacité

On définit la compacité d'un cristal comme le rapport du volume occupé par les sphères dures sur le volume de la maille :

$$\phi = \frac{P \times V_{sphere}}{V_{maille}}$$

### Propriété : masse volumique théorique

On peut définir la masse volumique du cristal à partir de la masse volumique d'une maille :

$$\rho = \frac{P \times m_{atome}}{a^3} = \frac{PM}{\mathcal{N}_A a^3}$$

avec  $M$  la masse molaire atomique de l'élément considéré et  $\mathcal{N}_A$  la constante d'Avogadro.

### Definition : Site interstitiel

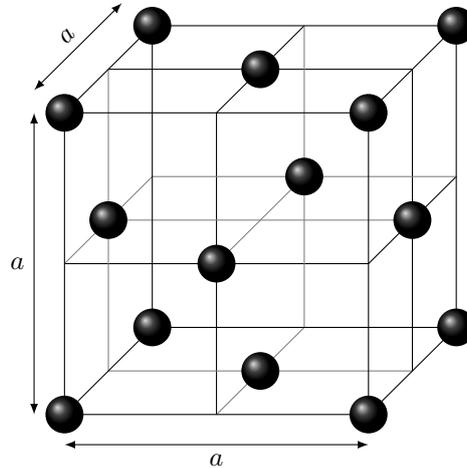
Un site interstitiel est un espace de vide situé entre les sphères non tangentes. La forme du site est donnée en reliant tous les atomes autour du centre du site interstitiel. Nous verrons deux types de sites :

- les sites octaédriques ;
- les sites tétraédriques.

## 2 La structure CFC

### Definition : Structure cubique à faces centrées

Un atome est présent sur chaque sommet et au centre de chaque face de la maille.



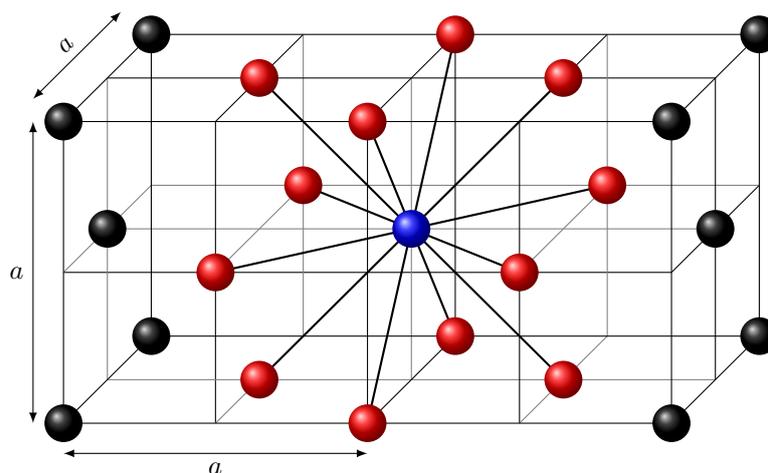
### Propriété : Coordinence et population

Pour déterminer la coordinence il faut déterminer qui sont les plus proches voisins, les atomes au centre d'une face sont distant des atomes sur les sommets d'une distance  $d_1 = a \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ils sont distant des autres atomes au centre d'une face d'une distance  $d_2 = d_1$ . Chaque atome possède alors :

$$C = 12$$

La population de la maille est 8 atomes partagés par 8 mailles (aux sommets de la maille) et 6 atomes partagés par 2 mailles (aux centres des faces de la mailles) :

$$P = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ atomes par mailles}$$

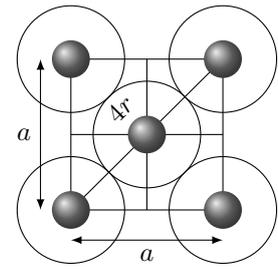


### Propriété : Condition de tangence

On se place dans le plan d'une face :

À partir du modèle des sphères dures on peut voir sur une maille CFC que :

$$a\sqrt{2} = 4r \implies r = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$



### Propriété : Compacité

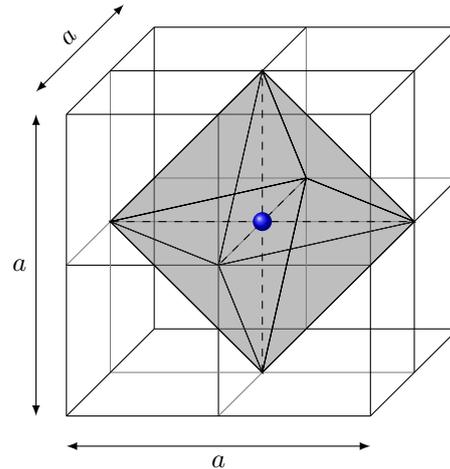
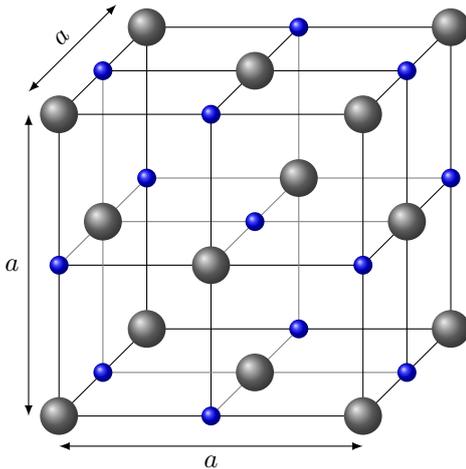
On définit la compacité d'un cristal comme le rapport du volume occupé par les sphères dures sur le volume de la maille :

$$\phi = \frac{P \times V_{\text{sphère}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4P\pi r^3}{a^3} \implies \phi = \frac{16}{3}\pi \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^3 \simeq 0,74$$

### Définition : Site octaédrique d'une structure CFC

Un site octaédrique est l'emplacement situé au centre d'un octaèdre régulier dont les 6 sommets sont des nœuds du réseau. Les sites octaédriques d'un réseau CFC sont situés :

- 1 au centre de la maille ;
- 1 au centre de chaque arête.



Les sites octaédriques d'une structure CFC forment une structure CFC décalée de  $\frac{a}{2}$  par rapport à la structure de base.

### Propriété : Habitabilité d'un site octaédrique

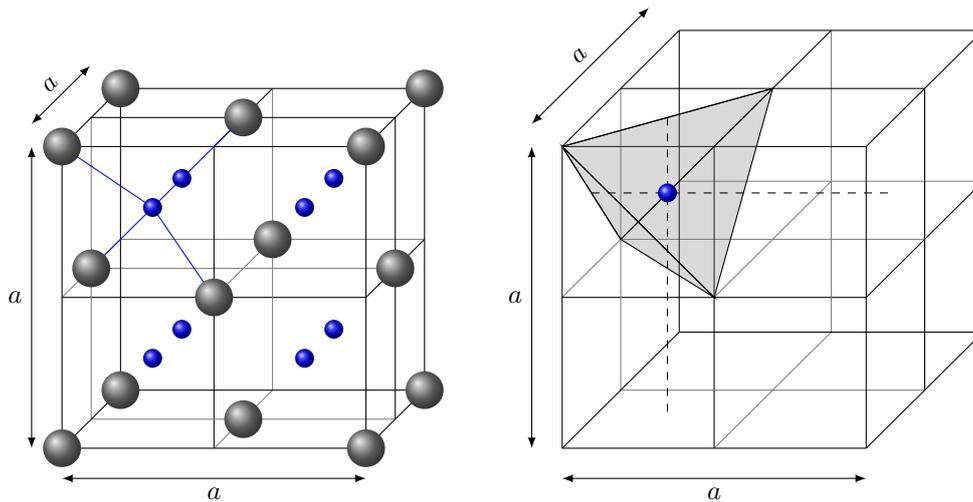
On cherche le rayon  $r_O$  d'une sphère dure de plus grande taille qu'on peut placer sur un site octaédrique en conservant la condition de tangence.

$$a = 2r + 2r_O \implies \frac{4r}{\sqrt{2}} = 2r + 2r_O \implies r_O = r(\sqrt{2} - 1)$$

### Définition : Site tétraédriques d'une structure CFC

Un site tétraédrique d'un réseau est un emplacement situé au centre d'un tétraèdre régulier dont les 4 sommets sont des atomes de la structure. Ils sont situés :

- Au centre d'un  $8^{\text{e}}$  de cube de la maille.



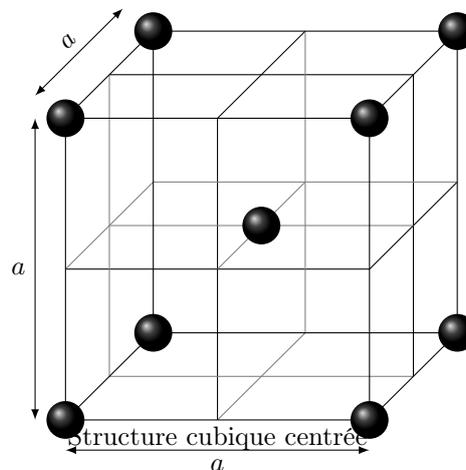
#### Propriété : Habitabilité d'un site tétraédrique

On cherche le rayon  $r_T$  d'une sphère dure de plus grande taille qu'on peut placer sur un site octaédrique en conservant la condition de tangence.

$$a\sqrt{3} = 4r + 4r_T \Rightarrow \frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = r + r_O \Rightarrow r_O = r \left( \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

#### Remarque :

Il existe également les structures cubiques centrées et hexagonales. La structure CFC est à connaître dans le programme mais les autres structures classiques peuvent être étudiée lors d'exercice de TD, de colle, de DS, de concours...



### 3 Les différentes familles de cristaux

#### Définition : Les cristaux métalliques

Les propriétés macroscopiques des métaux sont :

- bonne conductivité électrique et thermique ;
- ils se déforment facilement (ductible) ;
- réfléchissent la lumière ;

On peut faire des alliages en ajoutant d'autres éléments dans la structure.

D'un point de vue microscopique :

- La liaison métallique est forte ;
- elle est non directionnelle ;
- La faible électronégativité des métaux explique la conductivité.

**Remarque :**

La liaison est une liaison forte et non directionnelle, c'est-à-dire que la liaison d'un atome est aussi forte avec tous ses voisins.

La force de la liaison implique une température de fusion élevée des métaux :  $T_{fus} \sim 500 \text{ K}$  à  $1000 \text{ K}$ .

La non directionnalité de la liaison explique la malléabilité des métaux (aptitude à se déformer sans se rompre).

La faible électronégativité des métaux explique la bonne conductivité thermique et électrique.

**Definition : Cristal ionique**

Ils sont formés de 2 éléments ioniques et donc :

- la condition de tangence est entre un anion et un cation ;
- la coordinence d'un ion correspond au nombre de plus proche voisin de charge opposé.

La liaison ionique est forte et non directionnelle.

La force de la liaison implique une température de fusion élevée des métaux :  $T_{fus} \sim 500 \text{ K}$  à  $1000 \text{ K}$ .

La solubilité des cristaux dans les solvant polaire s'explique par la nature ionique des cristaux.

**Definition : Les cristaux covalents**

C'est un cristal où les atomes sont liés par des liaisons covalentes, celle-ci est :

- forte, ce qui donne des température de changement d'état élevé.
- directionnelle : la liaison ne peut pas se défaire puis se refaire avec un autre atome, ce qui explique la dureté.
- localisée : les électrons ne peuvent pas se déplacer, donc les cristaux sont de mauvais conducteurs.

**Exemple : NaCl(s)**

On considère une maille de chlorure de sodium où les ions  $\text{Na}^+$  forment une maille CFC et les ions  $\text{Cl}^-$  se situent au centre des sites octaédriques de la maille.

**Coordinence des ions :**

**Condition de tangence :**

**Exemple : Le carbone Diamant**

Les atomes de carbones dans le diamant forment un cristal covalent de type CFC avec un site tétraédrique sur deux occupé. C'est un CFC non compact.

**Coordinence :**

**Condition de tangence :**

**Compacité :**

# Cinquième partie

## Thermodynamique

### Liste des chapitres Thermodynamique

<b>1 Introduction à la thermodynamique</b>	<b>189</b>
1 Système thermodynamique . . . . .	189
2 Équilibre thermodynamique à l'échelle macroscopique . . . . .	190
3 Équilibre thermodynamique à l'échelle microscopique . . . . .	192
4 Énergie interne . . . . .	193
<b>2 Énergie échangées, transformations</b>	<b>195</b>
1 Transformation thermodynamique : . . . . .	195
2 Travail des forces . . . . .	196
3 Transfert thermique : . . . . .	197
4 Les différents types de transformations : . . . . .	197
5 Corps pur diphasé en équilibre thermodynamique . . . . .	200
<b>3 Le premier principe</b>	<b>203</b>
1 Premier principe : . . . . .	203
2 La fonction d'état enthalpie : . . . . .	206
3 Enthalpie de changement d'état . . . . .	207
<b>4 Le second principe</b>	<b>211</b>
1 Irréversibilité et entropie : . . . . .	211
2 Entropie d'un corps pur . . . . .	213
3 Application : . . . . .	214
<b>5 Machines thermiques</b>	<b>217</b>
1 Introduction aux machines thermiques . . . . .	217
2 Les moteurs dithermes . . . . .	218
3 Les machines frigorifiques dithermes . . . . .	219
4 Les pompes à chaleur dithermes . . . . .	220



## Thermodynamique 1 : Introduction à la thermodynamique

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>3.1. Descriptions microscopique et macroscopique d'un système à l'équilibre</b>	
Échelles microscopique, mésoscopique, et macroscopique. Libre parcours moyen.	Définir l'échelle mésoscopique et en expliquer la nécessité. Citer quelques ordres de grandeur de libres parcours moyens.
État microscopique et état macroscopique.	Préciser les paramètres nécessaires à la description d'un état microscopique et d'un état macroscopique sur un exemple.
Distribution des vitesses moléculaires d'un gaz (homogénéité et isotropie). Vitesse quadratique moyenne. Température cinétique. Exemple du gaz parfait monoatomique : $\mathcal{E}_c = 3/2kT$ .	Calculer l'ordre de grandeur d'une vitesse quadratique moyenne dans un gaz parfait.
Système thermodynamique.	Identifier un système ouvert, un système fermé, un système isolé.
État d'équilibre d'un système soumis aux seules forces de pression. Pression, température, volume, équation d'état. Grandeur extensive, grandeur intensive. Exemples du gaz parfait et d'une phase condensée indilatable et incompressible.	Calculer une pression à partir d'une condition d'équilibre mécanique. Déduire une température d'une condition d'équilibre thermique. Citer quelques ordres de grandeur de volumes molaires ou massiques dans les conditions usuelles de pression et de température. Citer et utiliser l'équation d'état des gaz parfaits.
Énergie interne d'un système. Capacité thermique à volume constant dans le cas du gaz parfait.	Exprimer l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique à partir de l'interprétation microscopique de la température. Exploiter la propriété $U_m = U_m(T)$ pour un gaz parfait.
Énergie interne et capacité thermique à volume constant d'une phase condensée considérée incompressible et indilatable.	Exploiter la propriété $U_m = U_m(T)$ pour une phase condensée incompressible et indilatable.
Approximation des phases condensées peu compressibles et peu dilatables.	Interpréter graphiquement la différence de compressibilité entre un liquide et un gaz à partir d'isothermes expérimentales.
Du gaz réel au gaz parfait.	Comparer le comportement d'un gaz réel au modèle du gaz parfait sur des réseaux d'isothermes expérimentales en coordonnées de Clapeyron ou d'Amagat.

## 1 Système thermodynamique

### Definition : Les différentes échelles de la matière

On distingue trois échelles de description de la matière :

- L'échelle microscopique : à l'échelle de l'atome ou de la molécule, la matière peut être vue comme un ensemble de particules d'une taille de l'ordre de  $1 \times 10^{-10}$  m. Les particules interagissent ensemble et ces interactions définissent la structure de la matière. La matière n'est pas continue à l'échelle microscopique.
- L'échelle macroscopique : de notre point de vue, la matière est continue, cette échelle est de l'ordre du mètre.
- L'échelle mésoscopique : échelle intermédiaire, la matière est considérée comme continue et on peut utiliser les variables d'état. L'échelle reste suffisamment petite pour qu'on puisse évaluer l'évolution spatiale des variables d'état (utile en mécanique des fluides).

### Definition : Phase solide

**Aspect macroscopique** : matière qui ne change ni de volume ni de forme.

**Aspect microscopique** : les particules sont ordonnées suivant un réseau. La distance entre deux particules est de l'ordre de la taille de la particule.

### Definition : Phase liquide

**Aspect macroscopique** : matière qui ne change pas de volume mais change de forme.

**Aspect microscopique** : les particules sont non ordonnées mais très proches. On a un ordre de courte portée, c'est-à-

dire qu'elles sont ordonnées sur une courte distance. La distance entre deux particules est de l'ordre de la taille de la particule.

#### Definition : Phase gazeuse

**Aspect macroscopique** : matière qui change de volume et de forme.

**Aspect microscopique** : les particules sont éloignées les unes des autres, leurs positions sont aléatoires. la distance entre deux particules est plus grande que la taille de la particule.

#### Remarque :

les phases solide et liquide sont 1000 fois plus denses que la phase gazeuse. On a alors  $\rho_{\text{liquide}} \sim 1000\rho_{\text{gaz}}$  et  $\rho_{\text{liquide}} \sim \rho_{\text{solide}}$ .

Donc :

- la phase solide et la phase liquide sont appelées phases condensées.
- le liquide et le gaz peuvent changer de forme donc peuvent s'écouler.
- la phase liquide et la phase gazeuse sont appelées phases fluides.

#### Definition : Système thermodynamique

On appelle système thermodynamique tout système constitué d'un très grand nombre de particules microscopiques ( $N \gg N_A$ ).

On appelle choisir un système le fait d'étudier un système. Le système est alors séparé de l'extérieur.

La surface fermée qui délimite le système est appelée surface de contrôle. L'intérieur de la surface de contrôle fait partie du système. L'extérieur de la surface de contrôle fait partie de l'extérieur.

- On appelle système fermé un système qui n'échange pas de matière avec l'extérieur.
- On appelle système isolé un système qui n'échange pas d'énergie avec l'extérieur.
- On appelle système ouvert un système qui échange de la matière avec l'extérieur.

## 2 Équilibre thermodynamique à l'échelle macroscopique

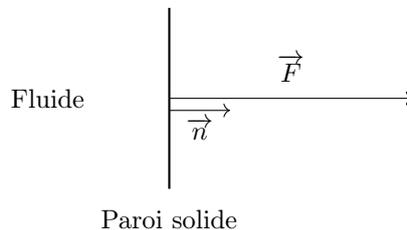
#### Definition : Équilibre thermodynamique

Un système est dit en équilibre macroscopique si, à la fois :

- toutes les variables d'état sont définies et constantes au cours du temps ;
- il n'échange ni énergie ni matière avec l'extérieur à l'échelle macroscopique.

#### Definition : La pression

Considérons un fluide en contact avec une paroi solide de surface  $S$ .



Une force  $\vec{F}$  s'exerce alors du fluide vers la paroi. Elle est orthogonale à la paroi et orientée vers l'extérieur. Elle est proportionnelle à la surface  $S$  de la paroi. On définit la pression  $P$  comme :

$$\vec{F} = PS\vec{n}$$

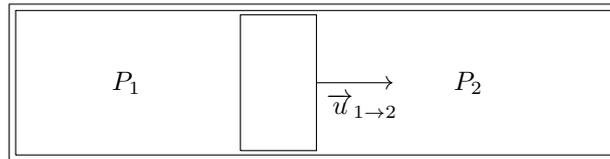
où  $P$  est la pression du fluide et  $\vec{n}$  le vecteur orthogonal à la paroi dirigée vers le solide.

#### Remarque : Unité

Le pascal noté Pa. On a l'équivalence  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ . On utilise également le bar avec l'équivalence  $1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$ .

**Propriété : Équilibre mécanique**

On considère un système isolé composé de deux chambres. Les deux chambres sont séparées par une paroi mobile. Le fluide contenu dans la chambre 1 à la pression  $P_1$  exerce une force  $\vec{F}_1$  sur la partie mobile. Le fluide contenu dans la chambre 2 à la pression  $P_2$  exerce une force  $\vec{F}_2$  sur la partie mobile.



Soit  $\vec{F}_1 = P_1 S \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$  et  $\vec{F}_2 = P_2 S \vec{u}_{2 \rightarrow 1}$ . On applique les conditions d'équilibre mécanique sur la partie mobile et on obtient :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \iff P_1 S \vec{u}_{1 \rightarrow 2} + P_2 S \vec{u}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0} \iff \boxed{P_1 = P_2}$$

Si l'on choisit cette fois le fluide contenu dans la chambre 1, on a  $P_1 = P$  et le fluide contenu dans la chambre 2 correspond à l'extérieur. On a alors  $P_2 = P_{ext}$ .

L'équilibre mécanique impose :  $\boxed{P = P_{ext}}$

**Definition : Équilibre thermique**

La condition d'équilibre thermique impose l'égalité de température dans tout le système. Elle impose aussi l'égalité entre la température du système et la température extérieure. On a alors :

$$\boxed{T = T_{ext}}$$

**Definition : Équation d'état**

On appelle équation d'état une relation entre les variables d'état à l'équilibre. Dans le cas d'un corps pur sous une phase on a :

$$f(T, V, P, n) = 0 \quad \text{ou} \quad f(T, V_m, P) = 0$$

**Definition : Modèle du gaz parfait**

Le gaz parfait est un gaz théorique idéal composé de particules dont on fait les hypothèses suivantes :

- Particules ponctuelles ( $V_{part} = 0$ ) ;
- Pas d'interactions entre particules (pas de collisions, pas de répulsions, pas d'attraction).

Ce modèle correspond à peu près à la réalité si les molécules du gaz sont très éloignées les unes des autres, c'est-à-dire si le volume molaire du gaz  $V_m$  tend vers l'infini.

L'équation d'état du gaz parfait s'écrit :  $\boxed{PV = nRT}$  avec  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  la constante des gaz parfaits.

**Remarque : Ordre de grandeur**

On trouve dans les conditions normales de température et pression (CNTP) avec  $T = 273,15 \text{ K}$  et  $P = 1,0133 \times 10^5 \text{ Pa}$  :

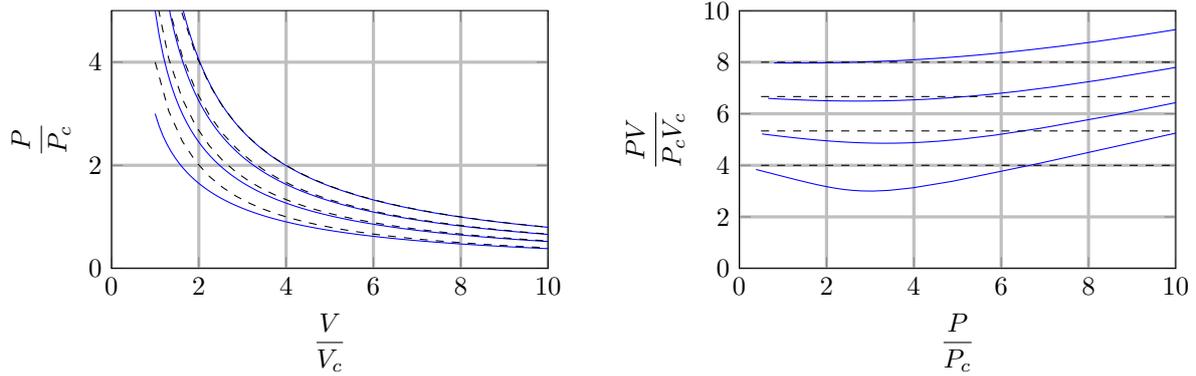
$$V_m = 22,41 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} = 22,41 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$$

**Definition : Limite du modèle du gaz parfait**

Le modèle possède plusieurs limites :

- $V_{part} \neq 0$  donc si  $V \rightarrow 0$  le modèle ne peut pas décrire la réalité.
- Les interactions existent (collisions, attraction) donc si  $\frac{n}{V}$  est grand alors on sort du modèle.

On trace des courbes d'isothermes (pour  $T = C^{te}$ ) dans le diagramme de Clapeyron ( $P = f(V)$ ) et le diagramme d'Amagat ( $PV = f(P)$ ) avec un modèle de gaz réel :



On voit que le modèle du gaz parfait est valable pour de grandes températures, et pour de faibles pressions.

#### Definition : Modèle de la phase condensée idéale

Une phase condensée idéale est supposée incompressible, c'est-à-dire que son volume ne varie pas peu importe la valeur de la pression du fluide et de la température. On en déduit alors l'équation d'état :

$$V = nV_m \quad \text{ou} \quad m = \rho V$$

#### Remarque : Ordre de grandeur

On trouve pour l'eau :

$$V_m = \frac{M_{\text{eau}}}{\rho_{\text{eau}}} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} = 1,8 \times 10^{-2} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$$

### 3 Équilibre thermodynamique à l'échelle microscopique

#### Definition : Agitation thermique

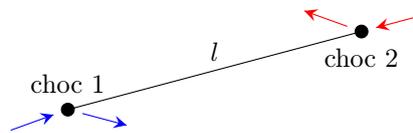
Les particules microscopiques sont constamment en mouvement, même lorsque la matière est immobile à l'échelle macroscopique. On parle d'agitation thermique.

Pour un solide les particules vibrent autour de leurs positions d'équilibre.

Pour un liquide ou un gaz les particules se déplacent en s'entrechoquant continuellement.

#### Propriété : Libre parcours moyen

Pour caractériser l'agitation thermique on calcule le libre parcours moyen soit la distance  $l$  moyenne parcourue par une particule entre deux chocs.



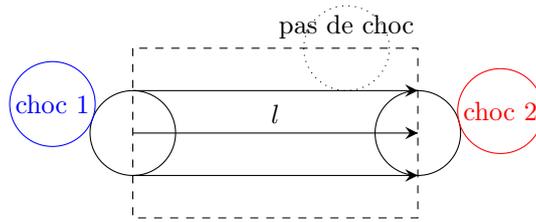
#### Propriété : Ordre de grandeur du libre parcours moyen

Dans un fluide composé de  $N$  particules de diamètre  $d$  occupant un volume  $V$  on calcule le volume moyen occupé par particule :

$$V_{\text{part}} = \frac{V}{N} = \frac{V_m}{\mathcal{N}_A}$$

Une particule de diamètre  $d$  effectuant une trajectoire rectiligne de longueur  $l$  ne rencontre aucune particule sur cette trajectoire. Alors le volume du cylindre de rayon  $d$  et de hauteur  $l$  ne contient en moyenne qu'une seule particule. On en déduit :

$$\pi d^2 l = V_{\text{part}} = \frac{V_m}{\mathcal{N}_A} \implies l = \frac{V_m}{\pi d^2 \mathcal{N}_A}$$



Avec  $d \simeq 3 \times 10^{-10}$  m, on a alors :

- pour un gaz  $V_m = \frac{RT}{P} \simeq 25 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$  soit  $l \sim 10^{-7}$  m ;
- pour un liquide ( $\text{H}_2\text{O}$ )  $V_m = \frac{M}{\rho} \sim 10 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$  soit  $l \sim 10^{-10}$  m.

**Definition : La température cinétique**

La température  $T$  est une grandeur qui mesure l'énergie cinétique du mouvement d'agitation thermique des particules microscopiques.

Dans un gaz parfait monoatomique (c'est-à-dire dont les molécules ne comportent qu'un seul atome) l'énergie cinétique moyenne d'une molécule est :

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

où  $k_B = 1,38066 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  est la constante de Boltzmann. La température  $T$  se mesure en kelvin, de symbole K.

**Definition : Distribution des vitesses d'un gaz**

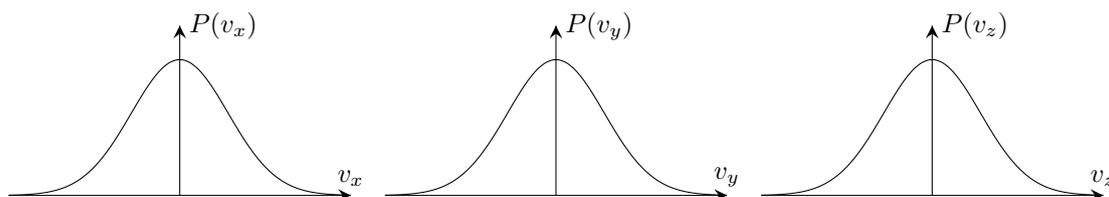
On considère un gaz immobile à l'échelle macroscopique. Le système est composé de  $N$  molécules chacune possédant une vitesse  $\vec{v}_i$ . On s'intéresse à la distribution des vitesses du gaz, on suppose :

- la distribution **homogène** : la probabilité pour une molécule d'avoir une vitesse donnée est indépendante de la position de la particule.
- la distribution est **isotrope** : la probabilité est la même pour deux vitesses de même norme mais de directions différentes (il n'y a pas de direction privilégiée).

**Propriété : Vitesse moyenne**

En raison de l'isotropie de la distribution on a :  $\langle \vec{v}_i \rangle = \vec{0}$

Ce qui implique que toutes les composantes du vecteur vitesse sont en moyenne nulle :  $\langle v_x \rangle = 0$ ,  $\langle v_y \rangle = 0$  et  $\langle v_z \rangle = 0$

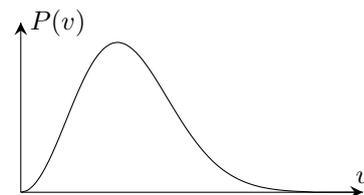


**Propriété : Vitesse quadratique moyenne**

La vitesse quadratique moyenne  $u$  est par définition la racine carrée de la valeur moyenne du carré des vitesses, soit :  $u = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$

Pour un gaz parfait monoatomique on a :

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T$$



## 4 Énergie interne

**Definition : Énergie interne**

On définit l'énergie interne  $U$  d'un système thermodynamique comme l'énergie totale des particules qui composent le système.

$$U = \Sigma (E_{C,i} + E_{P,i})$$

L'énergie interne est une fonction additive (extensive).

### Definition : Capacité thermique à volume constant

On appelle capacité thermique à volume constant, noté  $C_V$ , la dérivée partielle de l'énergie interne  $U$  par rapport à la température, en conservant le volume constant :

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad C_V \text{ s'exprime en } \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$$

La capacité thermique à volume constant  $C_V$  est une grandeur extensive et additive. On définit alors :

- Pour les gaz : la capacité thermique molaire à volume constant  $C_{Vm} = \frac{C_V}{n}$  exprimée en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
- Pour les phases condensées : la capacité thermique massique à volume constant  $c_V = \frac{C_V}{m}$  exprimée en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

### Propriété : Capacité thermique à volume constant d'un gaz parfait monoatomique

Pour un gaz parfait monoatomique on admet que :  $U = \frac{3}{2}nRT$  on a alors  $dU = \frac{3}{2}nRdT$

Exemple de gaz monoatomique :  $H_e$

On a alors  $C_V = \frac{3}{2}nR$  et  $C_{Vm} = \frac{3}{2}R$ . On peut alors définir l'énergie interne molaire :  $U_m = \frac{U}{n}$ .

### Première loi de Joule

Les gaz parfaits vérifient la première loi de Joule :

$$U_m = U_m(T) \quad \text{L'énergie interne molaire ne dépend que de la température.}$$

On a alors :  $C_{Vm} = \frac{dU_m}{dT}$

### Propriété : Variation d'énergie interne d'un gaz parfait

On considère un système thermodynamique  $\Sigma$  qui passe d'un état d'équilibre à la température  $T_1$  à un autre état d'équilibre à la température  $T_2$ . Comme pour un gaz parfait l'énergie interne ne dépend que de  $T$  et de  $n$ , pour un système fermé on a :

Si on considère maintenant que  $C_V$  est indépendant de  $T$  alors on obtient :  $\Delta U = C_V \Delta T$ .

### Propriété : Capacité thermique à volume constant d'une phase condensée idéale

L'énergie interne d'une phase condensée incompressible ne dépend que de  $n$  et  $T$ . On a alors l'énergie interne molaire qui ne dépend que de  $T$  :

$$U_m = U_m(T) \quad \text{l'énergie interne molaire.}$$

La capacité thermique molaire à volume constant est donc :  $C_{Vm} = \frac{dU_m}{dT}$ . On utilise beaucoup l'énergie interne massique  $u(T)$  avec  $c_V = \frac{du}{dT}$ .

### Propriété : Variation d'énergie interne d'une phase condensée idéale

On considère un système thermodynamique  $\Sigma$  qui passe d'un état d'équilibre à la température  $T_1$  à un autre état d'équilibre à la température  $T_2$ .

Si on considère maintenant que  $C_V$  est indépendant de  $T$  alors on obtient :  $\Delta U = C_V \Delta T$ .

## Thermodynamique 2 : Énergie échangées, transformations

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>3.1. Descriptions microscopique et macroscopique d'un système à l'équilibre</b>	
Corps pur diphasé en équilibre. Diagramme de phases $(P, T)$ . Cas de l'équilibre liquide-vapeur : diagramme de Clapeyron $(P, v)$ , titre en vapeur.	Analyser un diagramme de phase expérimental $(P, T)$ . Proposer un jeu de variables d'état suffisant pour caractériser l'état d'équilibre d'un corps pur diphasé soumis aux seules forces de pression. Positionner les phases dans les diagrammes $(P, T)$ et $(P, v)$ . Déterminer la composition d'un mélange diphasé en un point d'un diagramme $(P, v)$ .
État microscopique et état macroscopique.	Préciser les paramètres nécessaires à la description d'un état microscopique et d'un état macroscopique sur un exemple.
<b>3.2. Énergie échangée par un système au cours d'une transformation</b>	
Transformation thermodynamique subie par un système. Évolutions isochore, isotherme, isobare, monobare, monotherme.	Définir un système adapté à une problématique donnée. Exploiter les conditions imposées par le milieu extérieur pour déterminer l'état d'équilibre final.
Travail des forces de pression. Transformations isochore, monobare.	Évaluer un travail par découpage en travaux élémentaires et sommation sur un chemin donné dans le cas d'une seule variable. Interpréter géométriquement le travail des forces de pression dans un diagramme de Clapeyron.
Transferts thermiques. Transformation adiabatique. Thermostat, transformations monotherme et isotherme.	Distinguer qualitativement les trois types de transferts thermiques : conduction, convection et rayonnement. Identifier dans une situation expérimentale le ou les systèmes modélisables par un thermostat.

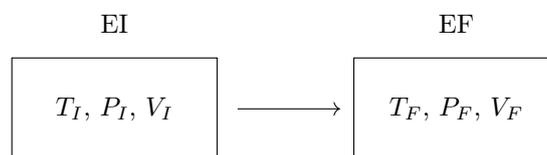
### 1 Transformation thermodynamique :

#### Definition : Transformation thermodynamique

On appelle transformation thermodynamique le passage d'un système thermodynamique d'un état d'équilibre initial (EI) à un état d'équilibre appelé état final (EF). La transformation est causée par une rupture de l'équilibre initial en modifiant une ou des contraintes extérieures (Soit par un changement de la pression extérieure, ou bien de la température extérieure).

L'état d'équilibre initial est décrit à l'aide des variables d'états, elles ont pour valeurs  $(T_I, P_I, V_I)$ .

L'état d'équilibre final est décrit à l'aide des variables d'états, elles ont pour valeurs  $(T_F, P_F, V_F)$



#### Propriété : Variation d'une fonction d'état au cours d'une transformation

Lors d'une transformation, la variation d'une fonction d'état  $X$  se note  $\Delta X_{i \rightarrow f}$ . On calcul  $\Delta X_{i \rightarrow f}$  en faisant la différence entre  $X_f$  et  $X_i$ . On a alors :

$$\Delta X_{i \rightarrow f} = X_f - X_i$$

#### Remarque :

Si les deux état d'équilibres sont infiniment proche, alors on peut considérer une variation élémentaire des variables d'états tel que :

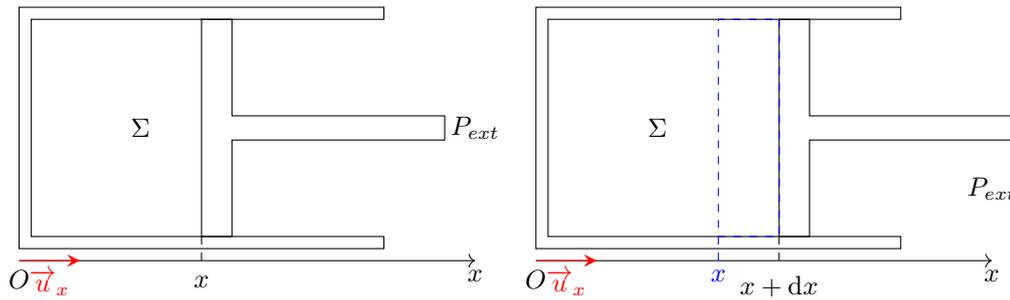
$$dX = X_f - X_i$$

où  $dX$  est la différentielle de  $X$ .

## 2 Travail des forces

### Definition : Travail des forces de pression

On considère un fluide contenu dans un cylindre indéformable fermé par un piston mobile de surface  $S$ .



Système : { fluide + piston }

$$\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \text{piston}} = -P_{\text{ext}} S \vec{u}_x$$

Soit  $d\vec{l} = dx \vec{u}_x$  le déplacement élémentaire du piston. On calcule alors le travail élémentaire de la force :

$$\delta W_p = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow \text{piston}} \cdot d\vec{l} = -P_{\text{ext}} S dx = -P_{\text{ext}} dV \quad \text{car } S dx = dV$$

On a alors le travail élémentaire reçu par la fluide :

$$\boxed{\delta W_p = -P_{\text{ext}} dV} \quad \text{exprimé en joules noté J}$$

### Remarque :

Les échanges d'énergies sont toujours exprimés en valeur algébrique : ils sont positifs lorsque le système choisi reçoit de l'énergie et négatifs lorsqu'il en cède.

$\delta W \neq dW$  :  $W$  n'est pas une fonction d'état. Ce n'est pas une caractéristique du fluide, c'est un transfert d'énergie reçu par le fluide. On ne peut pas calculer sa différentielle.

### Propriété : Travail des forces de pression lors d'une transformation

Lors d'une transformation thermodynamique entre un état initial  $i$  et un état final  $f$  on calcule le travail reçu par le système :

$$\boxed{W_p = - \int_i^f P_{\text{ext}} dV} \quad W_p = \int_i^f \delta W_p$$

### Remarque : Différence entre $\delta W$ et $dX$

- $\Delta X$  ou  $dX$  représente une variation d'une fonction d'état et ne dépend que de l'état initial et de l'état final. Une fonction d'état  $X$  ne dépend que des variables d'états.
- $W$  ou  $\delta W$  représente un transfert d'énergie, ce n'est pas une fonction d'état. Il représente le travail reçu par le système entre l'état initial et l'état final.  $W$  dépend donc de la transformation entre l'état initial et l'état final.
- La pression extérieure est une contrainte externe, elle n'est pas forcément constante et son évolution sera décrite dans les énoncés des exercices.

### Propriété : Représentation dans un diagramme de Clapeyron

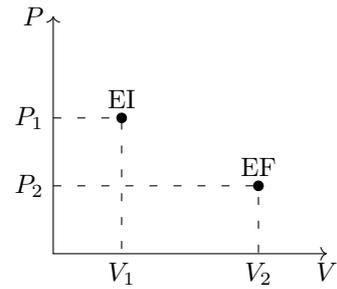
Le diagramme de Clapeyron est le diagramme  $(P, V)$  :

- La pression  $P$  est l'ordonnée,
- Le volume  $V$  est l'abscisse.

Pour un état initial (EI) de coordonnée  $(P_1, V_1)$  et un état final (EF) de coordonnée  $(P_2, V_2)$ . On représente dans le diagramme de Clapeyron :

On a  $\Delta X_{1 \rightarrow 2}$  qui ne dépend que des coordonnées de (EI) et (EF).

On a  $W$  qui dépend de la trajectoire entre (EI) et (EF).



#### Remarque :

Lors d'une transformation, on appelle le travail  $W$  le travail total de l'ensemble des forces qui s'exercent sur  $\Sigma$ . On appelle  $W_p$  le travail des forces de pressions, et on définit  $W_u$  le travail dit utile qui est :

$$W_u = W - W_p$$

le travail des forces autres que les forces de pressions.

### 3 Transfert thermique :

#### Definition : Transfert thermique

Un système thermodynamique  $\Sigma$  peut recevoir de l'énergie sans l'intervention d'une action mécanique mesurable.

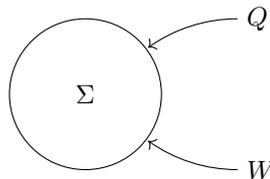
Ce transfert d'énergie complémentaire du travail s'appelle transfert thermique noté  $Q$  et s'exprime en joule noté J.

Il existe trois mode de transfert thermique :

- La conduction thermique : transfert par collisions.
- La convection thermique : fluide en mouvement.
- Le rayonnement thermique : émission d'ondes.

#### Remarque :

- Comme  $W$ , on calcul  $Q$  comme le transfert thermique reçu par  $\Sigma$  :



- Comme  $W$ , le transfert thermique n'est pas une fonction d'état. On note alors  $\delta Q$  le transfert thermique élémentaire.
- Par convention, on a  $W$  et  $Q$  qui sont négatif si l'énergie du système  $\Sigma$  est perdue, et positif si l'énergie est reçue.

### 4 Les différents types de transformations :

#### Definition : Transformation irréversible

Une transformation où seuls l'état initial et l'état final sont des états d'équilibre est une transformation irréversible.

Causes de l'irréversibilité au choix :

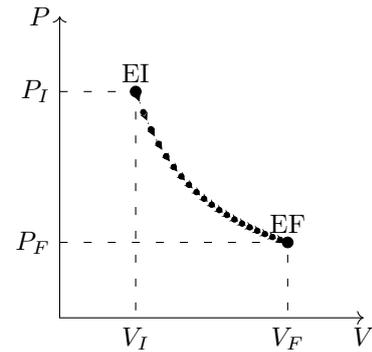
- la présence de frottements,
- la présence de transferts thermique,
- l'inhomogénéité de  $n, P, T$ ,
- la présence de réaction chimiques.

Une transformation irréversible n'est pas invariante par renversement du temps.

#### Definition : Transformation quasi-statique

Une transformation quasi-statique est constituée par une suite d'états d'équilibre infiniment voisins. Pratiquement, c'est une transformation lente.

EI → E1 → E2 → E3 → E4 → ... → Ei → ... → EF



**Definition : Transformation réversible**

Une transformation est réversible si elle est quasi-statique et si, à chaque instant de la transformation, il y a équilibre entre le système étudié et le milieu extérieur avec lequel il interagit. Pour qu'une transformation soit réversible, il ne faut aucunes causes d'irréversibilité.

**Rappel :** Un état d'équilibre thermodynamique est un état dans lequel les variables d'états  $P$  et  $T$  sont à l'équilibre avec le milieu extérieur. On a alors  $T = T_{ext}$  et  $P = P_{ext}$ .

**Propriété : Transformation isochore**

Une transformation est isochore quand le volume du système est constant au cours de la transformation.

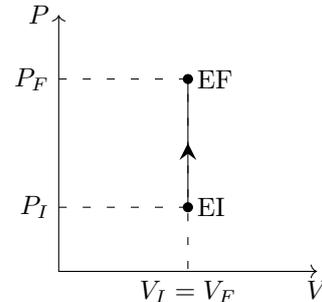
On a alors :  $V_I = V_F$ .

Dans le diagramme de Clapeyron une transformation isochore a pour trajectoire un segment vertical :

On a alors le travail des forces de pression :  $\delta W = -P_{ext}dV = 0 J$

Les transformations sont isochore pour :

- une phase condensée idéale (incompressible).
- un gaz dans une enceinte rigide (indéformable).



**Propriété : Transformation monobare**

Une transformation est monobare lorsque la pression extérieur est constante au cours de la transformation. On a alors  $P_{ext} = C^{te} = P_F$ . Une transformation monobare est quelconque, elle peut être irréversible, quasi-statique ou même réversible.

Si la transformation est monobare et irréversible non quasi-statique, on peut très bien avoir  $P_{ext} \neq P_I$ . L'état initial étant un état d'équilibre rompu.

Dans le cas d'une transformation monobare on a :

$$W_p = -P_{ext}\Delta V = -P_F(V_F - V_I)$$

**Propriété : Transformation isobare**

Dans le cas d'une transformation monobare où la pression est définie à chaque instant et est en équilibre avec l'extérieur (quasi-statique) on a :

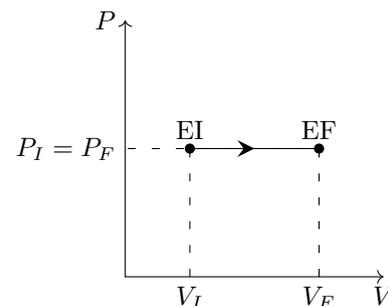
$$P_I = P(t) = P_F = P_{ext} \forall t$$

Dans ce cas on peut représenter la trajectoire de la transformation dans le diagramme de Clapeyron :

On a toujours :

$$W = -P_{ext}(V_F - V_I) = -P_{ext}V_F + P_{ext}V_I = -P_FV_F + P_IV_I = -\Delta(PV)$$

Les transformations isobares sont des transformations lentes avec une paroi mobile.



**Propriété : Transformation monotherme**

Une transformation est monotherme lorsque la température extérieure est constante au cours de la transformation. On a alors  $T_{ext} = C^{te} = T_F$ . Une transformation monotherme est quelconque, elle peut être irréversible, quasi-statique ou même réversible.

Si la transformation est monotherme et irréversible non quasi-statique, on peut très bien avoir  $T_{ext} \neq T_I$ . L'état initial étant un état d'équilibre rompu.

**Definition : Thermostat**

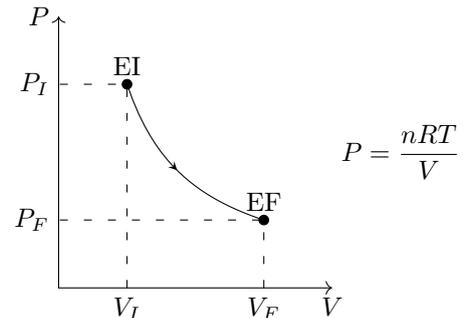
Lors que la température extérieure est constante au cours de la transformation, on dit alors que le système est en contact avec un thermostat. On définit un thermostat comme un système thermodynamique de température constante.

**Propriété : Transformation isotherme**

Dans le cas d'une transformation monotherme où la température est définie à chaque instant et est en équilibre avec l'extérieur (quasi-statique) on a :

$$T_I = T(t) = T_F = T_{ext} \forall t$$

Dans ce cas on peut représenter la trajectoire de la transformation isotherme d'un gaz parfait dans le diagramme de Clapeyron :  
Les transformations isothermes sont des transformations lentes avec une paroi diatherme.



Pour une transformation isotherme et quasi-statique d'un gaz parfait on a en permanence  $P = P_{ext}$ . On peut alors calculer le travail reçu par le gaz parfait :  $W_p = \int_I^F -P_{ext}dV$

$$W_p = \int_{V_I}^{V_F} -PdV = -nRT \int_{V_I}^{V_F} \frac{1}{V}dV = -nRT \ln \frac{V_F}{V_I} = nRT \ln \frac{P_F}{P_I}$$

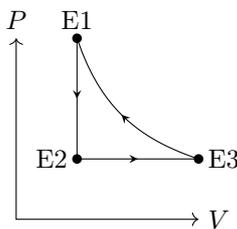
**Propriété : Transformation cyclique**

Lors d'une succession de différentes transformations, si l'état final de la dernière transformation correspond à l'état initial de la première transformation, on a alors une transformation cyclique.

On a alors pour toutes les variables d'état  $X$  du systèmes  $\Sigma$  :  $\Delta X_{cycle} = 0$ .

On peut avoir une variation des variables d'état au cours du cycle, mais dans l'état final, elles sont égales à leurs valeurs dans l'état initial.

$$\Delta X_{1 \rightarrow 2} + \Delta X_{2 \rightarrow 3} + \Delta X_{3 \rightarrow 1} = (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) + (X_1 - X_3) = 0$$



Exemple avec trois transformations :  $E1 \rightarrow E2 \rightarrow E3 \rightarrow E1$

**Propriété : transformation adiabatique**

Lors d'une transformation adiabatique le système n'échange aucun transfert thermique :  $Q = 0$  J.

Une transformation est adiabatique si :

- les parois du système sont imperméable aux transferts thermiques (parois calorifugées), alors  $Q = 0$  J.
- la transformation est brutale si le temps de la transformation est petit devant le temps caractéristique des échanges thermiques, alors on peut considérer que  $Q = 0$  J.

**Propriété : Loi de Laplace**

On peut appliquer la loi de Laplace si et seulement si :

- Le système est un gaz parfait.
- La transformation est réversible.

- La transformation est adiabatique.

On a alors la conservation de :

$$PV^\gamma = C^{te} \iff TV^{\gamma-1} = C^{te} \iff T^\gamma P^{1-\gamma} = C^{te}$$

avec  $\gamma > 1$  un coefficient qu'on suppose indépendant de la température et qui dépend de la nature du gaz.

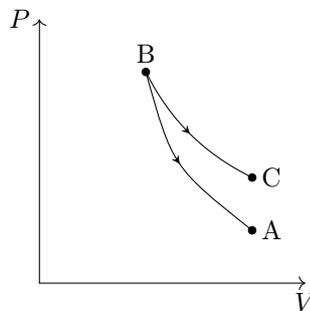
On peut alors calculer la travail des forces de pressions :

$$W = \int_I^F -P_{ext}dV = \int_{V_I}^{V_F} -PdV \quad \text{or } PV^\gamma = P_I V_I^\gamma$$

$$W = - \int_{V_I}^{V_F} \frac{P_I V_I^\gamma}{V^\gamma} dV = -P_I V_I^\gamma \int_{V_I}^{V_F} \frac{1}{V^\gamma} dV = -\frac{P_I V_I^\gamma}{1-\gamma} (V_F^{1-\gamma} - V_I^{1-\gamma})$$

$$W = \frac{1}{\gamma-1} (P_F V_F - P_I V_I) = \frac{nR}{\gamma-1} (T_F - T_I)$$

Si on compare dans le diagramme de Clapeyron une transformation isotherme  $BC$  quasi-statique et une transformation  $BA$  adiabatique réversible on a :



Isotherme quasi-statique :  $P = \frac{P_B V_B}{V}$

Adiabatique réversible :  $P = \frac{P_B V_B^\gamma}{V^\gamma}$

## 5 Corps pur diphasé en équilibre thermodynamique

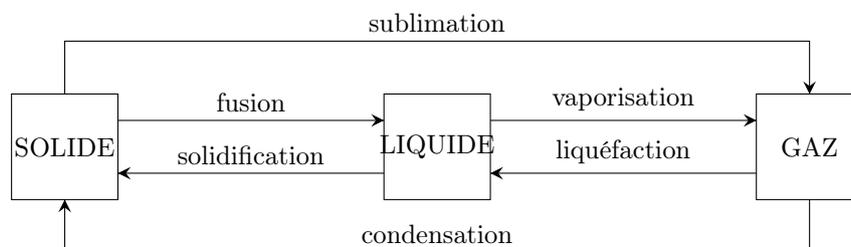
### Definition : Corps pur

Un système thermodynamique composé d'un seul type de particule. Ce système est décrit par un nombre limité de paramètre d'état à l'équilibre :

- $T$ ,  $V_m$  et  $P$  sous une phase.
- $T$ ,  $P$ ,  $\nu$  et  $x$  sous deux phases avec  $x$  la fraction massique du corps pur sous une phase donnée.

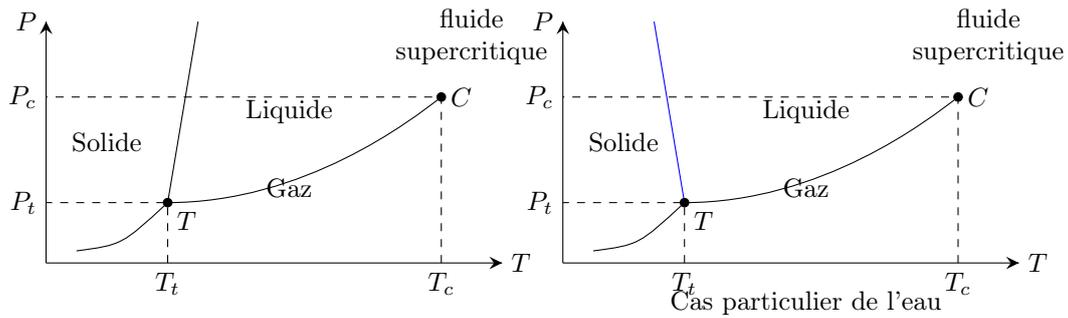
### Definition : Changement d'état physique

Lorsque la matière évolue d'un état physique à un autre, elle existe sous deux phases différentes et on parle de corps pur diphasé. On dit qu'il y a changement d'état.



### Definition : Diagramme de phases ( $P, T$ )

Pour chaque corps pur on établit expérimentalement des diagrammes de phases qui indiquent sous quelle phase physique ce corps se présente suivant les valeurs de certains paramètres d'état. Le diagramme le plus simple est le diagramme ( $P, T$ ) sur lequel on a la pression en ordonnée et la température en abscisse.



### Propriété : Condition d'équilibre entre deux phases

Dans le diagramme  $(P, T)$  deux phases ne coexistent que sur la courbe qui est à la frontière entre les deux phases. On obtient donc la condition d'équilibre suivante :

$$P = P_{I-II}(T)$$

### Definition : Point triple

Le point triple est le point du diagramme de phase  $(P, T)$  de coordonnées  $(P_t, T_t)$  où les phases solide, liquide et gazeuse coexistent à l'équilibre. Soit

$$P_t = P_{S-L}(T_t) = P_{L-G}(T_t) = P_{S-G}(T_t)$$

### Definition : Point critique

Le point critique  $C$  est le point du diagramme de phase au delà duquel le changement d'état liquide-gaz n'est plus observable. On parle alors de fluide hypercritique ou supercritique.

### Definition : Pression de vapeur saturante

Pour une température donnée, la pression de vapeur saturante d'un corps pur est la pression d'équilibre entre une phase condensée, liquide ou solide et la phase gazeuse.

### Propriété : Changement d'état quasi-statique et monobare

Lors d'un changement d'état quasi-statique et monobare :

- La pression est constante car l'équilibre mécanique avec la pression extérieure est assuré par la lenteur de la transformation ;
- La température est constante tant que l'équilibre entre les deux phases est maintenu ;

### Definition : Point triple

Le point triple est le point du diagramme de phase  $(P, T)$  de coordonnées  $(P_t, T_t)$  où les phases solide, liquide et gazeuse coexistent à l'équilibre. Soit

$$P_t = P_{S-L}(T_t) = P_{L-G}(T_t) = P_{S-G}(T_t)$$

### Definition : Point critique

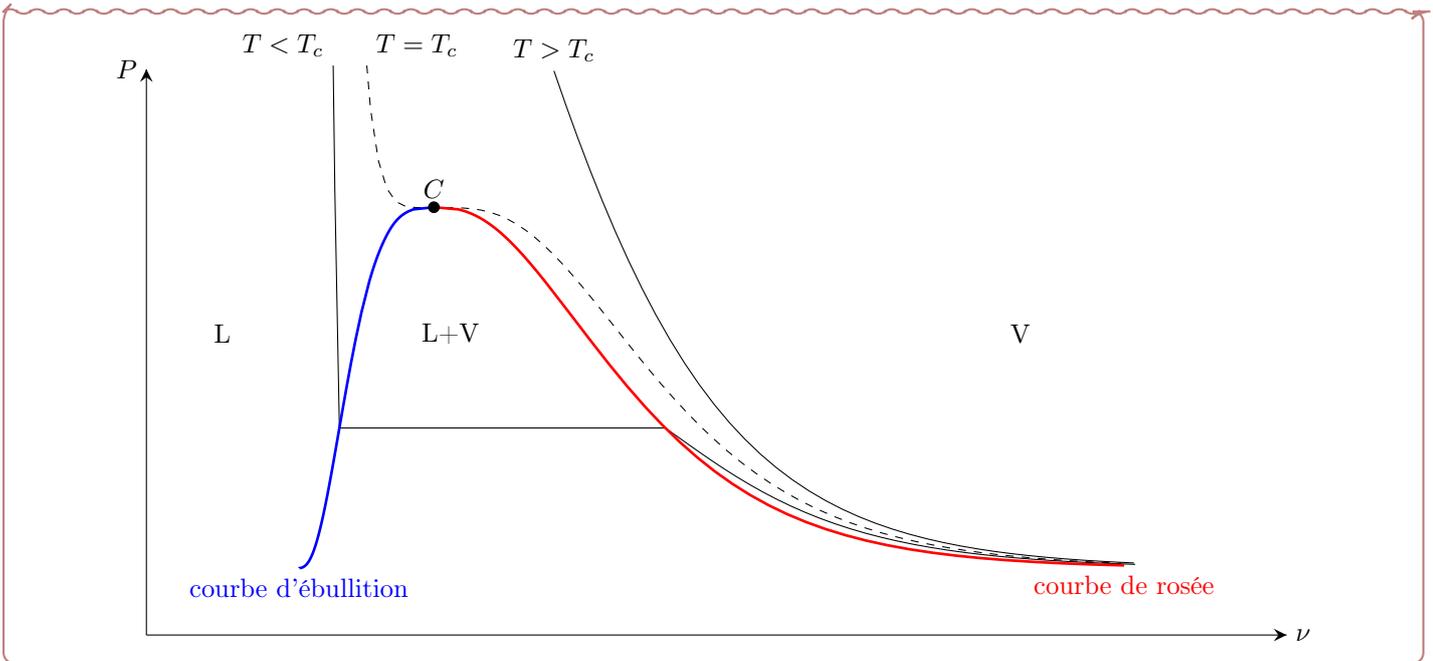
Le point critique  $C$  est le point du diagramme de phase au delà duquel le changement d'état liquide-gaz n'est plus observable. On parle alors de fluide hypercritique ou supercritique.

### Definition : Pression de vapeur saturante

Pour une température donnée, la pression de vapeur saturante d'un corps pur est la pression d'équilibre entre une phase condensée, liquide ou solide et la phase gazeuse.

### Definition : Diagramme de Clapeyron $(P, \nu)$

On choisit de représenter l'équilibre liquide-gaz dans un diagramme de Clapeyron  $P = f(\nu)$  avec  $\nu = \frac{V}{m}$  le volume massique.



**Definition : Courbes de saturation**

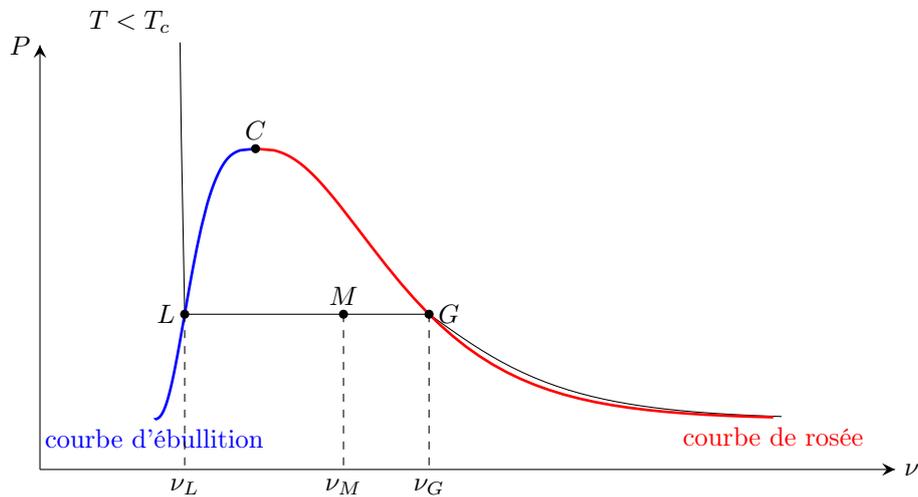
On appelle courbe d'ébullition la frontière qui sépare le domaine du liquide et celui de l'équilibre liquide + vapeur. C'est la courbe où apparaissent les premières bulles.

On appelle courbe de rosée la frontière séparant le domaine de la vapeur et celui de l'équilibre liquide + vapeur. C'est la courbe où apparaissent les premières gouttes.

Les deux courbes se rejoignent au point critique.

**Propriété : Déterminer la composition d'un système diphasé**

Soit  $M$  un point du diagramme de Clapeyron appartenant au domaine des équilibres diphasés d'abscisse  $\nu_M$ .



On définit le titre massique en gaz du mélange liquide-gaz :  $x = \frac{m_G}{m}$  et  $1 - x = \frac{m_L}{m}$

Par conservation du volume on a :  $V = V_G + V_L$

Par définition du volume massique aux points  $M$ ,  $L$  et  $G$  :

$$\nu_M = \frac{V}{m} \quad \nu_L = \frac{V_L}{m_L} \quad \nu_G = \frac{V_G}{m_G}$$

On obtient alors l'équation :

$$\nu_M = \frac{V}{m} = \frac{V_G + V_L}{m} = \frac{m_G \nu_G + m_L \nu_L}{m} = x \nu_G + (1 - x) \nu_L$$

On en déduit alors :

$$x = \frac{\nu_M - \nu_L}{\nu_G - \nu_L} = \frac{LM}{LG}$$

Qu'on appelle théorème des moments.

## Thermodynamique 3 : Le premier principe

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>3.3. Premier principe. Bilans d'énergie</b>	
Premier principe de la thermodynamique.	Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan énergétique faisant intervenir travail et transfert thermique. Utiliser le premier principe de la thermodynamique entre deux états voisins. Exploiter l'extensivité de l'énergie interne. Distinguer le statut de la variation de l'énergie interne du statut des termes d'échange. Calculer le transfert thermique sur un chemin donné connaissant le travail et la variation de l'énergie interne.
Enthalpie d'un système. Capacité thermique à pression constante dans le cas du gaz parfait et d'une phase condensée incompressible et indilatable.	Exprimer le premier principe sous forme de bilan d'enthalpie dans le cas d'une transformation monobare avec équilibre mécanique dans l'état initial et dans l'état final. Exprimer l'enthalpie $H_m(T)$ du gaz parfait à partir de l'énergie interne. Justifier que l'enthalpie $H_m$ d'une phase condensée peu compressible et peu dilatable peut être considérée comme une fonction de l'unique variable T. Citer l'ordre de grandeur de la capacité thermique massique de l'eau liquide.
Enthalpie associée à une transition de phase : enthalpie de fusion, enthalpie de vaporisation, enthalpie de sublimation.	Exploiter l'extensivité de l'enthalpie et réaliser des bilans énergétiques en prenant en compte des transitions de phases. <b>Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure d'une grandeur thermodynamique énergétique (capacité thermique, enthalpie de fusion, etc.).</b>

### 1 Premier principe :

#### Definition : Énergie d'un système thermodynamique

Soit un système thermodynamique  $\Sigma$ , son énergie totale se décompose en :

- l'énergie interne  $U$ ,
- l'énergie cinétique macroscopique  $E_C$ ,
- l'énergie potentielle d'interaction avec l'extérieur  $E_{P,ext}$  (Par exemple le champ de pesanteur).

On a alors l'énergie totale  $E$  du système :  $E = U + E_C + E_{P,ext}$ .

#### Remarque :

L'énergie cinétique correspond à l'énergie cinétique du solide, elle peut être sous forme de translation et/ou de rotation (voir Mécanique 7).

#### Premier principe de la thermodynamique

Au cours d'une transformation thermodynamique quelconque d'un système fermé  $\Sigma$ , la variation de l'énergie  $E$  entre deux états d'équilibre de  $\Sigma$  au cours d'une transformation est égale à l'énergie qu'il reçoit, somme du travail mécanique  $W$  et du transfert thermique  $Q$ , soit :

$$\Delta E = W + Q$$

Ici  $W$  et  $Q$  sont les transferts algébriques, positifs par convention si l'énergie est reçue par  $\Sigma$ .

#### Remarque : Système thermodynamique au repos macroscopiquement

Si le système est au repos dans le référentiel d'étude on a alors :  $\Delta E_{P,ext} = \Delta E_C = 0 \text{ J} \implies \Delta U = W + Q$ .

#### Propriété : Premier principe lors d'une transformation quasi-statique

Lors d'une transformation quasi-statique ou réversible d'un système thermodynamique fermé  $\Sigma$ . On peut considérer

deux états d'équilibres voisin tel que :

$$EI(T, V, P) \rightarrow EF(T + dT, V + dV, P + dP)$$

On peut alors appliquer le premier principe tel que :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

avec  $\delta W$  le travail élémentaire reçu lors de la transformation infinitésimale et  $\delta Q$  le transfert thermique élémentaire reçu lors de la transformation infinitésimale.

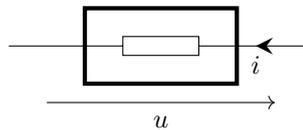
**Definition : Travail utile**

On a vu comment calculer le travail des forces de pression  $W_p$ . On défini  $W_u$  le travail utile tel que :

$$W = W_u + W_p$$

**Exemple :**

- Travail électrique :  $\delta W_u = u\delta q$  avec  $\delta q = i\delta t$ ,  $u$  la tension au borne du dipôle,  $i$  le courant qui traverse le dipôle.



- Travail mécanique d'un moteur. On vous précisera dans l'énoncé la valeur du travail, ou elle sera à calculer grâce au premier principe (il n'existe pas de formule).

**Propriété : Extensivité de l'énergie interne**

Dans le cas d'un système thermodynamique  $\Sigma$  composé de deux sous-systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , on peut utiliser l'extensivité de l'énergie interne lors d'une transformation :

$$\Delta U_\Sigma = \Delta U = \Delta U_{\Sigma_1} + \Delta U_{\Sigma_2}$$

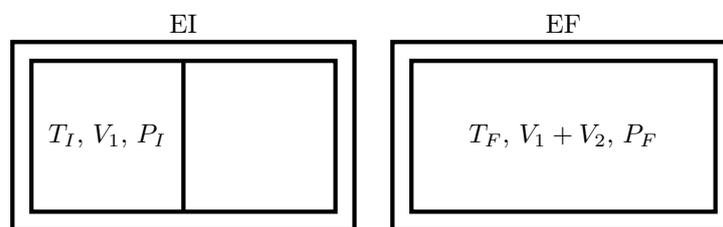
Cette décomposition est particulièrement utile si on applique le premier principe à  $\Sigma$  lors de la transformation :

$$\Delta U_\Sigma = W + Q$$

On utilise souvent cette méthode dans le cas où  $\Sigma$  constitue un système isolé de sorte que :  $W = 0$  et  $Q = 0$ .

**Definition : Détente de Joule-Gay Lussac**

Soit un gaz contenu dans un volume  $V_1$  séparé par une paroi d'un volume  $V_2$  vide. Le volume  $V_1 + V_2$  est adiabatique et indéformable. À  $t = 0$ s on retire la paroi et on attend l'équilibre :



Soit  $\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \text{Gaz parfait} \\ + \text{vide} \end{array} \right\}$  contenu dans  $V_1 + V_2 = C^{te}$  :

On applique le premier principe à  $\Sigma$  :  $\Delta U_\Sigma = \Delta U_{GP} + \underbrace{\Delta U_{vide}}_{\text{indéformable}} = \underbrace{W}_{\text{indéformable}} + \underbrace{Q}_{\text{adiabatique}} = 0 \text{ J.}$

La transformation conserve l'énergie interne du gaz.

**Propriété : Détente de Joule-Gay Lussac d'un gaz parfait**

Pour un gaz parfait d'après la première loi de Joule on a  $U_m = U_m(T)$  donc si  $U_F = U_I$  on a alors  $U(T_F) = U(T_I)$ .

On a alors :  $T_F = T_I$  la transformation se fait à température constante  $T = C^{te}$ .

### Méthode : Calcul du transfert thermique pour un gaz parfait au repos

On considère un système thermodynamique  $\Sigma$  composé d'un gaz parfait et de son enceinte. On suppose que les seules forces qui travaillent sont les forces de pressions de manière à avoir  $W = W_p$ . On considère alors une transformation entre un état initial  $I$  et un état final  $F$ . On cherche alors à calculer le transfert thermique  $Q$  lors de la transformation :

- On désigne le système thermodynamique  $\Sigma = \left\{ \text{Gaz parfait} \right\}$  ;
- On calcule le travail des forces de pressions  $W_p = \int_I^F -P_{ext}dV$  au cours de la transformation ;
- On applique le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_{\Sigma} = \Delta U_{GP} = W_p + Q$$

- On calcule la variation d'énergie interne du gaz parfait en utilisant la première loi de Joule

$$\Delta U_{GP} = C_V \Delta T \quad \text{ou} \quad \Delta U_{GP} = \int_{T_I}^{T_F} C_V(T) dT$$

- Calculer  $Q = \Delta U_{GP} - W_p$

### Propriété : Transformation isochore

Pour une transformation isochore l'état initial  $i$  est décrit à l'aide des variables d'état  $(T_I, V_0, P_I)$  et l'état final  $f$  est décrit à l'aide des variables d'état  $(T_F, V_0, P_F)$ , on a :

$$W = \int_i^f -P_{ext}dV = 0 \text{ J} \quad \text{car} \quad V = C^{te} \implies dV = 0$$

D'après le premier principe on a alors :  $\Delta U_{i \rightarrow f} = Q + W$ , d'après la première loi de Joule pour une capacité thermique à volume constant indépendante de la température on a  $\Delta U_{i \rightarrow f} = nC_{Vm}(T_F - T_I) = nC_{Vm}\Delta T$ . D'où :

$$Q = nC_{Vm}\Delta T$$

### Propriété : Transformation isobare

Pour une transformation isobare on a  $P = P_0 = P_{ext} = C^{te}$ ,  $\Sigma$  passe de l'état initial  $i$  décrit par les variables d'état  $(T_I, V_I, P_0)$  à l'état final  $f$  décrit par les variables d'état  $(T_F, V_F, P_0)$ , donc le travail des forces de pressions  $W = \int_i^f -P_{ext}dV$  s'exprime comme :

$$W = -P_0(V_F - V_I) = -P_0\Delta V \quad \text{et} \quad \Delta U_{i \rightarrow f} = Q + W \implies Q = \Delta U_{i \rightarrow f} - W = \Delta U_{i \rightarrow f} + P_0\Delta V$$

D'après la première loi de joule pour une capacité thermique à volume constant indépendante de la température on a :

$$dU = nC_{Vm}dT$$

En intégrant on obtient :

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = nC_{Vm}(T_F - T_I) = nC_{Vm}\Delta T$$

donc :

$$Q = nC_{Vm}\Delta T + P_0\Delta V \quad \text{avec} \quad P_0\Delta V = nR\Delta T$$

Finalement on a :

$$Q = n(C_{Vm} + R)\Delta T$$

### Propriété : Transformation isotherme

Pour une transformation isotherme on a  $T = T_0 = T_{ext} = C^{te}$ ,  $\Sigma$  passe de l'état initial  $i$  décrit par les variables d'état  $(T_0, V_I, P_I)$  à l'état final  $f$  décrit par les variables d'état  $(T_0, V_F, P_F)$ .

D'après la première loi de joule  $U_m = U_m(T)$ , donc on a alors :  $\Delta U_{i \rightarrow f} = W + Q = 0 \text{ J}$  car  $T_F = T_I = T_0$ .

En calculant le travail des forces de pressions  $W = \int_i^f -P_{ext}dV$ , la transformation étant quasi-statique on a  $P_{ext} =$

$$P = \frac{nRT_0}{V}.$$

On a alors  $W = \int_{V_I}^{V_F} -\frac{nRT_0}{V} dV = -nRT_0 \ln \frac{V_F}{V_I}$  donc  $Q = nRT_0 \ln \frac{V_F}{V_I}$ .

On remarque alors l'équivalence dans le premier principe du travail  $W$  et du transfert thermique  $Q$ . Toute énergie reçue mécaniquement peut être perdue thermiquement, on a alors l'énergie interne qui est constante.

### Definition : Thermostat

Un thermostat est un système thermodynamique dont la température  $T_0$  ne varie pas, même s'il échange de l'énergie (sous forme de transfert thermique ou de travail).

On retient qu'un système thermodynamique fermé peut être considéré comme un thermostat si sa capacité thermique à volume constant est grande devant celle des autres système en interaction avec lui.

## 2 La fonction d'état enthalpie :

### Definition : Enthalpie

On appelle enthalpie d'un système thermodynamique la fonction d'état :  $H = U + PV$

où  $U$  est l'énergie interne,  $P$  la pression et  $V$  le volume. L'enthalpie s'exprime en Joules noté J.

$H$  est une grandeur extensive. On a  $H_{\Sigma_1 + \Sigma_2} = H_{\Sigma_1} + H_{\Sigma_2}$ .

### Definition : Capacité thermique à pression constante

On appelle capacité thermique à pression constante d'un système fermé  $\Sigma$  la grandeur  $C_P$  telle :

$$C_P = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \quad \text{avec } C_P \text{ en } \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$$

On a alors au cours d'une transformation à pression constante lorsque la température varie de  $dT$  :

$$dH = C_P dT \implies \Delta H = \int_{T_I}^{T_F} C_P(T) dT$$

On définit également  $C_{Pm} = \frac{C_P}{n}$  la capacité thermique molaire à pression constante.

$c_P = \frac{C_P}{m}$  la capacité thermique massique à pression constante.

### Premier principe pour une transformation monobare avec $P_I = P_{ext}$

On a  $P_{ext} = P_0$  constante. On a alors  $W_P = \int_i^f -P_{ext} dV = \int_{V_I}^{V_F} -P_0 dV = -P_0(V_F - V_I)$ .

On considère un système  $\Sigma$  dans l'état initial  $(P_I, V_I, T_I)$  qui subit une transformation monobare vers l'état final  $(P_F, V_F, T_F)$ . On a alors  $P_I = P_F = P_0$ .

Le travail des forces de pression  $W_P = -P_0(V_F - V_I) = -P_F V_F + P_I V_I = -\Delta(PV)$

On a  $W = W_P + W_u$  donc en appliquant le premier principe à  $\Sigma$  entre l'état initial et l'état final on a :

$$\Delta U + \Delta E_C + \Delta E_{P,ext} = W + Q = W_P + W_u + Q = W_u + Q - \Delta(PV)$$

Donc  $\Delta U + \Delta(PV) + \Delta E_C + \Delta E_{P,ext} = W_u + Q$  on a alors  $\Delta H + \Delta E_C + \Delta E_{P,ext} = W_u + Q$

Pour un système subissant une transformation monobare, le premier principe peut s'écrire :

$$\Delta H + \Delta E_C + \Delta E_{P,ext} = W_u + Q$$

avec  $W_u$  le travail utile des forces autres que les forces de pression.

### Seconde loi de Joule : Enthalpie d'un gaz parfait

L'enthalpie molaire d'un gaz parfait est :  $H_m = U_m + PV_m$  or d'après la loi des gaz parfait on a  $PV_m = RT$  donc on a

alors :

$$H_m = U_m + RT$$

D'après la première loi de Joule on a  $U_m = U_m(T)$ .

On obtient alors la seconde loi de Joule qui dit que l'enthalpie molaire d'un gaz parfait ne dépend que de la température  $T$  :

$$H_m = U_m(T) + RT = H_m(T)$$

On a alors  $C_{Pm} = \frac{dH_m}{dT}$ .

#### Relation de Mayer

Si on dérive l'enthalpie molaire d'un gaz parfait rapport à  $T$  on obtient :

$$\frac{dH_m}{dT} = \frac{dU_m}{dT} + R \quad \text{avec } C_{Pm} = \frac{dH_m}{dT} \text{ et } C_{Vm} = \frac{dU_m}{dT}$$

On obtient donc la relation de Mayer :

$$C_{Pm} = C_{Vm} + R$$

On définit le coefficient  $\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}}$

On a alors :

$$C_{Pm} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \quad C_{Vm} = \frac{R}{\gamma - 1}$$

#### Exemple : Gaz parfait d'un gaz monoatomique

On a vu que pour un gaz parfait monoatomique on a :

$$U = \frac{3}{2}nRT \implies H = \frac{3}{2}nRT + nRT = \frac{5}{2}nRT$$

On obtient alors  $\gamma_{\text{mono}} = \frac{5}{3}$  et  $C_{P,\text{mono}} = \frac{5}{2}nR$

#### Propriété : Enthalpie d'une phase condensée idéale

Pour les solides et liquides incompressibles on sait que l'énergie interne molaire  $U_m = U_m(T)$  ne dépend que de  $T$ .

On a  $H_m = U_m(T) + PV_m$  et  $dH_m = dU_m + PdV_m + V_m dP$

Or pour les phases condensées idéales on a généralement  $V_m dP \ll dU_m$ .

Car  $V_m = \frac{V}{n}$  est très petit (les phases condensées sont 1000 fois plus dense que les gaz)

Donc  $dU_m \approx dH_m \implies C_P(T) \approx C_V(T) = C(T)$

On appelle  $C(T)$  la capacité thermique d'une phase condensée idéal.

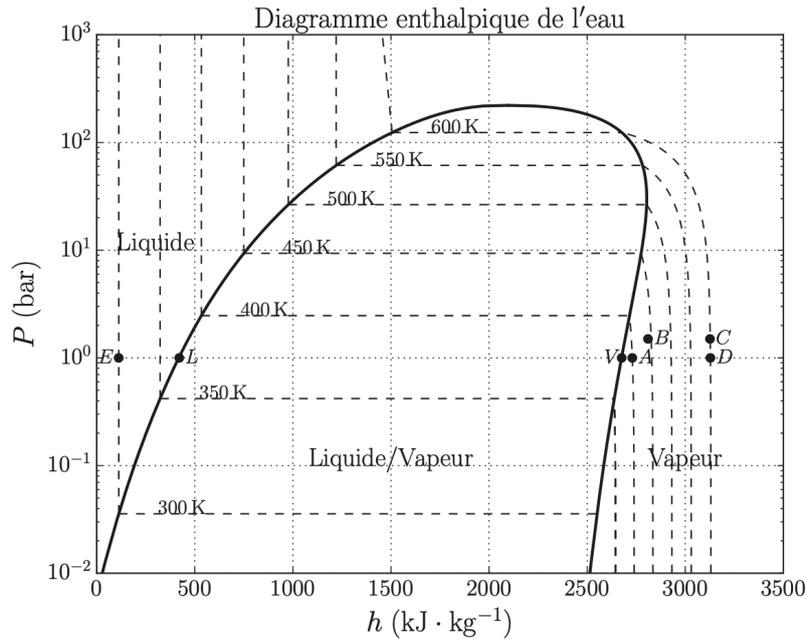
#### Remarque : Ordre de grandeur

À connaître, la capacité thermique massique de l'eau liquide :  $c_{eau} = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

## 3 Enthalpie de changement d'état

#### Definition : Diagramme enthalpique et enthalpie de changement d'état

Pour étudier énergétiquement les changements d'état, on trace à partir de valeur tabulées expérimentales dans un diagramme enthalpique la pression en fonction de l'enthalpie massique pour différentes isothermes :



On retrouve une courbe d'ébullition et une courbe de rosée comme dans le diagramme de Clapeyron. On observe également des paliers de changement d'état lors de transformations isothermes et isobares dans une zone d'équilibre Liquide-Vapeur.

On définit l'enthalpie massique :

- d'un liquide saturante à la température  $T$  comme l'abscisse du point  $L$  :  $h_L(T)$
- de la vapeur saturante à la température  $T$  comme l'abscisse du point  $V$  :  $h_V(T)$
- l'enthalpie massique de vaporisation (ou chaleur latente de vaporisation) :

$$\Delta h_{\text{vap}}(T) = h_V(T) - h_L(T)$$

De la même manière on définit :

- $\Delta h_{\text{fus}}(T) = h_L(T) - h_S(T)$  l'enthalpie massique de fusion avec  $h_S(T)$  l'enthalpie massique de solide saturant.
- $\Delta h_{\text{sub}}(T) = h_V(T) - h_S(T)$  l'enthalpie massique de sublimation.

#### Propriété : Théorème des moments

Si on considère  $x = \frac{m_V}{m_L}$  la fraction massique de vapeur dans le cas d'un équilibre liquide-vapeur. On applique le théorème des moments :

$$x = \frac{h_M - h_L}{h_V - h_L}$$

#### Remarque : Ordre de grandeur

Les enthalpies de transition de phase mettent en jeu des énergies très importantes, pour l'eau on a les valeurs tabulées :

- $\Delta h_{\text{fus}}(T_0 = 273 \text{ K}) = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} = -\Delta h_{\text{sol}}(T_0)$  (à 1 bar)
- $\Delta h_{\text{vap}}(T_1 = 373 \text{ K}) = 2260 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} = -\Delta h_{\text{liq}}(T_1)$  (à 1 bar)

#### Exemple :

Une poche à glace contient une masse totale  $m = 500 \text{ g}$  d'un mélange d'eau liquide et de glace avec une fraction  $x_L = 0,200$  de liquide. Quelle est la valeur maximale du transfert thermique qu'elle peut recevoir tout en restant à la température  $T_0 = 273 \text{ K}$ , température d'équilibre eau-glace sous la pression ambiante  $P_0 = 1,00 \text{ bar}$  ?

La poche de glace reste à la température  $T_0$  tant qu'on est dans l'équilibre Liquide-Solide de l'eau. Le transfert thermique

est égal à la variation d'enthalpie puisque la transformation est isobare, on a alors :

$$\begin{aligned}
 Q &= \Delta H = H_F - H_I \\
 &= mh_L - m_L h_L - (m - m_L)h_S \\
 &= m(h_L - x_L h_L - (1 - x_L)h_S) \\
 &= m(1 - x_L)(h_L - h_S) \\
 &= m(1 - x_L)\Delta h_{\text{fus}} = 134 \text{ kJ}
 \end{aligned}$$

#### Exemple : Mesure calorimétrique d'une capacité thermique massique

On verse dans le calorimètre  $m_{\text{eau}} = 400 \text{ g}$  d'eau très froide et on mesure la température qui se stabilise après quelques instants. On trouve  $\theta_0 = 2,0^\circ\text{C}$ . On introduit dans le calorimètre l'échantillon de fer, que l'on a préalablement pesé (sa masse est  $m_{\text{Fe}} = 200 \text{ g}$ ) et qui est initialement à la température d'une étuve thermostatée,  $\theta_1 = 85,0^\circ\text{C}$ . On vérifie que l'échantillon est bien entièrement couvert d'eau. On attend que la température se stabilise et on mesure la température finale  $\theta_F = 6,4^\circ\text{C}$ .

**Données :**  $c_{\text{Fe}} = 452 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  dans les tables.

#### Exemple : Détermination d'une enthalpie de changement d'état

On verse dans le calorimètre  $m_{\text{eau}} = 50 \text{ g}$  d'eau chaude et on mesure la température qui se stabilise après quelques instants. On trouve  $\theta_0 = 74^\circ\text{C}$ . On introduit dans le calorimètre un glaçon sortant du congélateur, à la température  $\theta_1 = -18^\circ\text{C}$ , après en avoir déterminé la masse  $m_{\text{glace}} = 19 \text{ g}$ . On attend que la température se stabilise et on mesure la température finale  $\theta_F = 38^\circ\text{C}$ .

**Données :**  $c_S = 2,06 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  capacité thermique de la glace.

#### Exemple : Mesure de la valeur en eau du calorimètre

On remplit le calorimètre avec une masse  $m_{\text{eau}} = 50 \text{ g}$  d'eau. On place la résistance dans le calorimètre sans la connecter. On laisse l'équilibre s'établir et on mesure la température :  $\theta_0 = 21^\circ\text{C}$ .

On branche la résistance  $R = 10 \Omega$  sur l'alimentation réglée sur  $U = 12 \text{ V}$  et pendant une durée  $\tau = 2 \text{ min}$ .

On attend que l'équilibre soit établi et on lit la température finale  $\theta_F = 27^\circ\text{C}$ .

#### Méthode : Mesure d'une capacité thermique massique

- Calculer la température idéale d'équilibre thermique (Question 2).
- Calculer la capacité thermique du calorimètre à partir de la mesure de l'équilibre thermique (Question 3).
- Calculer la valeur en eau d'un calorimètre (Question 3  $m_0$ ).
- Calculer une capacité thermique inconnue à partir d'une expérience de calorimétrie (Question 4).



## Thermodynamique 4 : Le second principe

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>3.4. Deuxième principe. Bilans d'entropie</b>	
Fonction d'état entropie.  Deuxième principe de la thermodynamique : entropie créée, entropie échangée. $\Delta S = S_{\text{ech}} + S_{\text{créé}}$ avec $S_{\text{ech}} = \sum Q_i/T_i$ .	Interpréter qualitativement l'entropie en termes de désordre statistique à l'aide de la formule de Boltzmann fournie.  Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan entropique. Relier la création d'entropie à une ou plusieurs causes physiques de l'irréversibilité. Analyser le cas particulier d'un système en évolution adiabatique.
Variation d'entropie d'un système.  Loi de Laplace.	Utiliser l'expression fournie de la fonction d'état entropie. Exploiter l'extensivité de l'entropie.  Citer et utiliser la loi de Laplace et ses conditions d'application.
Cas particulier d'une transition de phase.	Citer et utiliser la relation entre les variations d'entropie et d'enthalpie associées à une transition de phase : $\Delta h_{12}(T) = T\Delta s_{12}(T)$

### 1 Irréversibilité et entropie :

#### Definition : Entropie statistique

L'entropie d'un système thermodynamiquement isolé est donnée par la formule de Boltzmann :

$$S = k_B \ln \Omega$$

où  $\Omega$  représente le nombre d'état microscopique possibles ou nombre de configurations (positions et vitesses de chaque particules) compatible avec l'état macroscopique observé ( $P, V, T, U$ ).

L'entropie mesure le manque d'information sur le système à l'échelle microscopique, on dit que l'entropie mesure le désordre moléculaire.

#### Propriété : Extensivité de l'entropie

Soit un système fermé  $\Sigma$  composé de deux sous-système  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Le nombre de configuration de  $\Sigma$  est  $\Omega$ , le nombre de configuration de  $\Sigma_1$  est  $\Omega_1$  et le nombre de configuration de  $\Sigma_2$  est  $\Omega_2$ . On a la relation :

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \implies S_\Sigma = S_{\Sigma_1} + S_{\Sigma_2}$$

#### Remarque : Insuffisance du premier principe

Soit une transformation thermodynamique faisant passer le système d'un état  $A$  à un état  $B$ . Le premier principe nous donne :

$$\underbrace{U(B)}_{\text{état final}} - \underbrace{U(A)}_{\text{état initial}} = W + Q$$

Si maintenant on multiplie la relation par  $(-1)$ , on envisage la transformation inverse permise par le premier principe.

$$\underbrace{U(A)}_{\text{état final}} - \underbrace{U(B)}_{\text{état initial}} = (-W) + (-Q)$$

Or on sait que pour beaucoup de transformations l'irréversibilité est interdite. Les causes de cette irréversibilité sont :

- frottements mécaniques
- Transfert thermique
- diffusion des particules

On va donc introduire le second principe de la thermodynamique et l'entropie, ce principe aura pour but de définir un sens d'évolution du système.

#### Definition : Transformation irréversible

Une transformation est irréversible si elle ne peut pas revenir de son état final vers son état initial sans changer fortement

les conditions extérieures. Les causes d'irréversibilités sont :

- Pas d'équilibre mécanique initial ;
- Pas d'équilibre thermique initial ;
- Pas d'équilibre de diffusion initial.

### Definition : Entropie

Pour tout système thermodynamique, le deuxième principe postule l'existence d'une fonction d'état extensive, l'entropie notée  $S$  et s'exprime en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ . On a par ailleurs :

$$S_{\Sigma_1 + \Sigma_2} = S_{\Sigma_1} + S_{\Sigma_2} \quad \text{avec } \Sigma_1 \text{ et } \Sigma_2 \text{ deux systèmes thermodynamiques}$$

### Énoncé du second principe :

Lorsqu'un système  $\Sigma$  subit une transformation d'un état initial  $I$  à un état final  $F$ , la variation  $\Delta S = S_F - S_I$  de son entropie est :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}}$$

On définit  $S_{\text{éch}}$  comme l'entropie échangée avec l'extérieur lors de la transformation dont l'expression est :

$$S_{\text{éch}} = \int_I^F \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$$

avec  $\delta Q$  le transfert thermique élémentaire reçu par le système lors de la transformation.

On définit  $S_{\text{cr}}$  comme l'entropie créée dans le système lors de la transformation. On a :

$$S_{\text{cr}} \begin{cases} > 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} & \text{pour une transformation irréversible.} \\ = 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} & \text{pour une transformation réversible} \end{cases}$$

### Propriété : Second principe entre deux états voisins

Lorsqu'un système fermé  $\Sigma$  passe d'un état initial  $(V, P, T)$  à un état voisin  $(V + dV, P + dP, T + dT)$ , la variation d'entropie est :

$$dS = \delta S_{\text{éch}} + \delta S_{\text{cr}}$$

avec  $\delta S_{\text{éch}}$  l'entropie élémentaire échangée au cours de la transformation.

$$\delta S_{\text{éch}} = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$$

et  $\delta S_{\text{cr}} \geq 0$  l'entropie élémentaire créée au cours de la transformation.

### Propriété : Cas d'un système isolé thermiquement (adiabatique)

Dans le cas d'un système isolé, le transfert thermique  $Q$  est nul et on a donc :  $S_{\text{éch}} = 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

On a alors  $\Delta S = S_{\text{cr}} \geq 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Lors d'une évolution spontanée d'un système isolé, évolution nécessairement irréversible, son entropie croît. L'évolution s'arrête lorsque le système isolé a atteint un état dans lequel son entropie est maximale.

### Definition : Transformation isentropique

On définit une transformation isentropique, une transformation où l'entropie du système ne varie pas comme une transformation :

- adiabatique
- réversible.

### Propriété : Transformation monotherme

Dans le cas d'un système en contact avec un thermostat de température  $T_0$ , on a  $T_{\text{ext}} = T_0 = C^{te}$  tout au long de la transformation.

On peut alors calculer l'entropie échangée :  $S_{ech} = \int_I^F \frac{\delta Q}{T_{ext}} = \frac{Q}{T_0}$

On obtient le même résultat pour une transformation isotherme, car une transformation isotherme est forcément mono-therme.

### Propriété : Transformation réversible

Dans le cas d'une transformation réversible, on a pour chaque instant l'équilibre thermique  $T = T_{ext}$ .

On peut alors calculer l'entropie échangée :  $S_{ech} = \int_I^F \frac{\delta Q}{T}$

D'après le second principe on obtient alors :  $\Delta S = \int_I^F \frac{\delta Q}{T}$

## 2 Entropie d'un corps pur

### Propriété : Entropie molaire d'un gaz parfait

Par extensivité on calcule l'entropie d'un gaz parfait :

$$S = n \times S_m(T, P) = m \times s(T, P)$$

Pour un gaz parfait de coefficient  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$  indépendant de la température on a l'entropie molaire d'un gaz parfait est donnée en fonction des variables  $(T, P)$  :

$$S_m = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) - R \ln \left( \frac{P}{P_0} \right) + S_{m0}$$

avec  $S_{m0}$  l'entropie molaire à la température  $T_0$  et la pression  $P_0$ .

On peut mettre également l'expression de l'entropie molaire sous la forme :

$$S_m = \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + R \ln \left( \frac{V_m}{V_{m0}} \right) + S_{m0}$$

avec  $V_m = \frac{RT}{P}$  et  $V_{m0} = \frac{RT_0}{P_0}$  le volume molaire à  $(T, P)$  et à  $(T_0, P_0)$ .

On peut mettre également l'expression de l'entropie molaire sous la forme :

$$S_m = \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{P}{P_0} \right) + \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{V_m}{V_{m0}} \right) + S_{m0}$$

avec  $V_m = \frac{RT}{P}$  et  $V_{m0} = \frac{RT_0}{P_0}$  le volume molaire à  $(T, P)$  et à  $(T_0, P_0)$ .

### Propriété : Transformation isentropique d'un gaz parfait

Pour une transformation isentropique d'un gaz parfait où  $S_m = S_{m0}$  on obtient la loi de Laplace :

$$PV^\gamma = P_0V_0^\gamma$$

### Propriété : Entropie massique d'une phase condensée indilatable et incompressible

Par extensivité on a :

$$S = n \times S_m(T) = m \times s(T)$$

avec  $s(T) = c \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + s_0$  et  $s_0$  l'entropie massique à la température  $T_0$ .

### Propriété : Entropie d'un système diphasé

Par extensivité d'un système fermé  $\Sigma$  sous deux phases 1 et 2 de masse  $m_1$  et  $m_2$  :

$$S = m_1 s_1 + m_2 s_2 = m \times (x_1 s_1 + (1 - x_1) s_2)$$

**Definition : Entropie de changement d'état**

L'entropie massique de changement d'état  $\Delta s_{1 \rightarrow 2}$  à la température  $T$  est la différence entre les entropies massiques des phases saturantes 1 et 2 à cette température :

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} S = m \Delta_{1 \rightarrow 2} s = m(s_2(T) - s_1(T))$$

**Propriété : Changement d'état réversible, isobare et isotherme**

Lors d'un changement d'état isobare et isotherme de température  $T_0$  et pression d'équilibre  $P_{1 \rightarrow 2}(T_0)$ . Puisqu'il y a équilibre thermique, mécanique et de diffusion on a :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + \cancel{S_{\text{cr}}} = \frac{Q}{T_0}$$

or comme la transformation est isobare sans travail utile, le premier principe nous donne :

$$\Delta H = \cancel{W_u} + Q \implies \Delta S = \frac{\Delta H}{T_0}$$

On retiendra que l'enthalpie de changement d'état et l'entropie de changement d'état massiques ou molaires à la température  $T$  sont liées par la relation :

$$\Delta h_{1 \rightarrow 2}(T) = T \Delta s_{1 \rightarrow 2}(T)$$

**3 Application :****Méthode : Méthode de calcul de l'entropie créée**

Lorsqu'on étudie la transformation d'un système thermodynamique entre un état initial  $i$  dont les variables d'état sont connues ( $T_I, P_I, V_I$ ) et un état final  $f$  dont les variables d'états sont elles aussi connues ( $T_F, P_F, V_F$ ). On peut alors :

- utiliser les formules fournies pour calculer  $\Delta S_{i \rightarrow f}$  ;
- appliquer le premier principe de la thermodynamique pour calculer  $S_{\text{éch}} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$  ;
- appliquer le second principe de la thermodynamique pour calculer  $S_{\text{cr}} = \Delta S_{i \rightarrow f} - S_{\text{éch}}$  ;

On peut alors savoir si la transformation est une transformation réversible si  $S_{\text{cr}} = 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  ou si la transformation est irréversible si  $S_{\text{cr}} > 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**Propriété : Transformation isotherme QS d'un gaz parfait**

On considère un gaz parfait passant d'un état initial  $i$  ( $T_I = 0, P_I, V_I$ ) à un état final  $f$  ( $T_F = T_0, P_F, V_F$ ) de manière quasi statique au contact d'un thermostat de température  $T_{\text{ext}} = T_0$ . La transformation est alors isotherme et on a l'expression de l'entropie molaire qui nous donne :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = n \times \Delta S_m = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T_F}{T_I} \right) + nR \ln \left( \frac{V_F}{V_I} \right) = nR \ln \left( \frac{V_F}{V_I} \right)$$

On applique le premier principe :

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = Q + W$$

On considère alors la première loi de Joule qui donne  $dU = nC_{V_m} dT = 0$  car la transformation est isotherme, donc :

$$Q = -W = \int_{V_I}^{V_F} P_{\text{ext}} dV \iff Q = \int_{V_I}^{V_F} P dV = nRT_0 \ln \left( \frac{V_F}{V_I} \right)$$

On peut alors calculer  $S_{\text{éch}} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}} = \frac{1}{T_F} \int_i^f \delta Q = \frac{Q}{T_F}$  avec  $T_{\text{ext}} = T_0$  la température du thermostat :

$$S_{\text{éch}} = nR \ln \left( \frac{V_F}{V_I} \right)$$

On applique maintenant le second principe :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}} \iff S_{\text{cr}} = \Delta S_{i \rightarrow f} - S_{\text{éch}} = 0$$

**Propriété : Transformation isochore et monotherme d'un gaz parfait**

On considère un gaz parfait passant d'un état initial  $i$  ( $T_I, P_I, V_I = V_0$ ) à un état final  $f$  ( $T_F, P_F, V_F = V_0$ ) en le mettant en contact avec un thermostat de température  $T_{ext} = T_F$ . On a l'expression de l'entropie molaire qui nous donne :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = \frac{nR}{\gamma - 1} \int_{T_I}^{T_F} \frac{dT}{T} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_F}{T_I}$$

On applique le premier principe :

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = Q + \mathcal{W} \text{ car } W = \int_i^f -P_{ext} d\mathcal{V}$$

On considère alors la première loi de Joule qui donne  $dU = nC_{Vm}dT$  avec  $C_{Vm} = \frac{R}{\gamma - 1} = C^{te}$ , donc :

$$Q = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_F - T_I)$$

On peut alors calculer  $S_{ech} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T_{ext}} = \frac{1}{T_F} \int_i^f \delta Q = \frac{Q}{T_F}$  avec  $T_{ext} = T_F$  la température du thermostat :

$$S_{ech} = \frac{nR}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_I}{T_F}\right)$$

On applique maintenant le second principe :

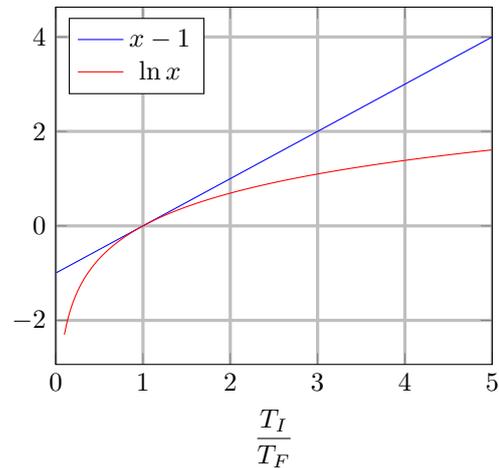
$$\begin{aligned} \Delta S_{i \rightarrow f} &= S_{ech} + S_{cr} \\ S_{cr} &= \Delta S_{i \rightarrow f} - S_{ech} \\ &= \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_F}{T_I} - \frac{nR}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_I}{T_F}\right) \end{aligned}$$

On a alors :

$$S_{cr} = \frac{nR}{\gamma - 1} \left( \frac{T_I}{T_F} - 1 - \ln \frac{T_I}{T_F} \right) = C_V(x - 1 - \ln x)$$

avec  $x = \frac{T_I}{T_F}$

L'entropie créée est positive pour  $T_F \neq T_I$ , on a donc affaire à une transformation irréversible.

**Propriété : Transformation isobare et monotherme d'un gaz parfait**

On considère un gaz parfait passant d'un état initial  $i$  ( $T_I, P_I = P_0, V_I$ ) à un état final  $f$  ( $T_F, P_F = P_0, V_F$ ) en le mettant en contact avec un thermostat de température  $T_{ext} = T_F$ . On a alors la deuxième identité thermodynamique qui devient :

$$dH = TdS + VdP \implies dS = \frac{dH}{T} \text{ avec } dH = nC_{Pm}dT \text{ et } C_{Pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

On obtient alors

$$dS = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} \implies \Delta S_{i \rightarrow f} = \int_{S(T_I)}^{S(T_F)} dS = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \int_{T_I}^{T_F} \frac{dT}{T} = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_F}{T_I}$$

On applique le premier principe :

$$\Delta H_{i \rightarrow f} = Q + \mathcal{W}_u \text{ car } W_u = 0 \text{ J}$$

On considère alors la deuxième loi de Joule qui donne  $dH = nC_{Pm}dT$  avec  $C_{Pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = C^{te}$ , donc :

$$Q = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1}(T_F - T_I)$$

On peut alors calculer  $S_{ech} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T_{ext}} = \frac{Q}{T_{ext}}$  avec  $T_{ext} = T_F$  la température du thermostat :

$$S_{ech} = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_I}{T_F}\right)$$

On applique maintenant le second principe :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}} \implies S_{\text{cr}} = \Delta S_{i \rightarrow f} - S_{\text{éch}} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_F}{T_I} - \frac{nR}{\gamma - 1} \left( 1 - \frac{T_I}{T_F} \right)$$

On a alors :

$$S_{\text{createe}} = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \left( \frac{T_I}{T_F} - 1 - \ln \frac{T_I}{T_F} \right)$$

L'entropie créée est positive pour  $T_F \neq T_I$ , on a donc affaire à une transformation irréversible.

# Thermodynamique 5 : Machines thermiques

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
<b>3.5. Machines thermiques</b>	
Application du premier principe et du deuxième principe de la thermodynamique aux machines thermiques cycliques dithermes : rendement, efficacité, théorème de Carnot.	<p>Donner le sens des échanges énergétiques pour un moteur ou un récepteur thermique ditherme. Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme.</p> <p>Définir un rendement ou une efficacité et les relier aux énergies échangées au cours d'un cycle.</p> <p>Justifier et utiliser le théorème de Carnot.</p> <p>Citer quelques ordres de grandeur des rendements des machines thermiques réelles actuelles. Expliquer le principe de la cogénération.</p> <p>Mettre en œuvre une machine thermique cyclique ditherme.</p>

## 1 Introduction aux machines thermiques

### Definition : Machine thermique

Dispositif dans lequel un système fluide subit une succession de transformations qui forment un cycle permettant une conversion continue d'énergie.

Au cours d'un cycle, le système fluide échange de l'énergie sous forme de travail avec la milieu extérieur et de transferts thermiques avec des thermostats.

### Propriété : Machine motrice/réceptrice

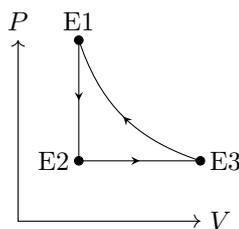
Le système fluide échange reçoit un travail  $W$  mécanique de l'extérieur au cours du cycle :

- $W < 0$  : Le fluide fournit un travail à l'extérieur au cours du cycle, la machine est alors motrice ;
- $W > 0$  : Le fluide reçoit un travail de l'extérieur au cours du cycle, la machine est alors réceptrice (machines frigorifiques, pompes à chaleur).

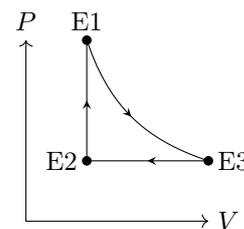
### Propriété : Interprétation graphique du diagramme de Clapeyron

On peut connaître le signe du travail à partir du sens de parcourt du cycle dans le diagramme de Clapeyron :

**Sens récepteur** : Trigonométrique



**Sens moteur** : Horaire



### Definition : Machine monotheurme

Une machine thermique monotheurme est composée d'un fluide en contact avec un unique thermostat de température  $T_0$ , au cours du cycle on représente :



On cherche à connaître les propriétés d'une telle machine ( $W > 0$  ou  $W < 0$ ).

### Propriété : Les principes appliqués à une machine monotheurme

On applique le premier principe sur le cycle de cette machine :  $\Delta U_{cycle} = W + Q = 0 \implies W = -Q$

On applique le second principe sur le cycle de cette machine :  $\Delta S_{cycle} = S_{ech} + S_{cr} = \frac{Q}{T_0} + S_{cr} \implies Q = -T_0 S_{cr} < 0$

On a alors un transfert thermique du système vers le thermostat, ainsi que  $W > 0$ .

Une machine monotheurme est donc forcément réceptrice, et fournit un transfert thermique vers l'extérieur, c'est uniquement le cas pour un chauffage...

**Propriété : Sens des échanges d'une machine monotherme**

En utilisant les deux principes de la thermodynamique on peut alors déduire les signes des termes d'échanges et tracer le diagramme :

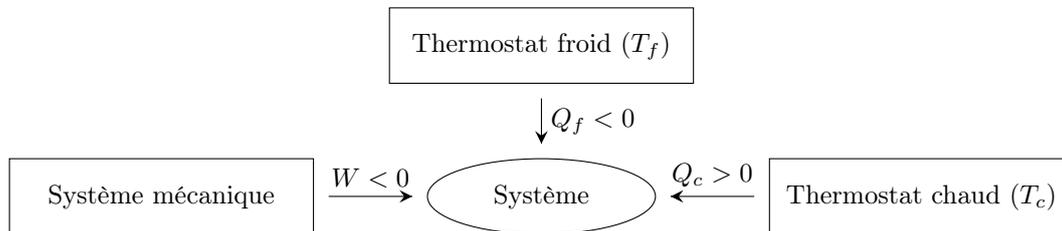
**2 Les moteurs dithermes****Definition : Moteur thermique ditherme**

On considère un fluide qui reçoit un transfert thermique de la part de 2 thermostats :

- Un thermostat chaud de température  $T_c$  ;
- Un thermostat froid de température  $T_f < T_c$  ;

Par définition :

- Le moteur consomme un transfert thermique de la part de la source chaude  $Q_c > 0$  (combustion du carburant).
- Le moteur fournit un travail mécanique vers l'extérieur  $W < 0$ .

**Propriété : application du premier principe**

On applique le premier principe au fluide dans la machine thermique durant un cycle :

$$\Delta U_{cycle} = W + Q = W + Q_c + Q_f = 0 \implies W = -(Q_f + Q_c) < 0$$

**Propriété : application du second principe**

On applique le second principe au fluide dans la machine thermique durant un cycle :

$$\Delta S_{cycle} = S_{ech} + S_{cr} = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_{cr} = 0 \implies \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Clausius. Elle devient une égalité si le cycle est parfaitement réversible, on a alors  $S_{cr} = 0$ .

**Definition : Rendement moteur**

On définit le rendement d'un moteur ditherme par :

$$\eta = \left| \frac{\text{Énergie utile}}{\text{Énergie couteuse}} \right| = \frac{|W|}{Q_c} = \frac{-W}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c}$$

On obtient alors :  $\eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$

En utilisant le second principe on obtient :  $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f S_{cr}}{Q_c}$

**Théorème de Carnot**

Si on considère un cycle totalement réversible on a :  $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \implies \frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$

On obtient alors pour le rendement :  $\eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c} < 1$

Dans le cas d'un cycle totalement réversible, le rendement est maximum et vaut le rendement de Carnot  $\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}$

**Propriété : Cycle moteur de Carnot**

On construit un cycle moteur ditherme réversible à l'aide de :

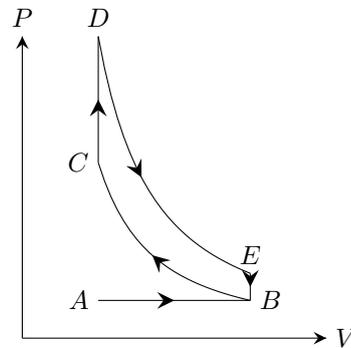
- 2 transformations isothermes QS de températures  $T_f$  et  $T_c$ ;
- 2 transformations adiabatiques réversibles pour passer de  $T_f$  à  $T_c$  puis de  $T_c$  à  $T_f$ .

On trace dans le diagramme  $(P, V)$  :

**Exemple : Modélisation du moteur à explosion**

On considère un gaz parfait au cours d'un cycle de moteur à explosion. On modélise le cycle de la manière suivante :

- $AB$  admission isobare;
- $BC$  compression adiabatique supposée réversible;
- $CD$  explosion isochore;
- $DE$  détente adiabatique supposée réversible;
- $EB$  échappement isochore;
- $BA$  échappement isobare;



Soit le rendement  $\eta = \frac{-W}{Q_{ch}} = 1 + \frac{Q_{fr}}{Q_{ch}}$  d'après le premier principe.

On calcule  $Q_{ch} = \Delta U_{CD} = C_V(T_D - T_C)$  et  $Q_{fr} = \Delta U_{EB} = C_V(T_B - T_E)$

On applique la loi de Laplace aux transformations  $BC$  et  $DE$  et on obtient :

$$T_C = T_B \left( \frac{V_{max}}{V_{min}} \right)^{\gamma-1} \quad \text{et} \quad T_D = T_E \left( \frac{V_{max}}{V_{min}} \right)^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad \eta = 1 - \left( \frac{V_{max}}{V_{min}} \right)^{\gamma-1}$$

**Remarque : Ordres de grandeur**

- Moteur à essence : 35%;
- Moteur Diesel : 45%;
- Centrale électrique nucléaire : 30% à 40%, environ 10% de la production mondiale d'électricité;
- Centrale à gaz : 60%, environ 20% de la production mondiale d'électricité.
- Centrale à charbon : 40%, environ 40% de la production mondiale d'électricité.

**Definition : Cogénération**

Dans une centrale électrique, on peut se servir du transfert thermique vers la source froide pour un autre usage, comme par exemple un système de chauffage, la production d'eau chaude, ou un procédé industriel nécessitant un transfert thermique.

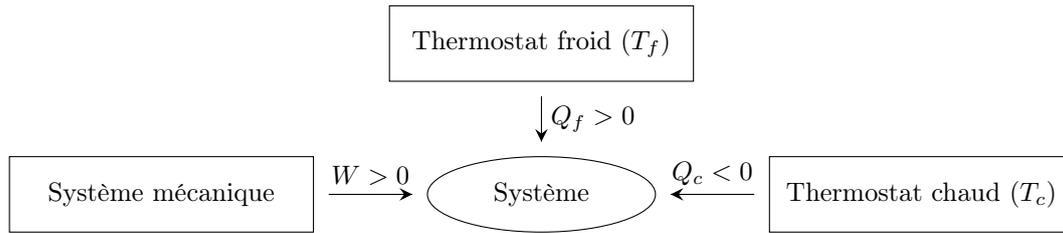
### 3 Les machines frigorifiques dithermes

**Definition : Machine frigorifique ditherme**

On considère un dispositif dont le fluide parcourt un cycle au cours duquel :

- il reçoit un travail mécanique  $W > 0$  (récepteur);

- il reçoit un transfert thermique  $Q_f > 0$  de la part de la source froide qu'on cherche à refroidir.



**Definition : Efficacité d'une machine frigorifique**

Le but d'une machine frigorifique est de produire du froid. On définit alors l'efficacité de la machine par :

$$e_{frigo} = \left| \frac{\text{Énergie utile}}{\text{Énergie couteuse}} \right| = \frac{Q_f}{W} = -\frac{Q_f}{Q_f + Q_c}$$

On obtient alors :  $e_{frigo} = -\frac{1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}}$

En utilisant le second principe on obtient :  $e_{frigo} = \frac{1}{\frac{T_c}{T_f} - 1 + \frac{T_c S_{cr}}{Q_f}}$

**Théorème de Carnot**

Si on considère un cycle totalement réversible on a :  $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \implies \frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$

On obtient alors pour le rendement :  $e_{frigo} = -\frac{1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}} \leq \frac{T_f}{T_c - T_f}$  Dans le cas d'un cycle totalement réversible,

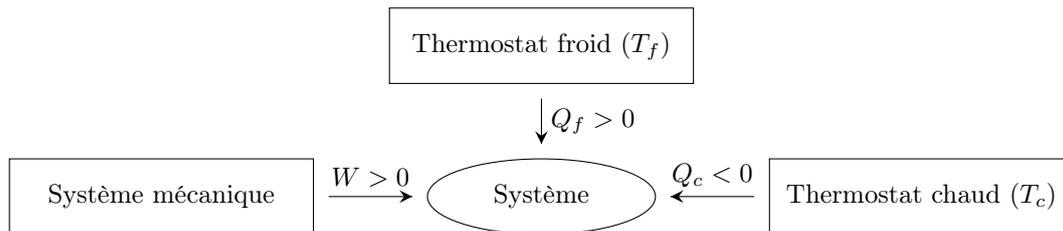
l'efficacité est maximale et vaut l'efficacité de Carnot  $e_{frigo,c} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$

## 4 Les pompes à chaleur dithermes

**Definition : Pompe à chaleur ditherme**

On considère une machine parcourut par un fluide qui subit un cycle thermodynamique au cours duquel :

- le fluide reçoit un travail  $W > 0$  (récepteur) ;
- le fluide fournit un transfert thermique vers la source chaude  $Q_c < 0$  pour réchauffer la source chaude.



**Definition : Efficacité d'une pompe à chaleur**

Le but d'une pompe à chaleur est de produire du chaud. On définit alors l'efficacité de la machine par :

$$e_{pac} = \left| \frac{\text{Énergie utile}}{\text{Énergie couteuse}} \right| = \frac{|Q_c|}{W} = -\frac{Q_c}{W} = \frac{Q_c}{Q_f + Q_c}$$

On obtient alors :  $e_{pac} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}}$

En utilisant le second principe on obtient :  $e_{pac} = \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f S_{cr}}{Q_c}}$

**Théorème de Carnot**

Si on considère un cycle totalement réversible on a :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \implies \frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$$

On obtient alors pour le rendement :

$$e_{pac} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}} \leq \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

Dans le cas d'un cycle totalement réversible, l'efficacité est maximale et vaut l'efficacité de Carnot  $e_{pac,c} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

#### Remarque : Ordres de grandeur

- Congélateur domestique :  $e = 2$  ;
- Réfrigérateur domestique :  $e = 8$  ;
- Pompe à chaleur :  $e = 3$  à  $5$  ;
- Norme pompe à chaleur classe A :  $e > 3,65$