Cours de physique-chimie
PTSI1 2025-2026

Quentin Roveillo

17 septembre 2025

BY NC SA

Table des matières

I Ondes 3
1 Lois de l'optique géométrique 5
2 Formation des images 11
3 Systèmes optiques 15
4 Propagation d'un signal 19
II Signaux 25
1 Lois de l'électrocinétique 27
2 Circuits linéaires du premier ordre 33
3 Circuits linéaires du deuxième ordre 41
4 Régime des oscillations forcées 49
5 Filtres d'ordre 2 et résonance 57
III Mécanique 67
1 Cinématique du point matériel 69
2 Dynamique du point matériel 77
3 Les oscillateurs mécanique 85
4 Énergie, travail, puissance 89
5 Mouvement de particules chargées 97
IV Chimie 103
1 Molécules et solvants 105
2 Transformation de la matière 113
3 Cinétique chimique 119

Première partie

Ondes

Liste des chapitres Ondes

1 Lois de l'optique géométrique **5**
1 Sources lumineuses . . . 5
2 Modèle de l'optique géométrique . . . 6
3 Changement de milieu . . . 7
4 Notion d'objet et d'image : . . . 8
5 La fibre à saut d'indice . . . 9
2 Formation des images **11**
1 Notion d'objet et d'image : . . . 11
2 Les lentilles minces . . . 12
3 Projection d'une image . . . 14
3 Systèmes optiques **15**
1 L'œil . . . 15
2 L'appareil photo . . . 16
3 Instrument afocal : . . . 17
4 Propagation d'un signal **19**
1 Notion d'onde . . . 19
2 Ondes progressives harmoniques : . . . 21
3 Phénomène d'interférences . . . 22
4 Interférences lumineuses . . . 23

Ondes 1 : Lois de l'optique géométrique

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
1.1. Formation des images	
Sources lumineuses Modèle de la source ponctuelle monochromatique. Spectre.	Caractériser une source lumineuse par son spectre. Relier la longueur d'onde dans le vide et la couleur.
Modèle de l'optique géométrique Modèle de l'optique géométrique. Notion de rayon lumineux. Indice d'un milieu transparent.	Définir le modèle de l'optique géométrique. Indiquer les limites du modèle de l'optique géométrique.
Réflexion, réfraction. Lois de Snell-Descartes.	Établir la condition de réflexion totale.
Conditions de l'approximation de Gauss et applications Stigmatisme. Miroir plan.	Construire l'image d'un objet par un miroir plan.
La fibre optique à saut d'indice.	Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice.

1 Sources lumineuses

Definition : Onde monochromatique

Une onde monochromatique est une onde sinusoïdale de fréquence ν et de longueur d'onde λ. L'onde se propage à la célérité v dans un milieu, avec la relation :

$$\lambda\nu = v \quad \text{avec} \quad v \leqslant c \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\text{maximum dans le vide}$$

La lumière se propage dans ce milieu à la vitesse v et on défini l'indice optique n d'un milieu :

$$n = \frac{c}{v} \geqslant 1$$

On défini alors la longueur d'onde dans le vide λ_0 et on relie la longueur d'onde λ dans le milieu à la longueur d'onde dans le vide :

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} \qquad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{\lambda_0}{n}$$

Chaque longueur d'onde dans le vide est associée à une couleur du domaine visible :

λ_0(nm)	< 400	500	550	590	630	> 750
ν (Hz)	$> 7{,}5 \times 10^{14}$	6×10^{14}	$5{,}5 \times 10^{14}$	$5{,}1 \times 10^{14}$	$4{,}8 \times 10^{14}$	$< 4{,}0 \times 10^{14}$
Couleur	ultra violet	bleu	vert	jaune orangé	rouge	infra rouge

On appelle milieu dispersif un milieu dont l'indice optique dépend de la longueur d'onde. On peut appliquer la loi de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$$

On appelle milieu non dispersif un milieu dont l'indice optique ne dépend pas de la longueur d'onde ($n = C^{te}$).

Definition : Spectre de la lumière

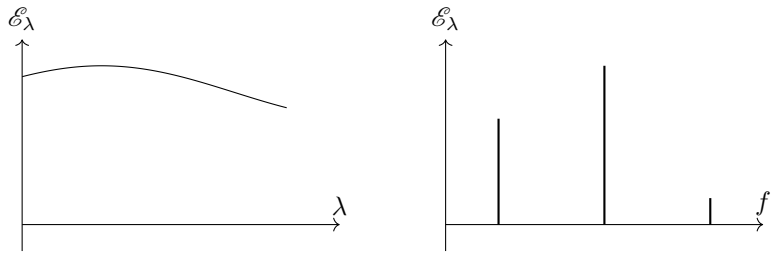
On définit le spectre lumineux d'une source de lumière non-monochromatique comme la courbe qui donne l'éclairement $\mathscr{E}_\lambda$ en fonction de λ_0 la longueur d'onde dans le vide.

Propriété : Les types de sources

Lampes à incandescence : On appelle lumière blanche une lumière composée d'un large gamme de longueur d'onde (dans le visible). Son spectre lumineux est alors continu et étalé sur toutes les fréquences visibles (4×10^{14} Hz à 8×10^{14} Hz).

C'est le cas de la lumière du Soleil, ainsi que de toutes les lampes thermiques qui émettent de la lumière en chauffant un corps chaud à haute température.

Lampes spectrales : Une lampe spectrale est une lampe dont la lumière est émise par un élément sous forme de vapeur dans laquelle une décharge électrique est produite. La décharge électrique fait passer les atomes dans un état excité qui produise des photons (ondes monochromatiques) en passant dans un état d'excitations inférieur. Le spectre est constitué de pics fin appelés raies spectrales. Chaque raie représente une vibration quasi-monochromatique.



Propriété : Source ponctuelle monochromatique

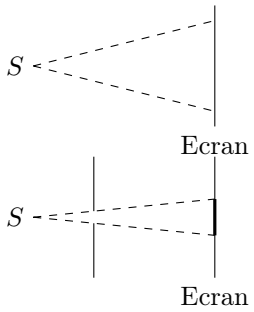
Une source ponctuelle S est une source de dimensions infiniment petites, assimilable à un point. Elle emet de la lumière dans toutes les directions.

Une source ponctuelle et monochromatique est une source ponctuelle émettant une onde lumineuse monochromatique.

2 Modèle de l'optique géométrique

Propriété : Notion expérimentale de rayon

La zone lumineuse issue d'une source primaire S est située à l'indérieur d'un cône qu'on appelle faisceau lumineux.
Si on intercale sur la trajet de la lumière un écran percé d'un trou on restreint l'ouverture de la zone éclairée. On a alors une tache lumineuse réduite. Si on réduit la taille du trou, la tache lumineuse diminue également.
Lorsque le trou est trop petit, la tache lumineuse s'élargit de nouveau, on assiste alors à la diffraction du faisceau lumineux.
On défini alors un rayon lumineux comme la trajet parcouru par une onde lumineuse lors de sa propagation.



Definition : Approximation de l'optique géométrique

Les lois de l'optique géométrique étudiées dans la suite sont valables tant que les instruments utilisés sont de grande taille par rapport à la longueur d'onde λ de la lumière.

Definition : Milieu homogène, isotrope et transparent

On étudiera toujours le trajet des rayons dans des milieux d'indice n :

- homogène : $n = C^{te} \quad \forall M \in$ milieu ;
- isotrope : $n_x = n_y = n_z = n$;
- transparent : permet la propagation de la lumière.

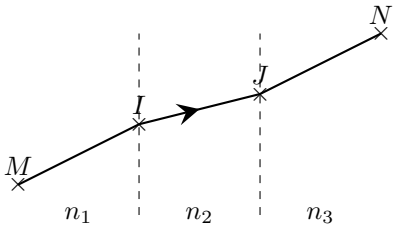
Vocabulaire :

- Un **dioptre** comme la surface séparant deux milieux homogènes d'indices différents.
- Un **miroir** comme une surface réfléchissant la lumière.
- Un **Système optique** comme un ensemble de milieux transparent, homogène et isotopes séparés par des dioptres ou des miroirs.

Propriété : Propagation rectiligne de la lumière

On considère un milieu homogène, isotrope et transparent, la lumière se propage alors de manière rectiligne et les rayons lumineux sont des droites.

Dans une suite de milieu homogènes et isotropes. Le trajet d'un rayon lumineux sera formé d'une succession de segment de droite.



Propriété : Retour inverse de la lumière

La trajectoire suivie par la lumière ne dépend pas du sens de parcours. La lumière parcourt la même trajectoire pour aller de A vers B que pour aller de B vers A.

Propriété : Indépendance des rayons lumineux

Les rayons lumineux issus des sources S_1 et S_2 sont la somme des rayons issus de S_1 et des rayons issus de S_2. On reste dans le cas où les deux ondes lumineuses n'interfèrent pas.

3 Changement de milieu

Remarque : Observation

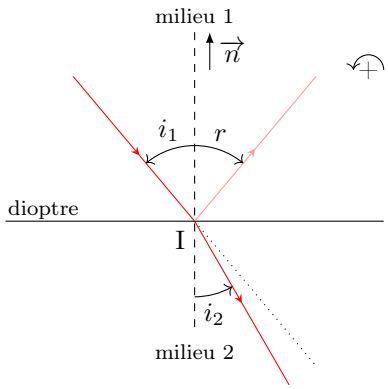
Lorsqu'un **rayon incident** arrive sur un dioptre on observe deux rayons :

- un **rayon réfléchi** qui reste dans le milieu 1 ;
- un **rayon réfracté** qui traverse le dioptre en subissant une déviation ;

Definition : Paramétrage géométrique

Vocabulaire :

- I : point d'incidence ;
- $\vec{n}$: normale à la surface du dioptre ;
- $\mathscr{P}$: plan d'incidence contenant I, $\vec{n}$ et le rayon incident ;
- i_1 : angle d'incidence ;
- i_2 : angle réfracté ;
- r : angle réfléchi ;
- $D_{\text{refra}} = i_2 - i_1$ déviation du rayon lors de la réfraction ;
- $D_{\text{refle}} = \pi - i_1 + r$ déviation du rayon lors de la réfléxion.



Attention, les angles ici sont orientés, c'est-à-dire qu'il y a un sens de rotation arbitrairement pris comme positif, il faut indiquer ce sens par un petit symbole $\circlearrowleft +$.

Lois de Snell-Descartes

Première loi : Les rayons réfléchi et réfracté sont situés dans le plan d'incidence.

Deuxième loi : L'angle réfléchi et l'angle d'incidence sont liés $\boxed{i_1 = -r}$

Troisième loi : L'angle réfracté et l'angle d'incidence sont liés $\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$

Exemple : Application directe

Un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 550\,\text{nm}$ passe de l'air à une prisme en verre d'indice $n_2 = 1{,}50$. L'angle d'incidence vaut $i_1 = 30°$.

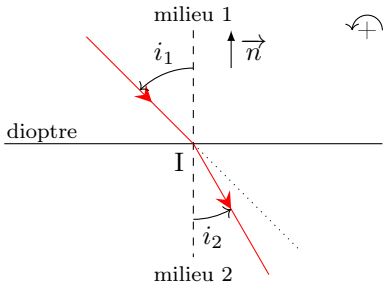
Q.1 Faire un schéma légendé dans le plan d'incidence en précisant si le rayon réfracté se rapproche ou s'écarte de la normale.

Q.2 Calculer l'angle de réfraction i_2.

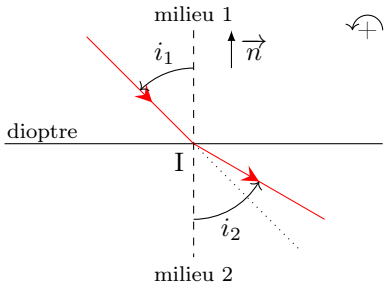
Q.3 On remplace le verre par un bloc de diamant. L'angle de réfraction vaut alors $i_2' = 12°$. Calculer l'indice de réfraction du diamant.

Remarque : Deux situations possibles de réfraction

Soit on a la situation où $n_2 > n_1$ dans ce cas on dit que le milieu 2 est plus réfringent que le milieu 1.



Soit on a la situation où $n_2 < n_1$ dans ce cas on dit que le milieu 2 est moins réfringent que le milieu 1.

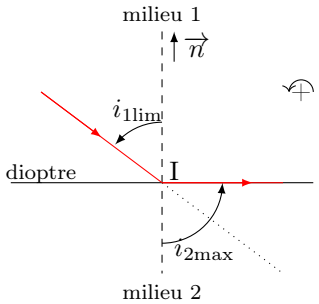


Propriété : Réflexion totale

Si $n_1 > n_2$ alors d'après la deuxième loi de Descartes on a $i_2 > i_1$. Si on augmente l'angle d'incidence jusqu'à une valeur limite $i_1 = i_{1\text{lim}}$, on obtient alors l'angle réfracté à la valeur maximale $i_2 = i_{2\text{max}} = \dfrac{\pi}{2}$. La loi de Descartes nous donne alors :

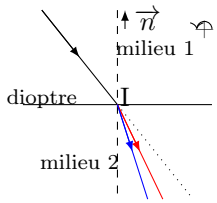
$$n_1 \sin i_{1\text{lim}} = n_2 \sin i_{2\text{max}} \Longrightarrow i_{1\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

La totalité de l'énergie est alors réfléchie, il ne reste que le rayon réfléchi. On parle alors de réflexion totale.



Propriété : Dispersion de la lumière

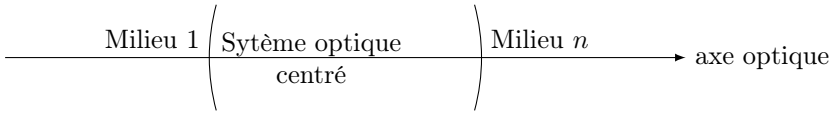
Si le milieu 2 est dispersif alors $n_2 = n_2(\lambda_0)$ et chaque couleur aura son propre indice optique. D'après la loi de Descartes, chaque couleur aura donc un angle réfracté $i_2 = i_2(\lambda_0)$ différent.
D'après la loi de Cauchy, plus la longueur d'onde dans le vide est grande, plus l'indice optique est faible, plus l'angle réfracté est grand. On a donc le rayon rouge de grande longueur d'onde qui est moins dévié que le rayon bleu.



4 Notion d'objet et d'image :

Definition : Axe optique

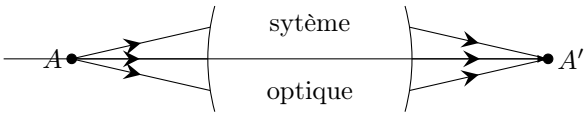
Si tous les composants d'un système optique ont un axe de symétrie en commun, système est dit **centré**. L'axe de symétrie est alors appelé **axe optique**.



Definition : Image/Objet

On considère une source ponctuelle A, si tous les rayons issus de A convergent en A' après avoir traversé (S), on dit que A' est l'image de A à travers (S). Les points A et A' sont conjugués par le système.

L'espace objet est situé avant la face d'entrée de (S).



L'espace image est situé après la face de sortie de (S).

Pour voir un point image, il faut utiliser un écran à la position de l'image qui va diffuser les rayons dans toutes les directions.

Propriété : Objet réel/virtuel

Si le faisceau entrant dans un système optique (S) est divergent depuis un point A situé dans l'espace objet. Alors A est un objet réel, sinon c'est un objet virtuel.

Les rayons après le premier dioptres sont déviés, on trace donc leurs prolongements en pointillés.

Propriété : Image réelle/virtuelle

Si le faisceau sortant d'un système optique est convergent vers un point A' situé dans l'espace image. Alors A' est une image réelle, sinon c'est une image virtuelle.

On ne peut pas projeter une image virtuelle sur un écran, mais on peut la voir avec notre œil (voir fin du chapitre).

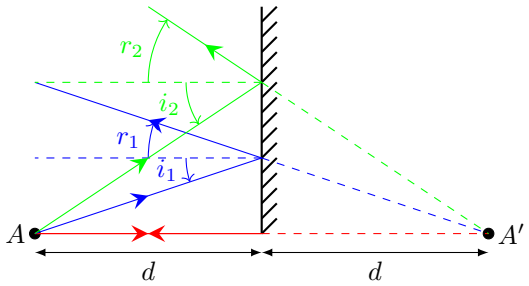
Propriété : Objet/Image à l'infini

Un objet situé à l'infini émet des rayons qui sont parallèle entre eux.

Une image située à l'infini est formée à partir de rayons parallèles entre eux.

Propriété : Image à travers un miroir

On considère un objet réel A situé à une distance d d'un miroir plan. L'objet A est considéré comme une source ponctuelle de lumière :



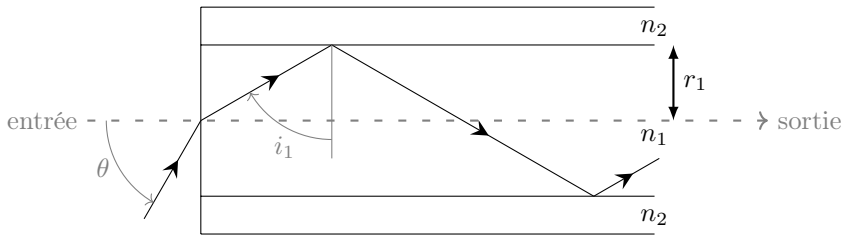
Le faisceau de rayon réfléchi est divergent. Le miroir produit donc une **image virtuelle** située à l'intersection du prolongement des rayons réfléchis.

D'après la loi de Snell-Descartes de la réfléxion, l'image virtuelle A' est le symmétrique de l'objet réel A par rapport au plan du miroir.

5 La fibre à saut d'indice

Definition : Présentation

La fibre à saut d'indice est constituée d'une cœur cylindrique transparent de rayon r_1 et d'indice n_1 entouré par une gaine coaxiale également transparente, de rayon r_2 et d'indice n_2. Le but de la fibre optique est de guider les rayons lumineux tout en minimisant les pertes.

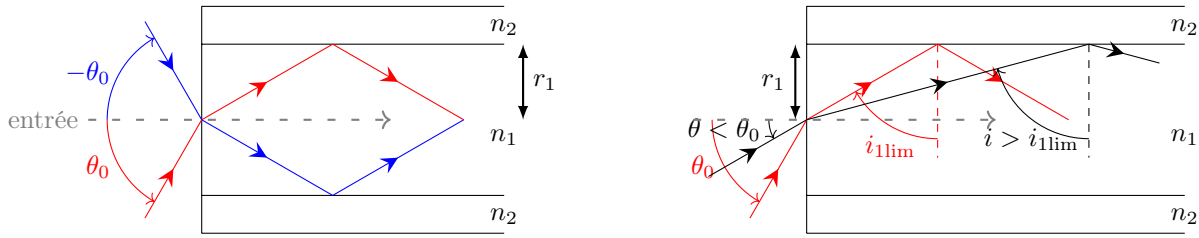


Pour une utilisation optimale

- il faut que les rayons à l'entrée de la fibre soit inclu dans un **cône d'acceptance** ;
- la **dispersion intermodale** ne brouille pas le signal.

Propriété : Cône d'acceptance

Le cône d'acceptance est caractérisé par le demi-angle θ_0 au sommet tel que tous les rayons qui sont contenu dans ce cône traverse la fibre sans perte.



Condition de propagation : On définit θ_0 à partir de la condition de réflexion totale à l'interface gaine-cœur :

$$n_1 \sin i_{1\text{lim}} = n_2 \Longrightarrow i_{1\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

De cette manière on obtient la condition sur i_1 :

$$i_1 > i_{1\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Condition sur θ : Cherchons d'abord une relation entre θ_0 et $i_{1\text{lim}}$:

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_{1\text{lim}}\right)$$

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \cos(i_{1\text{lim}})$$

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \sqrt{1 - \sin^2(i_1\text{lim})}$$

En utilisant la condition de réflexion totale on obtient :

$$n_{\text{air}} \sin(\theta_0) = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \Longrightarrow \theta_0 = \arcsin(\sqrt{n_1^2 - n_2^2})$$

Et on a alors la condition : $\theta < \theta_0$ à partir de $i > i_{1\text{lim}}$.

Propriété : Dispersion intermodale

La dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice est définie par la différence de temps de parcours de la fibre entre le rayon le plus lent et le rayon le plus rapide :

$$\Delta t = t_{\text{max}} - t_{\text{min}}$$

Le rayon le plus rapide correspond au rayon parcourant la distance le plus courte. C'est le rayon entrant dans la fibre avec un angle $\theta = 0$. Son temps de trajet est tout simplement

$$t_{\text{min}} = \frac{L}{v_1} = \frac{n_1 L}{c}$$

Le rayon le plus lent correspond au rayon parcourant la distance la plus longue. C'est le rayon faisant une angle θ_0 avec l'axe de la fibre. Son temps de trajet est

$$t_{\text{max}} = \frac{l}{v_1} = \frac{n_1 l}{c}$$

avec l la distance parcourut par le rayon. On a

$$l = \frac{L}{\sin i_{1\text{max}}} = \frac{n_1 L}{n_2} \Longrightarrow t_{\text{max}} = \frac{n_1^2 L}{n_2 c}$$

On obtient alors l'expression de la dispersion modale :

$$\Delta t = \frac{n_1 L}{c}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)$$

Si la dispersion modale est trop importante on peut perdre de l'information lors de la transmission de signaux.

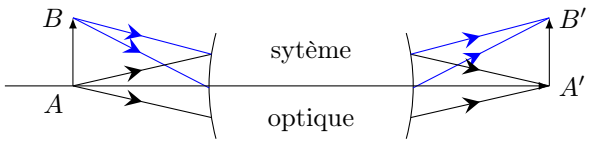
Ondes 2 : Formation des images

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
1.1. Formation des images	
Conditions de l'approximation de Gauss.	Énoncer les conditions de l'approximation de Gauss et ses conséquences. Relier le stigmatisme approché aux caractéristiques d'un détecteur.
Lentilles minces dans l'approximation de Gauss.	Définir les propriétés du centre optique, des foyers principaux et secondaires, de la distance focale, de la vergence. Construire l'image d'un objet situé à distance finie ou infinie à l'aide de rayons lumineux, identifier sa nature réelle ou virtuelle. Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement transversal de Descartes et de Newton. Établir et utiliser la condition de formation de l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente.

1 Notion d'objet et d'image :

Definition : Stigmatisme/Aplanétisme

On considère un système optique (S) centré. On place un objet réel AB tel que A est situé sur l'axe optique et AB est orthogonal à l'axe optique.



Le système optique (S) est dit :

- **stigmatique** si tous les rayons issus de A passent par A' après avoir été déviés par le système optique.
- **aplanétique** si l'image $A'B'$ est elle aussi orthogonale à l'axe optique.

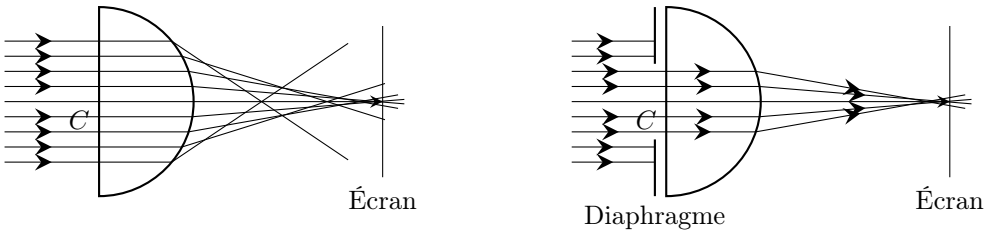
De cette manière pour déterminer la position de A' on doit déterminer de B' puis A' est la projection de B' sur l'axe optique.

Propriété : Miroir plan

Le miroir plan est le seul système optique rigoureusement stigmatique et aplanétique.

Conditions de Gauss et capteur

En pratique les systèmes ne sont jamais parfaitement stigmatique et aplanétiques. Si on prend l'exemple d'une lentille demi-boule éclairée par un faisceau de rayon parallèle provenant d'un objet ponctuel situé à l'infini sur l'axe optique :

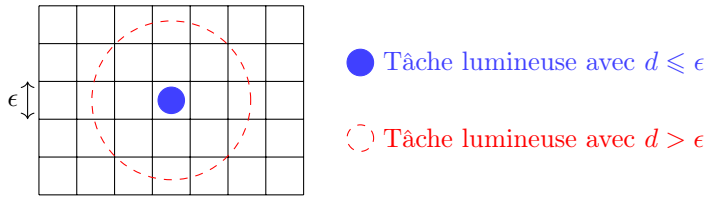


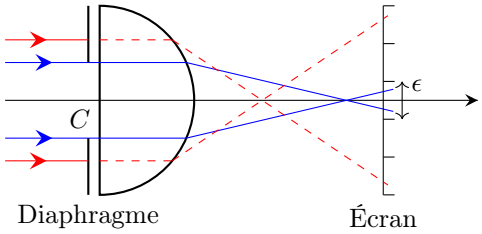
On voit que les rayons ne convergent pas tous sur un unique point. Le système n'est donc pas stigmatique et chaque point objet formera donc sur un écran une tâche lumineuse. Pour permettre d'avoir un stigmatisme approchée et un aplanétisme approché on se place dans les conditions de Gauss :

- Les rayons sont proches de l'axe optique ;
- L'angle entre les rayons et l'axe optique est faible.

Dans ces conditions on parle de rayons paraxiaux. Si un système optique est utilisé dans les conditions de Gauss, il peut être considéré comme stigmatique et aplanétique.

Plus les conditions de Gauss sont respectées, et plus la tâche lumineuse sur le récepteur sera petite. Tous les récepteurs sont composés de cellules élémentaires photo-sensibles qu'on considèrera carré de taille ϵ. Les conditions de Gauss sont respectées si la tâche lumineuse sur le récepteur à un diamètre $d \leqslant \epsilon$, dans ce cas le récepteur obtient la même information que pour un système stigmatique.



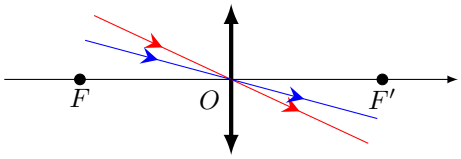


2 Les lentilles minces

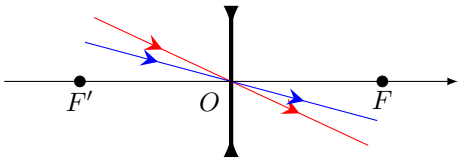
Definition : Lentille mince

Une lentille sphérique est un milieu transparent, homogène et isotrope limité par deux dioptres sphériques. Les lentilles convergentes sont les lentilles à bords fin. On a deux types de lentilles, les lentilles convergentes à bords minces et les lentilles divergentes à bords épais dont on définit trois points remarquables :

- **Centre optique** O **:** Les rayons qui passent par le point O ressortent avec le même angle par rapport à l'axe optique.

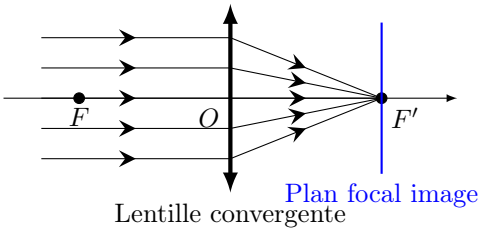


Lentille convergente

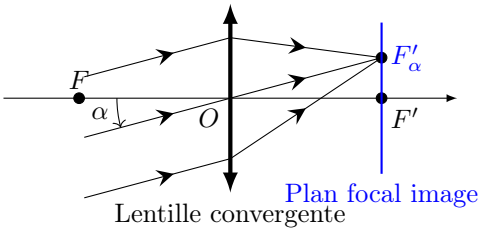


Lentille divergente

- **Foyer image** F' **:** La position de l'image à travers (S) d'un objet situé sur l'axe optique à l'infini (faisceau de rayons parallèle à l'axe optique). Le plan orthogonal à l'axe passant par F' est appelé **plan focal image**. Par application de l'aplanétisme on définit alors les **foyer secondaire image** F'_α situé dans le plan focal image, position de l'image d'un point situé à l'infini avec un faisceau de rayon parallèle à l'axe optique d'un angle α.

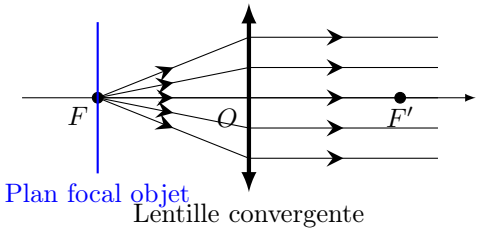


Lentille convergente

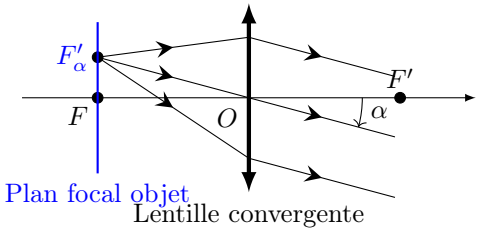


Lentille convergente

- **Foyer objet** F **:** La position de l'objet situé sur l'axe optique qui donne une image à travers (S) située sur l'axe optique à l'infini (faisceau de rayons parallèle à l'axe optique). Le plan orthogonal à l'axe passant par F est appelé **plan focal objet**. Par application de l'aplanétisme on définit alors les **foyer secondaire objet** F_α situé dans le plan focal objet, position de l'objet d'un point qui donne une image à travers (S) située à l'infini avec un faisceau de rayon parallèle à l'axe optique d'un angle α.



Lentille convergente



Lentille convergente

Definition : Distance focale et vergence

On définit également la **distance focale image** d'une lentille $f' = \overline{OF'}$ et la **distance focale objet** d'une lentille $f = \overline{OF}$ avec $f = -f'$.

On définit la **vergence** comme l'inverse de la distance focale image, elle s'exprime en dioptrie notée δ homogène à l'inverse d'une longueur.

$$V = \frac{1}{f'}$$

Par définition on a :

- $f' > 0$ et $V > 0$ pour une lentille convergente ;

- $f' < 0$ et $V < 0$ pour une lentille divergente ;

Definition : Grandissement

Pour un objet étendu AB on définit le **grandissement** comme le rapport de la mesure algébrique $\overline{A'B'}$ de l'image par la mesure algébrique $\overline{AB}$ de l'objet :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Si $|\gamma| > 1$ l'image est agrandie, si $\gamma > 0$ l'image est droite.

Formules de conjugaisons

À partir d'un schéma, on peut relier par le calcul les différentes distance en utilisant le théorème de Thales. On obtient alors les relations de conjugaisons :

Grandissement : $\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \dfrac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$

Formule de Newton : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 = -f^2$

Formule de Descartes : $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}$

Méthode : Construction graphique des images

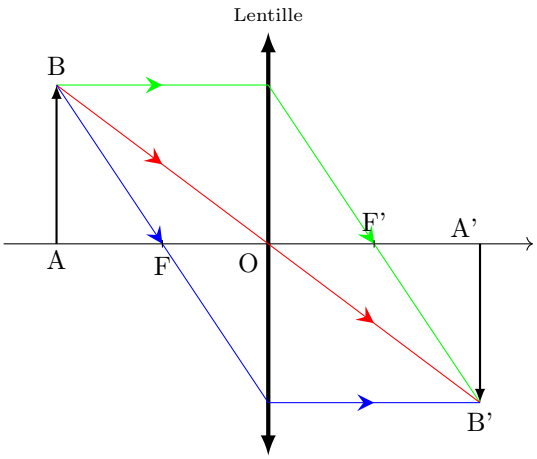
Pour obtenir l'image $A'B'$ d'un objet AB à travers une lentille (convergente ou divergente), on utilise trois rayons :

- Un rayon incident passant par B et O qui donne un rayon émergent passant par O et B' parallèle au rayon incident (pas dévié) ;
- Un rayon incident passant par B et parallèle à l'axe optique qui donne un rayon émergent passant par F' et B' ;
- Un rayon incident passant par B et F qui donne un rayon émergent passant par B' et parallèle à l'axe optique.

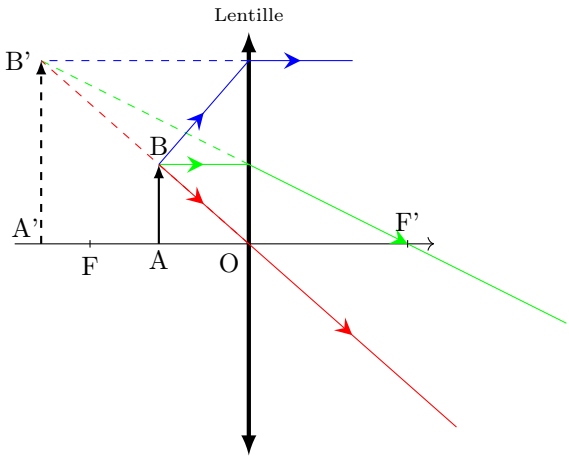
Deux rayons suffisent pour tracer B', mais une infinité de rayons sont émis par B pour former l'image B'. A' est la projection de B' sur l'axe optique car le système est aplanétique.

Exemple :

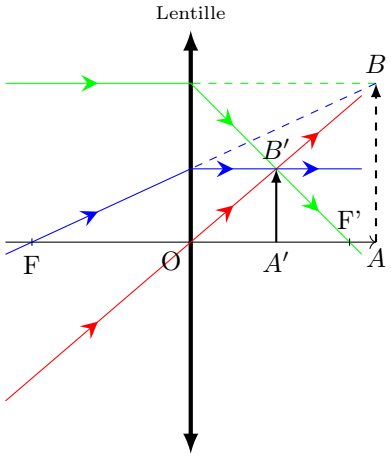
Cas 1 : AB est réel placé avant F d'une lentille convergente $\longrightarrow$ $A'B'$ réelle. Représenté ci-dessus.



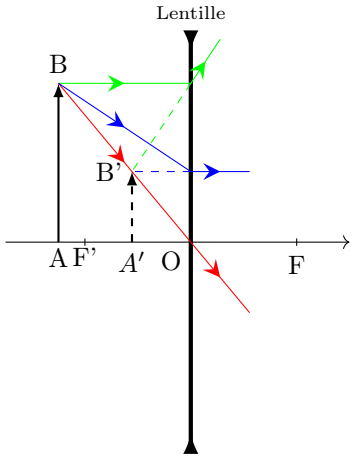
Cas 2 : AB est réel placé après F d'une lentille convergente $\longrightarrow$ $A'B'$ virtuelle.



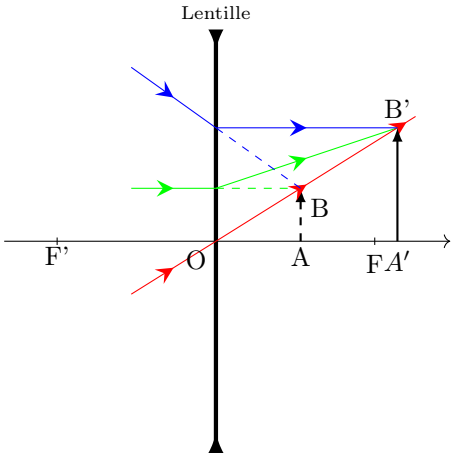
Cas 3 : AB est virtuel après O d'une lentille convergente $\longrightarrow$ $A'B'$ réelle.



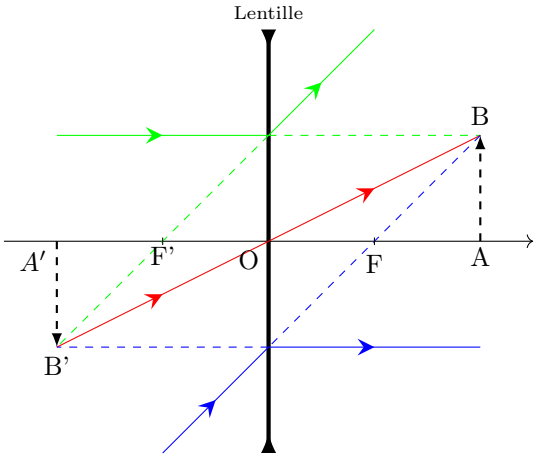
Cas 4 : AB est réel placé avant O d'une lentille divergente $\longrightarrow$ $A'B'$ virtuelle.



Cas 5 : AB est virtuel placé avant F d'une lentille divergente $\longrightarrow$ $A'B'$ réelle.



Cas 6 : AB est virtuel après F d'une lentille divergente $\longrightarrow$ $A'B'$ virtuelle.



3 Projection d'une image

Definition : Observation d'une image projetée

L'œil ne peut observer directement qu'une image réelle lorsque celle-ci est projetée sur un écran, c'est-à-dire qu'un écran est à la position de l'image réelle.

On verra dans le prochain chapitre le fonctionnement de l'œil et comment utiliser des instruments pour observer des images qui pourront être situées à l'infini ou de naturelle virtuelle.

Propriété : Condition de projection

On considère un objet AB dont on veut projeter l'image réelle $A'B'$ à travers une lentille de distance focale f' sur un écran situé à une distance D de AB. La projection est possible si :

$$D \geqslant 4f'$$

Démonstration : On pose $\overline{AA'} = D$ et $\overline{OA} = -x$ d'où $\overline{OA'} = D - x$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f''} \quad \Longleftrightarrow \quad x + D - x = f'(D-x)x \quad \Longleftrightarrow \quad f'x^2 - f'Dx + D = 0$$

L'équation du second degré possède une ou deux racines réelles si le discriminant $\Delta = f'^2 D^2 - 4Df' \geqslant 0$ soit $D \geqslant 4f'$

Ondes 3 : Systèmes optiques

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
1.1. Formation des images	
Modèles de quelques dispositifs optiques L'œil. Punctum proximum, punctum remotum.	Modéliser l'œil comme l'association d'une lentille de vergence variable et d'un capteur plan fixe. Citer les ordres de grandeur de la limite de résolution angulaire et de la plage d'accommodation.
L'appareil photographique.	Modéliser l'appareil photographique comme l'association d'une lentille et d'un capteur. Construire géométriquement la profondeur de champ pour un réglage donné. **Étudier l'influence de la focale, de la durée d'exposition, du diaphragme sur la formation de l'image.**

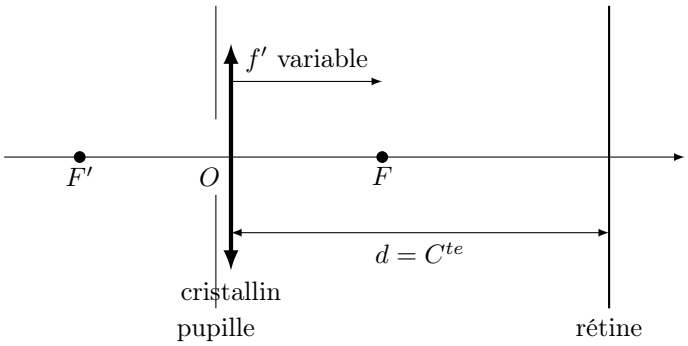
1 L'œil

Definition : Modélisation

L'œil est composé de différentes parties :

- L'iris composé d'une pupille dont le diamètre est variable (de 2 mm à 8 mm) $\Longleftrightarrow$ diaphragme ;
- Le cristallin est assimilable à une lentille convergente de distance focale image variable ;
- La rétine est constituée de cellules sensible à la lumière (cônes et bâtonnets) $\Longleftrightarrow$ Ecran.

On modélise l'œil par une lentille mince convergente variable formant une image sur un écran fixe :



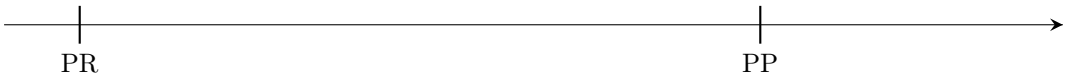
Propriété : Plage d'accomodation

On définit la plage d'accomodation comme la zone de l'espace ou l'oeil peut accomoder pour former une image nette. La plage d'accomodation est située entre :

- Le Punctum Remotum (PR) le point le plus loin que l'on peut voir net au repos ($f' = f'_{max}$) ;
- Le punctum proximum (PP) le point le plus proche que l'on peut voir net en accomodant ($f' = f'_{min}$).

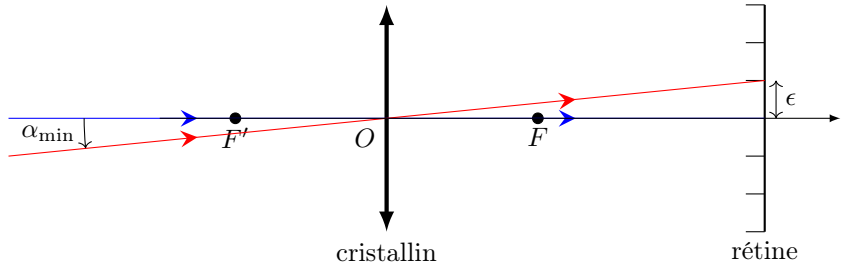
accomoder = faire diminuer la distance focale de l'oeil.

au repos = distance focale maximale.



Propriété : Limite de résolution angulaire

La rétine est composée de cellules qui permettent de détecter l'intensité lumineuse ainsi que la couleur. Ces cellules possèdent une taille caractéristique qu'on nomme ϵ. Si deux images se forment sur la même cellules, elle superpose celles-ci, donc pour distinguer deux images il faut qu'elles se forment sur deux cellules différentes et qu'elles soient distante de ϵ au minimum et donc les rayons arrivant dans l'œil doivent arriver avec un angle minimum entre eux. Ceci constitue la limite de résolution angulaire.

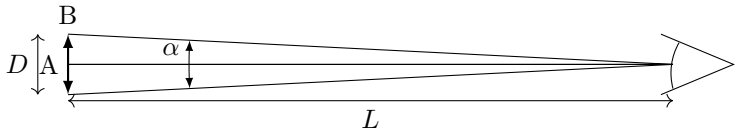


Remarque : Ordre de grandeur

Pour un oeil normal, le PR est situé à l'infini et le PP à environs 25 cm pour un adulte. Dans de bonnes conditions d'éclairement (ni trop sombre, ni trop lumineux), l'œil distingue des détails d'environ 1 minute d'arc, soit 3×10^{-4} rad.

Definition : Diamètre apparent

On définit le diamètre apparent d'un objet de diamètre D situé à une distance L comme l'angle α sous lequel on voit l'objet :



Propriété : Le grossissement

On définit le grossissement G comme :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

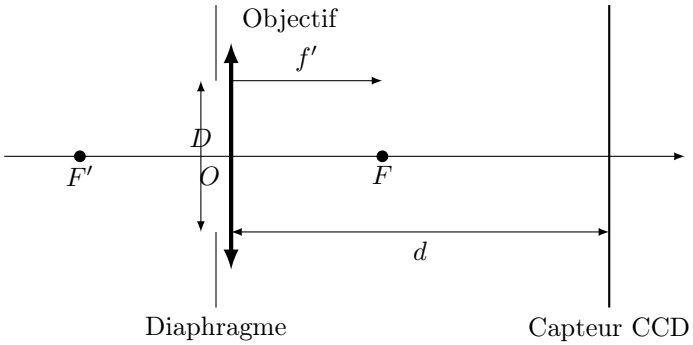
avec α' le diamètre apparent de l'image vu par l'œil à travers un instrument d'optique, et α le diamètre apparent de l'objet vu directement par l'œil.

2 L'appareil photo

Definition : Modélisation

Un appareil photo est constitué :

- D'un objectif, modélisé par une lentille convergente de distance focale f' ;
- D'un diaphragme, ouverture de forme circulaire de diamètre D réglable situé juste devant la lentille ;
- D'un capteur CCD modélisé par un écran situé à une distance d réglable de la lentille.



Propriété : Mise au point

Pour obtenir une image nette d'un point A donné, il faut que l'image A' soit située sur le capteur. La distance d doit alors respecter

$$\overline{OA'} = d$$

Exemple : Mise au point à l'infini

Pour un appareil photo avec un objectif de focale f', lors d'une mise au point sur un objet situé à l'infini. La distance d

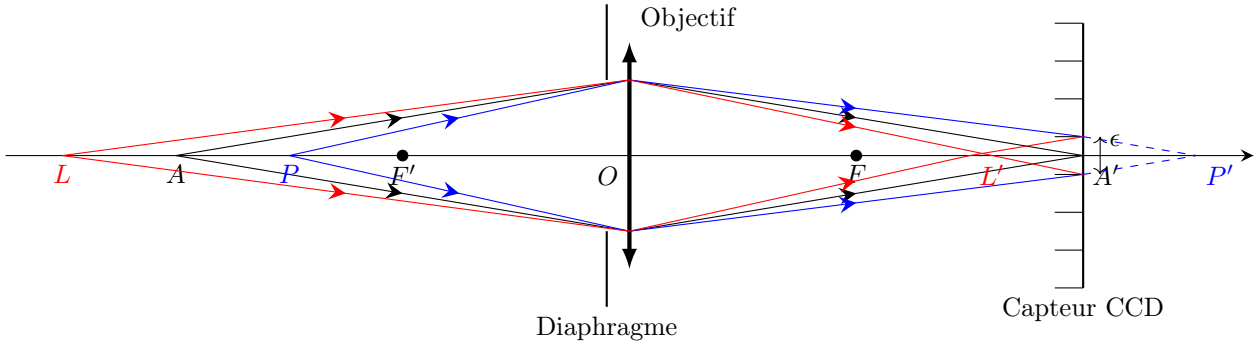
entre l'objectif et le capteur doit valoir

$$d = f'$$

Propriété : Profondeur de champ

Le capteur d'un appareil photo possède des cellules de taille ϵ qui renvoie la même image que l'image formée sur la cellule soit ponctuelle ou sous forme de tâche lumineuse.

On en déduit que pour un réglage donné tel que $d = \overline{OA'}$ pour faire la mise au point d'un point objet A. On peut obseerver un point P plus proche et un point L plus loin tel que les faisceaux lumineux entrant dans l'objectif et convergeant en P' et L' forment une tâche lumineuse sur le capteur de diamètre infèrieur à ϵ.



On peut alors voir net sur l'image renvoyée par le capteur l'ensemble des objet situés entre P et L ce qui constitue la profondeur de champ de l'appareil. Plus le diaphragme est ouvert, plus la profondeur de champ est réduite.

3 Instrument afocal :

Definition : Instrument afocal

Un système afocal ne possède pas de foyer, ceux-ci sont positionné en l'infini. Les instruments afocaux permettent d'observer des objets situés à l'infini avec un œil normal sans accomoder.

Propriété : Modélisation

On cherchera souvent à modéliser un instrument afocal comme l'association de 2 lentilles :

- Un objectif de focale f'_1 qui est la lentille la plus proche de l'objet.
- Un oculaire de focale f'_2 qui est la lentille derrière laquelle on vient positionner notre œil.

Propriété : Image intermédiaire

L'objectif forme une première image d'un objet AB à observer. L'objet situé à l'infini est noté $A_\infty B_\infty$ et forme une image à travers l'objectif notée A_1B_1 appelée image intermédiaire et située dans le plan focal image de l'objectif.

Cette image est l'objet de vis à vis de l'oculaire qui doit former une image à l'infini notée $A'_\infty B'_\infty$ pour être vue sans accomoder. L'image intermédiaire est donc également dans le plan focal objet de l'oculaire.

$$A_\infty B_\infty \xrightarrow[\text{Objectif : } A_1 = F'_1]{} A_1B_1 \xrightarrow[\text{Oculaire : } A_1 = F_2]{} A'_\infty B'_\infty$$

Propriété : Distance entre les lentilles

On désigne par $\Delta = \overline{O_1O_2}$ la distance entre l'objectif de focale f'_1 et l'occulaire de focale f'_2. D'après la définition de l'image intermédiaire pour un système afocale on a forcément :

$$\Delta = f'_1 + f'_2$$

Exemple : La lunette astronomique

La lunette est composée d'une lentille convergente L_1 de distance focale $f'_1 = 60\,\text{cm}$ qui sert d'objectif. Ainsi que d'une lentille divergence L_2 de distance focale $f'_2 = -5\,\text{cm}$ qui sert d'oculaire.

$$A_\infty B_\infty \longrightarrow A_1B_1 \longrightarrow A'_\infty B'_\infty$$

Etude de l'oculaire : Pour que $A'_\infty B'_\infty$ soit situé à l'infini, il faut que $A_1 = F_2$ le foyer objet de la lentille L_2.

Etude de l'objectif :Or si $A_\infty B_\infty$ est à l'infini, alors $A_1 = F'_1$ le foyer image de la lentille L_1. On a alors $F'_1 = F_2 = A_1$ le foyer objet de l'oculaire est confondu avec le foyer objet de l'objectif.

Pour tous les sytèmes afocaux on a le foyer image de l'objectif F'_{ob} qui est confondu avec le foyer image de l'oculaire F_{oc}.

La grossissement vaut $G = -\dfrac{f'_1}{f'_2}$ positif donc image droite.

Les rayons incidents de l'objectif sont parallèles avec un diamètre apparent de l'objet α. Ils sont ensuite déviés par L_1 et convergent vers B_1 l'image intermédiaire. Avant de converger, ils sont déviés par L_2 et les rayons émergents sont parallèles et le diamètre apparent de l'image est α'.

On peut calculer le grossissement angulaire : $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$

α' est le diamètre apparent de l'image $\tan\alpha' = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_2A_1}} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{-f'_2}$.

Dans les conditions de Gauss : $\alpha' \ll 1 \Longrightarrow \tan\alpha' \approx \alpha'$

α est le diamètre apparent de l'objet $\tan\alpha = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_1A_1}} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{f'_1}$.

Dans les conditions de Gauss : $\alpha \ll 1 \Longrightarrow \tan\alpha \approx \alpha'$

On a alors : $G = \dfrac{-f'_1}{f'_2} = 12$ l'image est droite.

Ondes 4 : Propagation d'un signal

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
1.6. Propagation d'un signal	
Exemples de signaux. Signal sinusoïdal.	Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
Propagation d'un signal dans un milieu illimité, non dispersif et transparent Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle non dispersive. Célérité, retard temporel.	Écrire les signaux sous la forme f(x-ct) ou g(x+ct). Écrire les signaux sous la forme f(t-x/c) ou g(t+x/c). Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.
Modèle de l'onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle. Vitesse de phase, déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.	Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique. Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase. Relier le déphasage entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation. **Mesurer la vitesse de phase, la longueur d'onde et le déphasage dû à la propagation d'un phénomène ondulatoire.**
Milieux dispersifs ou non dispersifs.	Définir un milieu dispersif. Citer des exemples de situations de propagation dispersive et non dispersive.
Phénomène d'interférences Interférences entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence. Interférences entre deux ondes lumineuses de même fréquence. Exemple du dispositif des trous d'Young éclairé par une source monochromatique. Différence de chemin optique. Conditions d'interférences constructives ou destructives. Formule de Fresnel.	Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives. Déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage. Relier le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique. Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique entre les deux ondes. Exploiter la formule de Fresnel fournie pour décrire la répartition d'intensité lumineuse. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour visualiser et caractériser le phénomène d'interférences de deux ondes.**

1 Notion d'onde

Definition : Onde

Un signal est la variation temporelle et/ou spatiale d'une ou de plusieurs grandeurs physiques.

On appelle onde un phénomène physique dans lequel une perturbation locale se déplace dans l'espace sans qu'il y ait de déplacement de matière en moyenne. Toute grandeur physique, nulle dans l'état de repos et apparaissant avec la perturbation, est appelée signal physique transporté par l'onde.

Definition : Célérité d'une onde

On appelle célérité d'une onde sa vitesse de propagation.

Remarque : Grandeurs physiques

- Onde accoustiques : vitesse-masse volumique ;
- Onde électromagnétique : Champ électrique-Champ magnétique ;
- Onde électrique : tension-intensité du courant.

Definition : Milieu dispersif/non-dispersif

On définit un milieu non-dispersif comme un milieu où toutes les ondes se propagent à la même vitesse.

Par opposition, on définit un milieu dispersif comme un milieu où la vitesse de propagation des ondes dépend de la fréquence. De cette manière une onde composée de plusieurs fréquence va se "disperser".

Definition : Onde progressive 1D

On définit une onde progressive comme une onde se propageant sans transport de matière selon une direction $\vec{u}_x$ dans un milieu :

- non dispersif : les ondes ne se déforment pas ;
- non dissipatif : l'amplitude de l'onde est constante.

On peut alors modéliser l'enveloppe de l'onde par une fonction f ou g tel que :

- Pour une onde $s_+(x,t)$ se propageant dans le sens des x croissants :

$$s_+(x,t) = f(x-ct) \text{ ou } s_+(x,t) = g\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

- Pour une onde $s_-(x,t)$ se propageant dans le sens des x décroissants :

$$s_-(x,t) = f(x+ct) \text{ ou } s_-(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

où c la célérité de l'onde.

Propriété : retard temporel

Si on considère un signal émis en O se déplançant dans le sens des x croissants. On mesure le signal en M et en N on trace respectivement :

- $s_O(t) = s(x=0,t)$;
- $s_M(t) = s(x=x_M,t)$;
- $s_N(t) = s(x=x_N,t)$.

avec τ_M et τ_N le temps de propagation de l'onde de O vers M puis N. On a alors la relation :

$$s_M(t) = s_O(t-\tau_M) \quad \text{et} \quad s_N(t) = s_O(t-\tau_N) \quad \text{donc } s(x,t) = s_O(t-\tau(x))$$

Comme l'onde se propage dans le sens des x croissants on peut poser :

$$\tau(x) = \frac{x}{c}$$

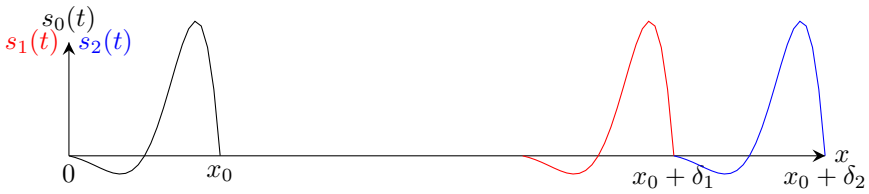
Pour une onde qui se propage dans le sens des x décroissants on peut poser :

$$\tau(x) = -\frac{x}{c}$$

Propriété : Déplacement spatial

Si on considère un signal émis en O se déplançant dans le sens des x croissants. On prend une "photo" de l'onde à l'instant t_0, puis $t_1 > t_0$ et $t_2 > t_1$:

- $s_0(x) = s(x, t=t_0)$;
- $s_1(x) = s(x, t=t_1)$;
- $s_2(x) = s(x, t=t_2)$.



avec x_0 la position où le début du signal est reçu à l'instant t_0, δ_1 et δ_2 les déplacement de l'onde par rapport à l'instant t_0 aux instant t_0, t_1 et t_2. On a alors la relation :

$$s_1(x) = s_0(x-\delta_1) \quad \text{et} \quad s_2(x) = s_0(x-\delta_2) \text{ donc } s(x,t) = s_0(x-\delta(t))$$

Comme l'onde se propage dans le sens des x croissants on peut poser :

$$\delta(t) = +c(t-t_0)$$

Pour une onde qui se propage dans le sens des x décroissants on peut poser :

$$\delta(t) = -c(t-t_0)$$

2 Ondes progressives harmoniques :

Definition : Onde progressive sinusoïdale

Une onde progressive sinusoïdale de pulsation temporelle ω se propageant dans le sens des x croissants avec la vitesse c a pour expression :

$$s(x,t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

avec k le vecteur d'onde (pulsation spatiale) tel que :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma \qquad \sigma \text{ est le nombre d'onde (fréquence spatiale)}$$

Propriété : Vitesse de phase

La célérité d'une onde progressive harmonique est appelée vitesse de phase et s'exprime en fonction de ω et k ou f et λ :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \lambda f$$

avec f la fréquence de l'onde et λ sa longueur d'onde.

Propriété : Déphasage entre les signaux en deux points

Si on considère une onde émise en O et qui se propage dans le sens des x croissants telle que :

$$s(x=0,t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \Longrightarrow s(x,t) = A_0 \cos(\omega t - kx) = A_0 \cos(\omega t + \varphi(x))$$

avec $\varphi(x) = -kx + \varphi_0$ le déphasage de l'onde en x par rapport à l'onde émise en O à l'instant t.
Alors le déphasage entre $s_1(t)$ l'onde reçue en x_1 et $s_2(t)$ l'onde reçue en x_2 vaut :

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = -k(x_1 - x_2) = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2)$$

Propriété : Signaux en phase / en opposition de phase

- Si le déphasage vaut $m \times 2\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ alors les signeux sont en phase ;
- Si le déphasage vaut $\left(m + \frac{1}{2}\right)$ avec $m \in \mathbb{Z}$ alors les signaux sont en opposition de phase.

Remarque : Ordre de grandeur de fréquences

- Ondes accoustiques audibles : $f = 20\,\text{Hz}$ à $20 \times 10^3\,\text{Hz}$;
- Ondes électromagnétiques téléphoniques : $f = 900\,\text{MHz}$ à $2100\,\text{MHz}$;
- Ondes électromagnétiques wifi : $f = 2{,}4\,\text{GHz}$ à $5\,\text{GHz}$;
- Ondes électromagnétiques EDF : $f = 50\,\text{Hz}$;
- Ondes optiques visibles : $f \sim 500\,\text{THz}$.

Exemple : Milieu dispersif

- La propagation d'ondes élastiques transversales dans un solide lorsque la longueur d'onde est grande devant la dimension transversale du milieu :
$$v_\varphi(k) = \alpha k \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$
- La propagation d'ondes à la surface de l'eau : $v_\varphi(k) = \sqrt{\frac{g}{k}}$
- La propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu matériel (verre) : $v_\varphi(\lambda) = \frac{c}{n(\lambda)} < c$

Exemple : Milieu non dispersif

- La propagation d'ondes acoustiques dans un fluide : $c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$
- La propagation des ondes élastiques longitudinales dans un solide : $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho_0}}$
- La propagation des ondes électromagnétiques dans la vide : $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

3 Phénomène d'interférences

Definition : Interférences

Lorsque deux ondes de même nature se propagent dans une zone de l'espace, elles s'additionnent en tout point et à chaque instant. Lorsque l'onde résultante a une amplitude modulée dans l'espace. On a alors un phénomène d'interférences.

Les conditions d'interférences sont :

- Ondes de même nature ;
- Ondes harmoniques ;
- Ondes de même fréquence.

Definition : Interférences constructives /destructives

La superposition de deux ondes harmoniques qui interfèrent ensemblent est une onde harmonique de même fréquence et d'amplitude $A(M)$ qui dépend du point M où on observe l'onde.

On dit que les interférences sont constructives aux points M où l'amplitude de l'onde résultante et maximale.

$$A(M) = A_{\max}$$

On dit que les interférences sont déstructives aux points où l'amplitude de l'onde résultante et minimale.

$$A(M) = A_{\min}$$

Propriété : Somme de deux ondes harmoniques

On considère deux ondes harmoniques de même fréquence qu'on note émis en x_1 et x_2 :

$$s_1(x,t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1(x)) \quad \text{et} \quad s_2(x,t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2(x))$$

On peut montrer que :

$$s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi(x)) \text{ avec } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1(x) - \varphi_2(x))}$$

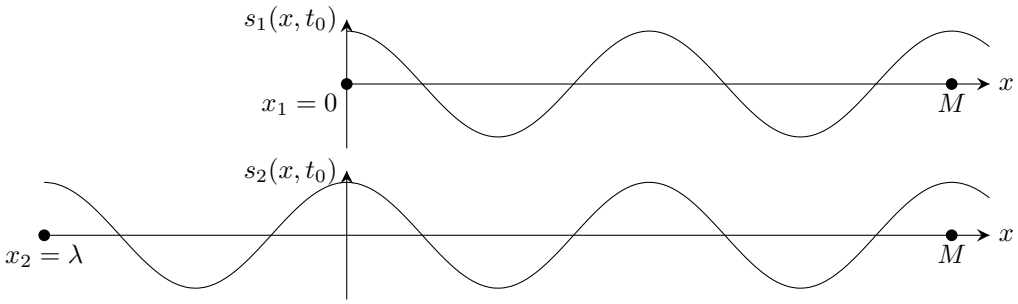
Avec $\varphi_1(x) = -k(x - x_1)$ et $\varphi_2(x) = -k(x - x_2)$, on a alors :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[\frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}\right]}$$

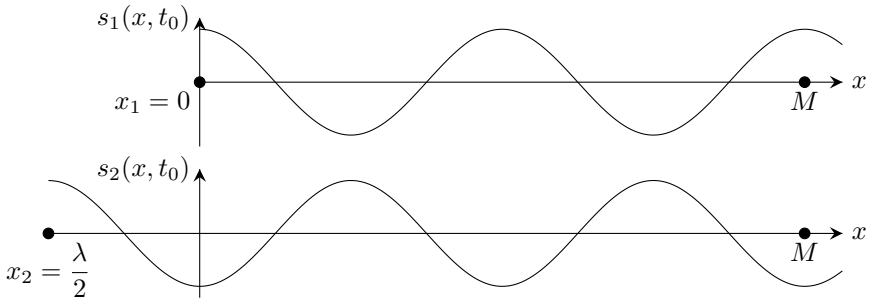
Propriété : déphasage et interférences

On montre alors que pour que les interférences soient :

- constructives : $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = m \times 2\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ soit $A_{\max} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$;



- déstructives : $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times m$ avec $m \in \mathbb{Z}$ soit $A_{\min\ddagger} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$.



4 Interférences lumineuses

Propriété : Ondes cohérentes

Dans le domaine de l'optique on dit que deux ondes peuvent produire une figure d'interférence elles sont cohérentes.

La particularité des ondes lumineuse est que les récepteurs (capteur ou œil) sont sensible à l'intensité lumineuse :

$$I(M) = K\langle s^2(M,t)\rangle = \frac{1}{2}KA^2(M)$$

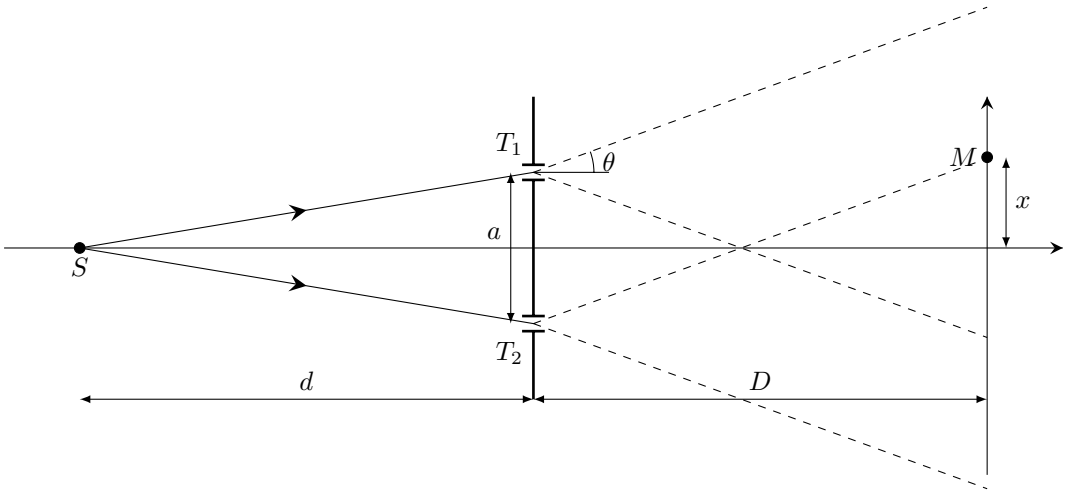
pour une onde harmonique lumineuse.

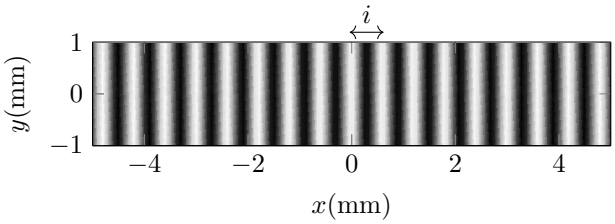
Definition : Dispositif des trous de Young

Le dispositif de l'expérience représenté sur la figure suivante comporte :

- Une source ponctuelle S monochromatique émettant une onde de longueur d'onde λ_0 dans le vide ;
- Un écran opaque percé de deux trous S_1 et S_2 identiques de diamètre très petit (de l'ordre de 0,1 nm) dont la distance $a = S_1S_2$ est de l'ordre du millimètre ;
- Un écran de projection parallèle à S_1S_2 placé à une distance D des trous ; D est de l'ordre du mètre.

La lumière émise par S arrive en un point M de l'écran en passant soit par le trou S_1, soit par le trou S_2. Ceci nécessite une déviation de la lumière au niveau de chaque trou rendue possible par le phénomène de diffraction provoqué par la très petite taille des trous. Ainsi, les trous de Young se comportent comme des sources ponctuelles appelées sources secondaires.





Definition : Chemin optique

On définit le chemin optique (OM) comme la distance parcouru par une onde lumineuse dans le vide pendant la durée du trajet de l'onde a O à M dans le milieu d'indice n.

On calcule le chemin optique en multipliant la longueur parcouru par une onde depuis sa source multiplié par l'indice n du milieu traversé, soit :

$$(OM) = ct_{OM} = \frac{c}{v_\varphi} OM = nOM$$

Propriété : Différence de marche et interférences

On définit la différence de marche comme la différence de chemin optique entre deux ondes qui interfèrent au point M. Sur le dispositif des trous de Young, on compare un rayon provenant de la source S et passant par S_1 jusqu'en M à un rayon provenant de S et passant par S_2 jusqu'en M :

$$\delta(M) = (SM)_1 - (SM)_2 = [(SS_1) + (S_1M)] - [(SS_2) + (S_2M)] = (S_1M) - (S_2M)$$

On a alors la relation avec le déphasage :

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c}\delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)$$

On en déduit alors les conditions d'interférence :

- constructive si $\delta(M) = m \times \lambda_0$;
- déstructive si $\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times \lambda_0$.

On retient la formule de Fresnel :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_2 I_1}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)\right)$$

Exemple : Application

Calculons la différence de marche pour le dispositif des trous de Young :

$$(S_1M) = n\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \quad \text{et} \quad (S_2M) = n\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$$

En sachant que $D \gg x$ et $D \gg y$:

$$(S_1M) \simeq nD + n\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D} \quad \text{et} \quad (S_2M) \simeq nD + n\frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D}$$

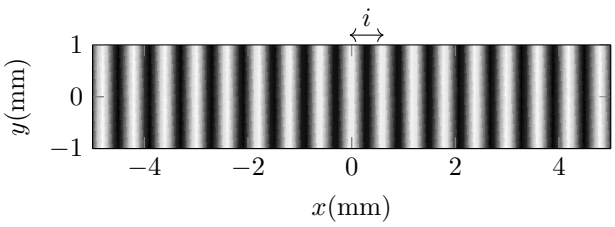
Soit $\delta(x) \simeq \frac{nax}{D}$.

On en déduit alors les positions x_m franges d'interférences constructives :

$$\delta(x_m) = \frac{nax_m}{D} = m \times \lambda_0 \Longrightarrow x_m = \frac{m\lambda_0 D}{na}$$

On peut en déduire l'interfrange, la distance entre deux franges lumineuse de maximum d'intensité.

$$i = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda_0 D}{na}$$



Deuxième partie

Signaux

Liste des chapitres Signaux

1 Lois de l'électrocinétique **27**
1 Les grandeurs électriques . . . 27
2 Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) : . . . 28
3 Dipôles linéaires : . . . 29
4 Associations de résistance : . . . 31
2 Circuits linéaires du premier ordre **33**
1 Généralités : . . . 33
2 Réponse à un échelon du circuit RC . . . 35
3 Régime libre d'un circuit RC . . . 38
4 Circuit RL . . . 39
5 Capacité numérique : Méthode d'Euler . . . 40
3 Circuits linéaires du deuxième ordre **41**
1 Modèle de l'oscillateur harmonique électrique . . . 41
2 Oscillateur électrique amorti . . . 43
3 Régime apériodique . . . 44
4 Régime critique . . . 45
5 Régime pseudo-périodique . . . 46
6 Exemples et remarques . . . 48
4 Régime des oscillations forcées **49**
1 Régime sinusoïdal forcé (RSF) . . . 49
2 Étude d'un circuit : . . . 51
3 Exemple de résonance en intensité . . . 52
4 Exemple de résonance en tension . . . 55
5 Filtres d'ordre 2 et résonance **57**
1 Description d'un filtre . . . 57
2 Filtres d'ordre 1 . . . 58
3 Filtres d'ordre 2 . . . 60
4 Influence du circuit . . . 62
5 Signaux périodiques . . . 63
6 Capacité numérique : Filtrage numérique d'un signal périodique . . . 65

Signaux 1 : Lois de l'électrocinétique

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
1.2. Signaux électriques dans l'ARQS	
Charge électrique, intensité du courant. Potentiel, référence de potentiel, tension. Puissance.	Justifier que l'utilisation de grandeurs électriques continues est compatible avec la quantification de la charge électrique. Exprimer l'intensité du courant électrique en termes de débit de charge. Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence. Relier la loi des nœuds au postulat de la conservation de la charge. Utiliser la loi des mailles. Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur. Citer les ordres de grandeur des intensités et des tensions dans différents domaines d'application.
Dipôles : résistances, condensateurs, bobines, sources décrites par un modèle linéaire.	Utiliser les relations entre l'intensité et la tension. Citer des ordres de grandeurs des composants R, L, C. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance. Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine. Modéliser une source en utilisant la représentation de Thévenin.
Association de deux résistances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente. Établir et exploiter les relations des diviseurs de tension ou de courant.
Résistance de sortie, résistance d'entrée.	**Évaluer une résistance d'entrée ou de sortie à l'aide d'une notice ou d'un appareil afin d'appréhender les conséquences de leurs valeurs sur le fonctionnement d'un circuit.** **Étudier l'influence des résistances d'entrée ou de sortie sur le signal délivré par un GBF, sur la mesure effectuée par un oscilloscope ou un multimètre.**

Remarque : Contexte

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude de circuit électrique simple. On se restreint à des circuits de taille de l'ordre du mètre. Pour ce chapitre on se contentera uniquement d'étudier les régimes continu, c'est-à-dire que toutes les grandeurs seront constante par rapport au temps. Cependant toutes les propriétés restent valable en régime dépendant du temps.

1 Les grandeurs électriques

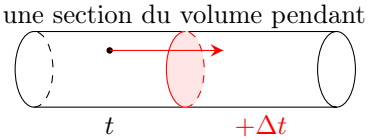
Definition : La charge électrique

La charge électrique est une grandeur scalaire algébrique (positive ou négative) vérifiant les propriétés suivantes :

- La charge est une grandeur additive.
- La charge est une grandeur conservative.
- La charge est une grandeur quantifiée. On définit la charge élémentaire notée $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C. Une charge ne peut être qu'un multiple de e de telle sorte que : $q = \pm Ze$.

Definition : L'intensité du courant électrique

On définit l'intensité du courant I dans un volume où les charges se déplacent comme le nombre de charge positive Δq qui traverse une section du volume pendant une durée Δt.



On peut alors calculer l'intensité du courant I :

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \qquad \text{(A)}$$

Comme les porteurs de charges sont les électrons, le sens du courant est opposé au sens de déplacement des électrons.

Definition : Le potentiel électrique

Le potentiel électrique est proportionnel à l'énergie potentielle électrique du circuit et s'exprime en V. C'est lui qui met en mouvement les électrons qui sont les porteurs de charges.

On définit généralement comme potentiel nul, la masse ou la borne - d'un générateur ou d'une pile.

Definition : La tension électrique

On définit dans un circuit la tension comme la différence de potentiel électrique entre deux points du circuit :

$$U_{AB} = V_B - V_A \qquad \text{V}$$

Definition : Dimension d'une grandeur

On a défini arbitrairement 7 dimensions fondamentales, à partir desquelles on peut construire toutes les autres :

- la longueur notée L ;
- le temps noté T ;
- la masse notée M ;
- l'intensité du courant électrique notée I ;
- la température notée Θ ;
- la quantité de matière notée n ;
- l'intensité lumineuse notée J.

Pour une grandeur quelconque G, la dimension de G sera noté $[G]$. Si $[G] = L$ on dira "G est homogène à une longueur". Si G est sans dimension on notera alors $[G] = 1$.

Remarque : Ordre de grandeurs

Tensions :

- L'électronique signal : $U \sim 10\,\text{V}$.
- L'électrotechnique : $230\,\text{V}$;
- Orages : $500\,\text{MV}$;

Intensité du courant :

- L'électronique signal : $I \sim 1\,\text{mA}$.
- L'électrotechnique : $10^2\,\text{A}$;
- Orages : $10^4\,\text{A}$;
- Seuil de perception par le corps : $1\,\text{mA}$

Remarque : Notation régime continu/régime variable

Pour une tension stationnaire (continue), on note U en majuscule. Pour une tension variable, on note $u(t)$ en miniscule. Idem pour $I/i(t)$.

2 Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) :

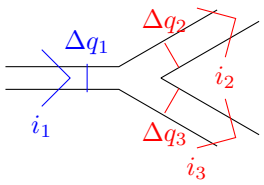
Definition : Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

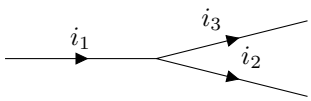
L'ARQS consiste à négliger le délai de propagation qui est égal à environ $\frac{L}{c}$, où L est la longueur du fil entre l'interrupteur et la lampe et c la vitesse de la lumière dans le vide.

On peut se placer dans ce cadre si le temps Δt de propagation des ondes dans le circuit est **petit** devant le temps caractéristique τ de variation de la source : $\Delta t = \dfrac{L}{c} \ll \tau$

Loi de Kirchhoff des nœuds

Soit un nœud définit comme la jonction entre plusieurs fil, la conservation de la charge nous permet de dire que :





La charge contenue dans le nœud entre t et $t + \Delta t$ varie de $\Delta q = 0$.

Par conservation de la charge on peut également écrire :

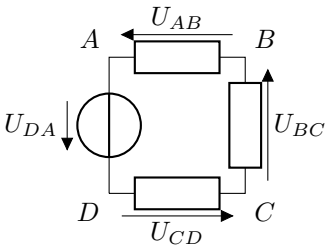
$$\Delta q = \Delta q_1 - \Delta q_2 - \Delta q_3$$

Si on divise par Δt on obtient la loi des nœuds :

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Loi de Kirchhoff des mailles

Une maille conrrespond à une boucle de conducteur dans un circuit.
On considère un circuit à une seule maille :



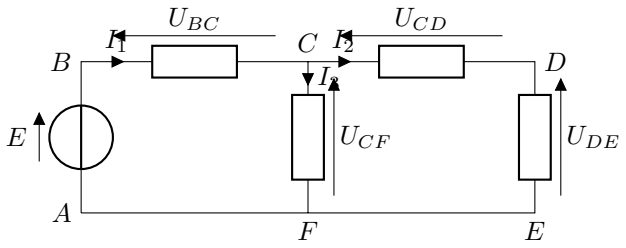
$$V_C - V_C = V_C - V_D + V_D - V_A + V_A - V_B + V_B - V_C$$
$$0 = U_{CD} + U_{DA} + U_{AB} + U_{BC}$$

On en déduit également que $U_{AB} = -U_{BA}$.

La somme des tensions en convention générateur = la somme des tensions en convention récepteur.

Exemple : Circuit à deux mailles

Soit le circuit suivant :



On applique la loi des mailles à la maille $ABCF$:

$$E = U_{BC} + U_{CF}$$

On applique la loi des mailles à la maille $ABDE$:

$$E = U_{BC} + U_{CD} + u_{DE}$$

On peut aussi appliquer la loi des mailles à la maille $CDEF$:

$$U_{CF} = U_{CD} + U_{DE}$$

Pour un circuit à deux mailles on a deux équations indépendante maximum. La troisième équation peut se déduire des deux autres.

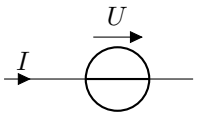
On peut également appliquer la loi des nœuds au nœud C :

$$I_1 = I_2 + I_3$$

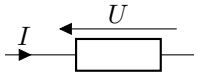
Definition : Convention générateur/récepteur

Il n'y a pas de sens naturel pour les tensions à priori. On définit alors les conventions suivantes :

- On définit la convention générateur lorsque le courant et la tension sont fléchés dans le même sens :

générateur 

- On définit la convention récepteur quand la tension et le courant son fléchés dans des sens opposés :

récepteur 

3 Dipôles linéaires :

Definition : Dipôle linéaire

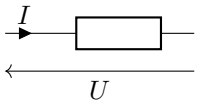
En électricité, un dipôle est un élément qui possède deux bornes avec une tension entre les deux bornes U. Le courant entre par une borne et sort par l'autre avec la même intensité I.

On peut pour un dipôle tracer la caractéristique statique en régime stationnaire $I = f(U)$. On définit un dipôle linéaire si sa caractéristique peut être modélisée par une droite affine.

Definition : Puissance

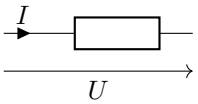
- En convention récepteur on calcule la puissance reçue par le dipôle :

$$P_R(t) = u(t)i(t)$$



- En convention générateur on calcule la puissance fournie par le dipôle :

$$P_G(t) = u(t)i(t)$$



Propriété : Dimension d'une puissance et d'une tension

On peut calculer la dimension fondamentale d'une puissance à l'aide des formules de mécanique connues en termine :

$$P = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow [P] = [\mathscr{E}]/T \qquad \text{et } \mathscr{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow [E] = ML^2T^{-2} \Longrightarrow [P] = ML^2T^{-3}$$

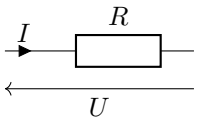
$$[U] = [P]/I = ML^2T^{-3}I^{-1}$$

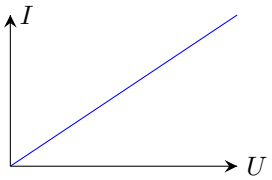
Propriété : Le conducteur ohmique

En convention récepteur un conducteur ohmique est caractérisé par une résistance R qui relie la tension à ses bornes U à l'intensité du courant I qui le traverse grâce à la loi d'Ohm :

$$\boxed{u(t) = Ri(t)}$$

La résistance R s'exprime en Ohm (Ω). Son inverse $G = \frac{1}{R}$ est la conductance, elle s'exprime en Siemens (S).
On schématise une résistance de la manière suivante et on peut en tracer la caractéristique





La puissance dissipée par effet joule dans une résistance s'exprime en convention récepteur comme la puissance reçue par le dipôle :

$$\boxed{P = u(t)i(t) = Ri^2(t)}$$

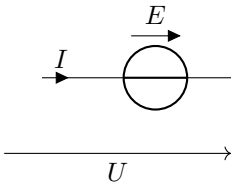
Propriété : Dimension d'une résistance

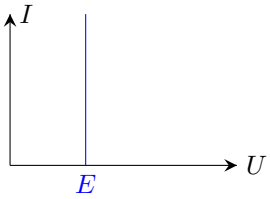
À l'aide de la loi d'Ohm on peut exprimer la dimension d'une résistance $[R]$ en fonction de la dimension d'une tension $[U]$ et de la dimension fondamentale de l'intensité du courant I :

$$[R] = [U]/I = ML^2T^{-3}I^{-2}$$

Propriété : Générateur idéale de tension

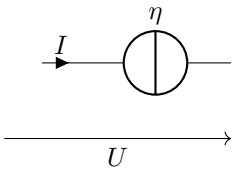
On définit le générateur idéal de tension de force électromotrice (f.e.m.) E comme un dipôle dont la tension vaut E et est constante quelque soit l'instensité du courant délivré. On peut le schématiser et représenter la caractéristique :

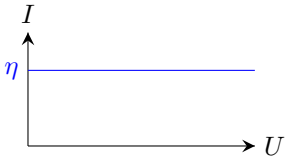




Propriété : Générateur idéal de courant

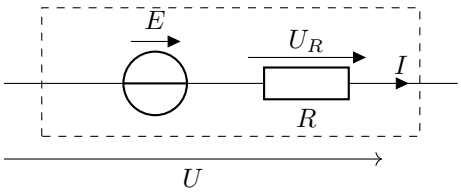
On définit le générateur idéal de courant par un dipôle dont l'intensité du courant η délivrée est constante quelque soit la tension à ses bornes. On le schématise et on donne la caractéristique :

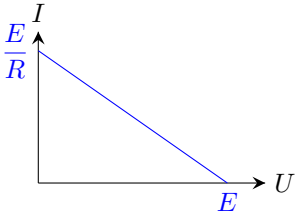




Propriété : Générateur de Thévenin

On définit le modèle du générateur de Thévenin par la mise en série d'un générateur idéal de tension de f.e.m. E et d'une résistance interne R (appelée résistance de sortie). De schéma et de caractéristique :

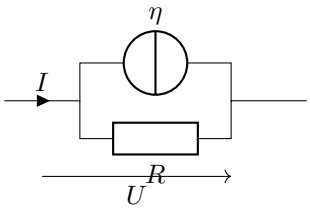


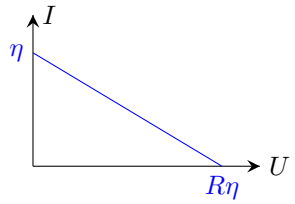


On obtient l'équation de la caractéristique en appliquant l'additivité des tensions (loi des mailles) : $U = E - RI$

Propriété : Générateur de Norton

On définit le modèle du générateur de Norton par l'association en parralèle d'un générateur idéal de courant caractérisé par son courant η et d'une résistance interne R de schéma et de caractéristique :



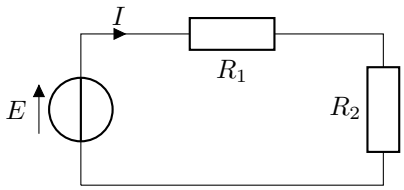


On obtient l'équation de la caractéristique en appliquant la loi des nœuds : $I = \eta + I' = \eta - \dfrac{U}{R}$

4 Associations de résistance :

Propriété : Résistances en série

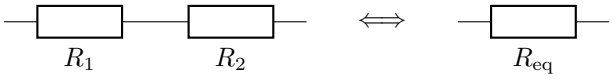
On considère le circuit suivant composé d'un générateur idéal de f.e.m. E et de 2 résistances en séries



On applique la loi des mailles et la loi d'Ohm :

$$E = R_1 I + R_2 I \iff E = (R_1 + R_2) I$$

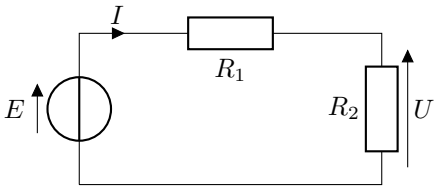
On pose alors $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$ la résistance équivalente à R_1 et R_2 en série et on a :



On généralise l'association en série de N résistance est équivalente à une résistance de valeur : $R_{\text{eq}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} R_k$

Pont diviseur de tension

On considère le circuit suivant composé d'un générateur idéal de f.e.m. E et de 2 résistances en séries



On applique la loi des mailles :

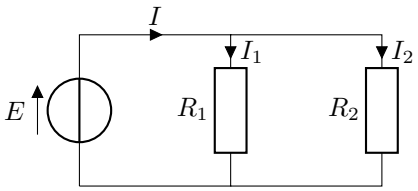
$$E = R_1 I + R_2 I \Longrightarrow I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

On utilise alors la loi d'Ohm :

$$U = R_2 I \Longrightarrow \boxed{U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E}$$

Propriété : Résistances en parallèle

On considère le circuit suivant composé d'un générateur idéal de f.e.m. E et de 2 résistances en parallèle :

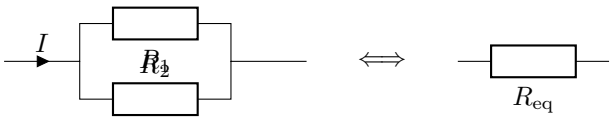


On applique la loi des nœuds :

$$I = I_1 + I_2 \iff I = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} \iff I = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

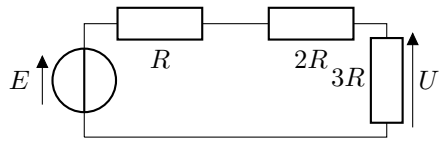
On pose alors R_{eq} la résistance équivalente à R_1 et R_2 en parallèle tel que :

$$E = R_{\text{eq}} I \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



On généralise l'association en parallèle de N résistances par une résistance équivalente de valeur : $\dfrac{1}{R_{\text{eq}}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}$

Exemple : Circuit à une maille



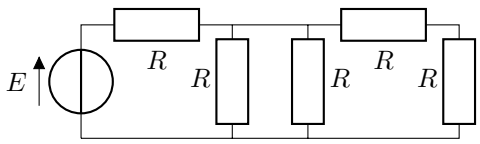
On cherche U sans forcément calculer I :

$$U = \frac{3R}{R+2R+3R}E$$

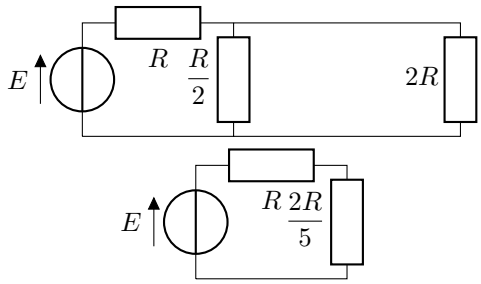
soit $U = E/2$

Exemple : Résistance équivalente

Soit le circuit suivant :



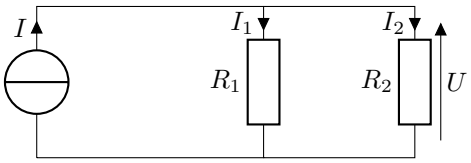
On doit alors procéder étape par étape :



Soit $R_{\text{eq}} = 7R/5$

Pont diviseur de courant

On considère le circuit composé d'un générateur idéal de courant I avec deux résistances en parallèles :



On cherche I_2 en fonction de I, R_1 et R_2. On applique la loi des nœuds :

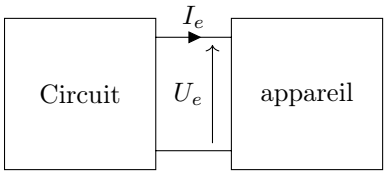
$$I = I_1 + I_2 \qquad \text{or} \qquad I_1 = \frac{U}{R_1} \qquad \text{et} \qquad U = R_2 I_2 \Longrightarrow \boxed{I_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2}I}$$

Definition : Résistance d'entrée

Un appareil qui vient se brancher à un circuit peut perturber le circuit (changer la valeur des courants et tensions).

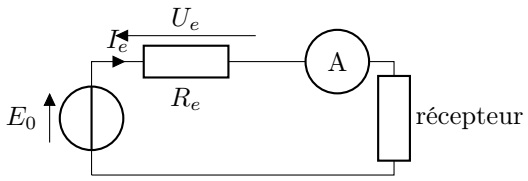
Pour prévoir cet impact on modélise une résistance d'entrée. On définit la résistance d'entrée par :

$$R_e = \frac{U_e}{I_e}$$

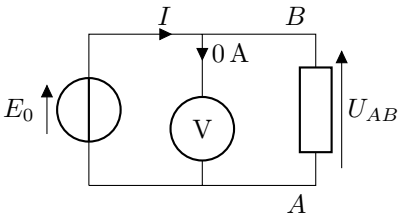


Propriété : Multimètre non idéal

On modélise un ampèrem§tre non idéal par l'association en série d'une résistance d'entrée et un ampéremètre idéal.



On modélise un voltmètre non idéal par l'association en parallèle d'une résistance d'entrée et d'un voltmètre idéal.



Remarque : Ordre de grandeur

- Résistance d'entrée d'un oscilloscope ou d'un multimètre en position voltmètre : $R_e \sim 1\,\text{M}\Omega$
- Résistance d'entrée d'un multimètre en position ampèremètre : $R_e \sim 1\,\Omega$
- Résistance de sortie d'un générateur de fonction : $R_s \sim 50\,\Omega$

Signaux 2 : Circuits linéaires du premier ordre

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
1.3. Circuit linéaire du premier ordre	
Régime libre, réponse à un échelon de tension.	Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension. Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine. Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. **Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques.** Capacité numérique : mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.

Remarque : Contexte

Dans ce chapitre on s'intéresse aux phénomènes transitoires dans les circuits électroniques. On se contentera de l'étude de circuits simple linéaire d'ordre 1, on reste dans le cadre de l'ARQS, c'est-à-dire que ces phénomènres transitoire n'ont rien à voir avec la propagation d'ondes dans le circuit !

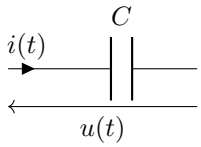
1 Généralités :

Propriété : Le condensateur

C'est un dipôle linéaire composé de deux plaques conductrices séparées par un isolant. Sous l'effet d'un champ électrique (d'une tension) les porteurs de charges (les électrons) s'accumulent sur une plaque et "chargent" le condensateur. Cette accumulation de charge fait apparaître un courant.

$$\boxed{i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}}$$

où C est la capacité du condensateur exprimée en farad (F)



$$q(t) = Cu(t)$$

où q est la charge positive stockée sur l'armature d'entrée du condensateur

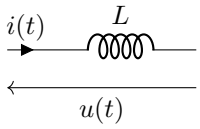
Le condensateur est capable de stocker de l'énergie puis de la fournir au circuit plus tard, l'énergie stockée dans le condensateur s'exprime : $\boxed{\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}Cu^2(t)}$

Propriété : La bobine

C'est un enroulement de fil parcourut par un courant. La tension aux bornes d'une bobine s'exprime :

$$\boxed{u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}}$$

où L est l'inductance de la bobine exprimée en henry (H)



La bobine est capable de stocker de l'énergie puis de la fournir au circuit plus tard, l'énergie stockée dans la bobine s'exprime : $\boxed{\mathscr{E}_b = \frac{1}{2}Li^2(t)}$

Propriété : Dimensions d'une capacité et d'une inductance

Soit $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$: $I = [C][u]T^{-1} \Longrightarrow [C] = TI/[u]$ avec $[u] = ML^2T^{-3}I^{-1}$ on a $[C] = I^2T^4M^{-1}L^{-2}$

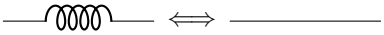
Soit $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$: $[u] = [L]IT^{-1} \Longrightarrow [L] = T[u]I^{-1}$ avec $[u] = ML^2T^{-3}I^{-1}$ on a $[L] = ML^2T^{-2}I^{-2}$

Remarque : Ordre de grandeur

- $C \sim 1\,\mathrm{nF}$ à $1000\,\mathrm{nF}$;
- $L \sim 1\,\mathrm{mF}$ à $1000\,\mathrm{mF}$.

Propriété : Comportement en régime permanent

Lorsqu'on se place en régime permanent, toutes les grandeurs sont constantes par rapport au temps, donc :

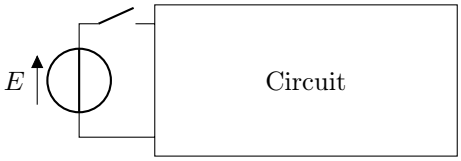
- Pour une bobine : $u_L(t) = 0 \qquad \forall i_L$ soit :
- Pour un condensateur : $i_C(t) = 0 \qquad \forall u_C$ soit : 

En régime permanent on peut étudier les valeurs des courant et tensions en étudiant le circuit équivalent où on remplace les condensateur par des interrupteur ouvert et les bobines par des fils.

Definition : Réponse à un échelon de tension

On branche en série un générateur idéal de f.e.m. $e(t)$ indépendante du temps, un interrupteur, un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C initialement déchargé.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. De cette façon on a $e(t)$ qui est de la forme :

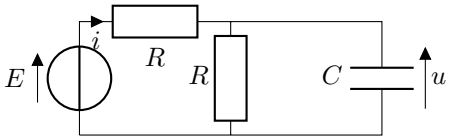
$$e(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ E \text{ pour } t \geqslant 0 \end{cases}$$



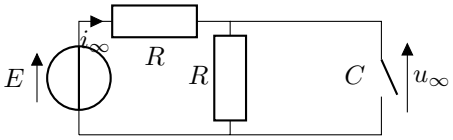
On étudie alors dans un premier temps la réponse du circuit à un échelon de tension en mesurant une tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle ou le courant $i(t)$ le traversant.

Exemple : Régime permanent

Soit le circuit suivant :



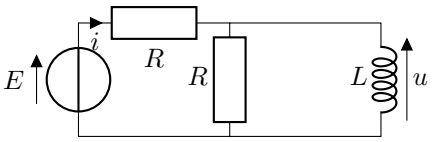
En régime permanent on a :



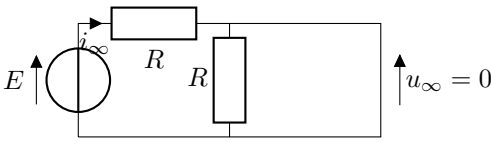
On peut alors appliquer le pont diviseur de tension car le courant est le même dans toute la maille :

$$u_\infty = \frac{ER}{2R} = \frac{E}{2} \qquad i_\infty = \frac{E}{2R}$$

Soit le circuit suivant :



En régime permanent on a :



On a alors :

$$i_\infty = \frac{E}{R}$$

Definition : Équation différentielle d'ordre 1

Une équation différentielle d'ordre 1, est une équation qui mêle une fonction $u(t)$ et sa dérivée temporelle $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. On retiendra la forme canonique de l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau}$$

où le terme à droite de l'égalité est appelé second membre.
La solution se met sous la forme : $\quad u(t) = u_h(t) + u_p(t)$

- avec $u_h(t)$ solution de l'équation différentielle homogène :

$$\frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}t} + \frac{u_h(t)}{\tau} = 0 \qquad u_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

  avec $A \in \mathbb{R}$, une constante à déterminer appelée constante d'intégration.

- où $u_p(t)$ est appelé solution particulière de l'équation différentielle. Dans le cas particulier où le second membre est constant :

$$u_p = C^{te} \Longrightarrow \cancel{\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t}} + \frac{u_p}{\tau} = \frac{u_\infty}{\tau} \Longrightarrow u_p = u_\infty$$

Démonstration : Solution équation différentielle d'ordre 1

On commence par démontrer la forme de la solution de l'équation homogène.

$$\frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}t} + \frac{u_h(t)}{\tau} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}t} = -\frac{u_h(t)}{\tau}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_h(t)}{u_h(t)} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau} \Longrightarrow \int_{u_h(t=0)}^{u_h(t)} \frac{1}{u_h}\mathrm{d}u_h = \int_0^t -\frac{1}{\tau}\mathrm{d}t$$

$$\ln\frac{u_h(t)}{u_h(t=0)} = -\frac{t}{\tau} \Longrightarrow u_h(t) = u_h(t=0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

On pose alors $u_h(t=0) = A$ la constante d'intégration et on obtient la solution de l'équation homogène.

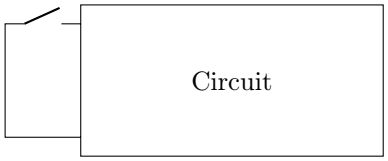
Definition : Condition initiale

Pour obtenir la solution au problème posé on doit trouver la valeur de la constante d'intégration A. On obtient A à partir de la condition initiale :

$$u(t=0^+) = u_0 = A + u_\infty$$

Definition : Régime libre

On parle de régime libre lors de l'étude d'un circuit où de l'énergie est stockée dans un condensateur ou une bobine et à $t = 0$ on ferme l'interrupteur. Les charges peuvent alors se déplacer dans le circuit et atteindre un nouveau régime permanent.



Méthode : Étude d'un circuit

Lorsqu'on a un circuit la méthode de résolution complète est la suivante :

- Dessiner le circuit équivalent en régime permanent pour connaître les valeurs des tensions et courants en régime permanent.
- Utiliser la condition initiale donnée pour connaître les valeurs des tensions et courant à $t = 0^+$.
- Appliquer loi des mailles et ou loi des nœuds pour obtenir l'équation différentielle.
- Mettre l'équation différentielle sous forme canonique et identifier τ.
- Résoudre l'équation différentielle en écrivant $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$.
- Donner $u_h(t) = Ae^{-t/\tau}$ avec A une constante d'intégration.
- Chercher une valeur de $u_p = C^{te}$ solution de l'équation différentielle.
- Obtenir la valeur de A avec la condition initiale $u(t=0^+) = u_0$.

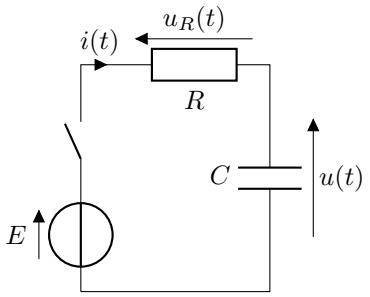
2 Réponse à un échelon du circuit RC

Exemple : Réponse à un échelon de tension

On branche en série un générateur idéal de f.e.m. $e(t)$ indépendante du temps, un interrupteur, un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C initialement déchargé.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. De cette façon on a $e(t)$ qui est de la forme :

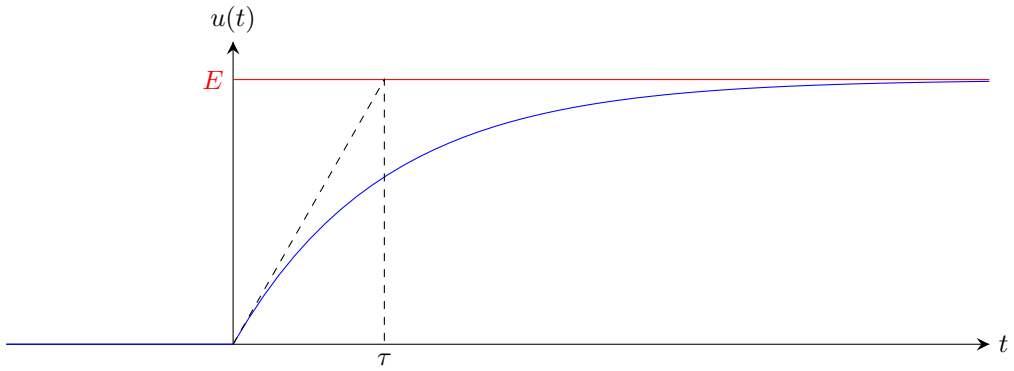
$$e(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ E \text{ pour } t \geqslant 0 \end{cases}$$

On étudie alors dans un premier temps la réponse du circuit à un échelon de tension en mesurant $u(t)$ ou $i(t)$.



Remarque : Approche expérimentale

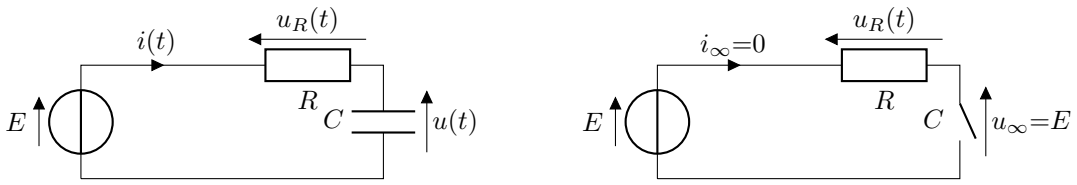
On observe expérimentalement la courbe suivante :



On observe l'évolution de $u(t)$ pendant un certains temps. On appelle cet intervalle de temps le régime transitoire. Puis on observe l'établissement d'un régime permanent où la tension cesse d'évoluer.

Exemple : Régime permanent

On a le circuit équivalent en régime permanent :



Propriété : Continuité de l'énergie stockée dans le condensateur

L'énergie stockée dans le condensateur est continue au cours du temps.

$$E_{\text{cond}}(t=0^-) = E_{\text{cond}}(t=0^+)$$

Comme on a $E_{\text{cond}} = \frac{1}{2}Cu_C^2(t)$ on a alors $\boxed{u_C(t=0^-) = u_C(t=0^+)}$

On parle de condensateur initialement déchargé lorsque son énergie stockée initiale est nulle, donc $u_C(t=0) = 0$.

Exemple : Conditions initiales

On a applique la loi des mailles à $t = 0^+$ avec $u(t=0^+) = 0$:

$$E = u_R(t=0^+) + \cancel{u(t=0^+)} = Ri(t=0^+) \Longrightarrow i(t=0^+) = E/R$$

Exemple : Échelon de tension d'un circuit RC série

Pour étudier le régime transitoire on doit obtenir l'équation différentielle du circuit. On applique la loi des mailles :

$$e(t) = u_C(t) + u_R(t)$$

D'après la loi d'Ohm on a $u_R(t) = Ri(t)$, or le courant parcourant le condensateur est également $i(t)$ et s'exprime comme $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. On obtient alors :

$$e(t) = u(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t)$$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 avec second membre. En posant $\tau = RC$ on peut mettre l'équation sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$$

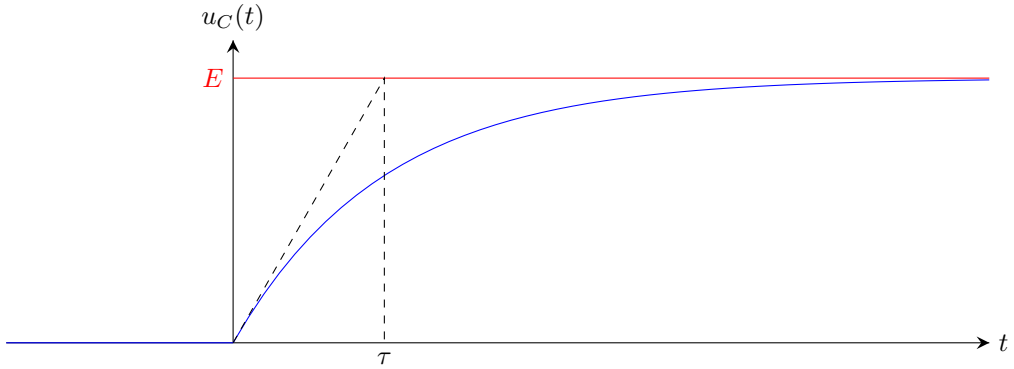
On appelle $\frac{e(t)}{\tau}$ le second membre de l'équation différentielle.

Initiallement le condensateur est déchargé, c'est-à-dire qu'aucunes charges n'est accumulée dedans, et donc son énergie stockée est nulle. On a alors :

$$u(t=0) = 0 \Longrightarrow A + E = 0 \Longrightarrow A = -E$$

On obtient alors : $u(t) = E\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$

En sachant qu'initialement on a : $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{\tau}$ on peut tracer la courbe.



Propriété : Temps caractéristique

Ici on a $\tau = RC$, essayons de voir quelle est la dimension de τ :

$$[\tau] = [R][C] = \frac{[u]}{I} \times \frac{I}{[u]}T = T$$

τ à la dimension d'un temps, ce qui est cohérent avec la forme de l'équation différentielle et on l'appelle temps caractéristique.

Remarque : Ordre de grandeur

Le régime transitoire a une durée d'ordre de grandeur entre 3τ et 5τ.

Exemple : Temps de réponse à 95%

On cherche l'instant t_{95} où la variation de $u(t)$ à atteint 95% de sa valeur finale :

$$u(t_{95}) - u(0) = 0.95(u_\infty - u(0)) \Longrightarrow u(t_{95}) = 0.95E \Longrightarrow 0.95E = E(1 - e^{-t_{95}/\tau})$$

soit $t_{95} = \tau \ln(20) \simeq 3\tau$

Propriété : Bilan de puissance

On multiplie la loi des mailles par $i(t)$ pour obtenir un bilan de puissance :

$$Ei(t) = Ri^2(t) + u(t)i(t)$$

On identifie les différences puissances :

$$\mathscr{P}_G = \mathscr{P}_J + \mathscr{P}_C$$

or pour le condensateur :

$$\mathscr{P}_C = Cu(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t}$$

Propriété : Bilan d'énergie lors de la charge

On fait l'intégrale du bilan de puissance entre l'instant $t = 0$ et $t \to +\infty$:

$$\Delta\mathscr{E}_G = \Delta\mathscr{E}_J + \Delta\mathscr{E}_C$$

avec $\Delta\mathscr{E}_G = EC(u_\infty - u(0))$

avec $\Delta\mathscr{E}_C = \frac{1}{2}C(u_\infty^2 - u^2(0))$

On en déduit alors $\Delta\mathscr{E}_J = \frac{1}{2}CE^2$ l'énergie dissipée par effet joule lors de la charge complète.

Méthode : Bilan énergétique

- Appliquer la loi des mailles au circuit ;
- multiplier par le courant délivré par le générateur $i(t)$;
- utiliser les deux propriétés du condensateur ou de la bobine :

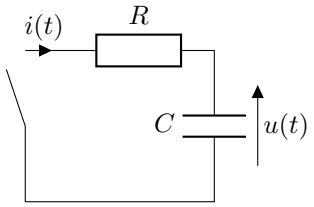
$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \text{ ou } u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

- Intégrer entre $t = 0$ et $t \to +\infty$;
- Identifier l'énergie fournie par le générateur, l'énergie dissipée par effet Joule et l'énergie stockée dans le condensateur ou la bobine.

3 Régime libre d'un circuit RC

Exemple : Régime libre

On étudie maintenant le circuit suivant où le condensateur est initiallement chargé avec une tension initiale $u(0) = E$. À $t = 0$ on ferme l'interrupteur.
En régime permanent on a : $u_\infty = 0$.
La condition initiale nous donne rapidement : $u(0) + Ri(0^+) = 0 \Longrightarrow i(0^+) = E/R$



Exemple : Équation différentielle en fonction du courant

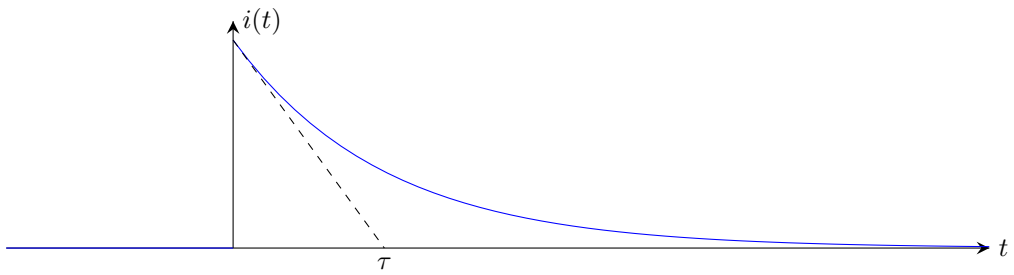
On cherche l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$. On applique la loi des mailles puis on dérive :

$$u(t) + Ri(t) = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow \frac{i}{C} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = 0$$

On a alors une équation différentielle homogène de solution : $i(t) = Ae^{-t/\tau}$

En utilisant la condition initiale on a : $i(t) = \dfrac{E}{R}e^{-t/\tau}$

On peut alors tracer la courbe sachant que $i(t = 0^-) = 0$!



Exemple : Temps de réponse à 99%

On cherche l'instant t_{99} où la variation de $i(t)$ à atteint 99% de sa valeur finale :

$$i(t_{99}) - i(0) = 0.99(i_\infty - i(0)) \Longrightarrow i(t_{99}) = 0.01E/R \Longrightarrow \frac{0.1E}{R} = \frac{E}{R}(e^{-t_{99}/\tau})$$

soit $t_{99} = \tau \ln(100) \simeq 4,6\tau$

Exemple : Bilan énergétique lors de la décharge

On applique la loi des mailles au circuit et on multiplie par $i(t)$:

$$u(t) + Ri(t) = 0 \Longrightarrow u(t)i(t) + Ri^2(t) = 0$$

On intègre entre $t = 0$ et $t \to +\infty$:

$$\mathscr{E}_C(+\infty) - \mathscr{E}_C(0) + \Delta\mathscr{E}_J = 0 \Longrightarrow \Delta\mathscr{E}_J = \frac{1}{2}CE^2$$

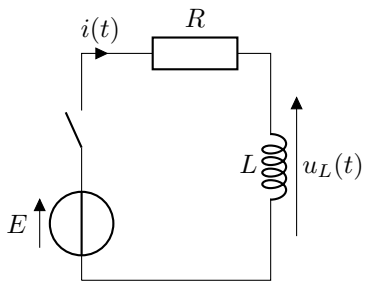
4 Circuit *RL*

Méthode : Obtenir l'équation différentielle du circuit

- Appliquer la loi des mailles ;
- Appliquer la loi d'Ohm ;
- Si le circuit possède une seconde maille, appliquer la loi des nœuds ;
- Appliquer la propriété de la bobine :
$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$
- Mettre l'équation différentielle sous forme canonique.

Exemple : Échelon de tension d'un circuit RL série

On branche en série un générateur idéal de f.e.m. $e(t)$ indépendante du temps, un interrupteur, un résistor de résistance R et une bobine d'inductance L initialement déchargée.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. De cette façon on a $e(t)$ qui est de la forme :
$$e(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ E \text{ pour } t \geqslant 0 \end{cases}$$
On étudie alors dans un premier temps la réponse du circuit à un échelon de tension.



Exemple : Étude du régime transitoire

Pour étudier le régime transitoire on doit obtenir l'équation différentielle du circuit. On applique la loi des mailles :
$$e(t) = u_L(t) + u_R(t)$$
D'après la loi d'Ohm on a $u_R(t) = Ri(t)$, or la tension aux bornes d'une bobine est $u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, on obtient alors :
$$e(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)$$
C'est une équation différentielle d'ordre 1 avec second membre. En posant $\tau = \frac{L}{R}$ on peut mettre l'équation sous forme canonique :
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{R\tau}$$
La solution de cette équation différentielle d'ordre 1 est :
$$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

Propriété : Continuité de l'énergie stockée dans la bobine

L'énergie stockée dans la bobine est continue au cours du temps.
$$E_{\text{bob}}(t = 0^-) = E_{\text{bob}}(t = 0^+)$$
Comme on a $E_{\text{bob}} = \frac{1}{2}Li_L^2(t)$ on a alors
$$\boxed{i_L(t = 0^-) = i_L(t = 0^+)}$$
On parle de condensateur initialement déchargé lorsque son énergie stockée initiale est nulle, donc $i_L(t = 0) = 0$.

Exemple : Utilisation de la condition initiale

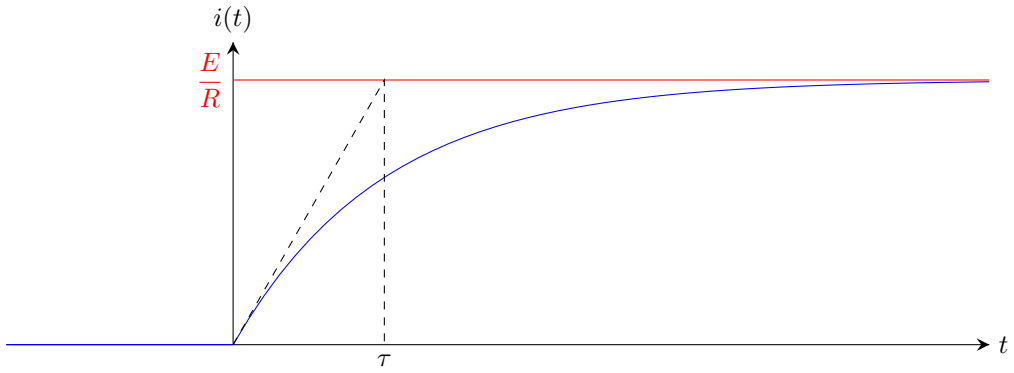
Comme l'équation différentielle est d'ordre 1, on a une seule constante d'intégration et il nous faut une condition initiale. L'énergie stockée dans la bobine est continue au cours du temps. Comme on a $E_{bob} = \frac{1}{2}Li^2(t)$ on a alors continuité de $i(t)$. On utilise alors comme condition initiale $i(t = 0)$.

Initiallement la bobine est déchargée, c'est-à-dire son énergie stockée est nulle. On a alors :

$$i(t=0)=0 \Longrightarrow A+\frac{E}{R}=0 \Longrightarrow A=-\frac{E}{R}$$

On obtient alors : $i(t)=\frac{E}{R}\left[1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$

En sachant qu'initialement on a : $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{E}{R\tau}$ on peut tracer la courbe.



5 Capacité numérique : Méthode d'Euler

Definition : Méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler est une méthode itérative qui calcule numériquement une solution approchée de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)=F(y(t),t) \qquad \text{avec } t\in[t_i,t_f] \qquad \text{et } y(t_i)=y_i$$

On utilise l'expression approchée de la dérivée suivante :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)\simeq\frac{y(t+\delta t)-y(t)}{\delta t}$$

On peut alors construire les suites de N nombres suivantes :

- $t_k=t_0+k\times\delta t$ avec $k\in[0;N-1]$ et $\delta t=\frac{t_f-t_0}{N-1}$
- $y_{k+1}=y_k+F(y_f,t_k)\times\delta t$ avec $y_0=y_i$

Les N couples de points (t_k,y_k) représentent les coordonnées des N points approchés de la courbe $y(t)$.

Propriété : Capcité numérique 1

Mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide de python pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.

Propriété : Créaction fonction Euler

On cherche à définir une nouvelle fonction python qui prendra en paramètre y_i, t_i, t_f, F les paramètres mathématiques et N le paramètre numérique.

```
import numpy as np
def Euler(y0,t0,tf,F,N):
    y=[]
    dt=(tf-t0)/(N-1)
    t=[t0+k*dt for k in range(N)]
    y[0]=y0
    for k in range(1,N):
        y[k]=y[k-1]+F(y[k-1],t[k-1])*dt
    return t,y
def F(y,t):
    return (e(t)-y)/Tau
```

Signaux 3 : Circuits linéaires du deuxième ordre

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
1.4. Oscillateurs libres et forces	
Oscillateur harmonique.Exemples du circuit LC et de l'oscillateur mécanique.	Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. Réaliser un bilan énergétique.
Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. **Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique.** **Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.**
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.

Remarque : Contexte

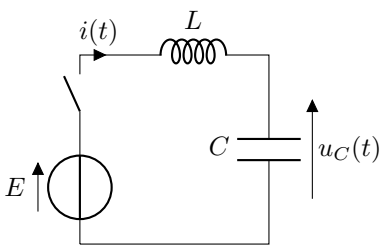
On est toujours sur l'étude des régimes transitoires dans les circuits électroniques. On enrichit dans ce chapitre nos capacité à résoudre des systèmes en abordant l'ordre 2, c'est à dire un mélange de condensateur et de bobine dans un circuit.

1 Modèle de l'oscillateur harmonique électrique

Exemple : Description du circuit

On étudie la circuit LC série composé d'un générateur de idéal de tension de f.e.m. E, d'un interrupteur, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L.
la bobine et le condensateur sont initialement déchargés, et à $t = 0$ on ferme l'intérupteur de manière à avoir :

$$e(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ E \text{ pour } t \geqslant 0 \end{cases}$$



Exemple : Équation différentielle

On applique la loi des mailles on a alors :

$$e(t) = u_L(t) + u_C(t) \qquad \text{or : } u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$
$$e(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C(t) \qquad \text{or : } i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$
$$e(t) = LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C(t)$$

Soit avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ et $u_{Ceq} = E$ on obtient l'équation sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 u_{C\infty}$$

Definition : Oscillateur harmonique (OH)

On appelle oscillateur harmonique un système dont la grandeur u satisfait l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty}$$

avec ω_0 la **pulsation propre du système** en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Propriété : Solution de l'équation d'un OH

La solution de cette équation différentielle peut se mettre sous la forme suivante :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

avec $u_h(t)$ solution de l'équation différentielle homogène :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_h}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u_h = 0$$

et $u_p(t)$ solution particulière de l'équation différentielle.
On retiendra que :

$$u_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, deux constantes d'intégration. Pour $u_\infty = C^{te}$ on a $u_p(t) = u_\infty$:

$$\boxed{u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + u_\infty}$$

Propriété : Autre forme trigonométrique

On utilise souvent une autre forme pour exprimer la solution :

$$\boxed{u(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi) + u_\infty}$$

avec $C \in \mathbb{R}^+$ appelé **amplitude de l'oscillation** et $\varphi \in [-\pi; \pi]$ appelé **phase initiale**.
Grâce aux relations mathématiques à connaître par cœur on obtient :

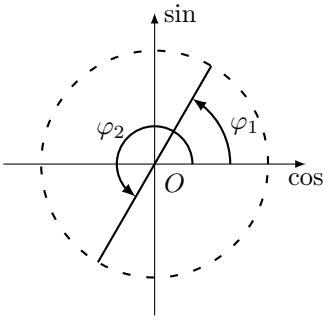
$$A = C\cos\varphi \qquad B = -C\sin\varphi$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Méthode : Calcul de φ

Pour connaître φ à partir de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ il est recommandé de tracer un cercle trigonométrique :



Si $\cos(\varphi) \geqslant 0$ alors $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ on peut alors calculer :

$$\tan(\varphi) = \frac{-B}{A} \Longrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

Si $\cos(\varphi) \leqslant 0$ alors $\varphi - \pi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ on peut alors calculer :

$$\tan(\varphi - \pi) = \frac{-B}{A} \Longrightarrow \varphi = \pi - \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

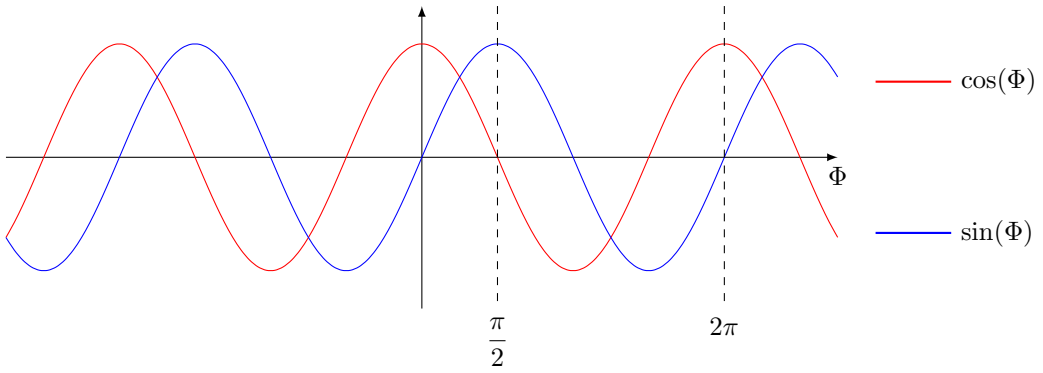
Propriété : Rappel sur les fonctions sin et cos

Pour les fonctions sinusoïdales on définit la phase Φ comme l'argument de la fonction cos ou sin. L'argument d'une fonction en physique doit être sans dimension on a alors :

$$[\Phi] = 1$$

La phase s'exprime généralement en angle radian noté rad.

Si on trace les fonction $\cos(\Phi)$ et $\sin(\Phi)$ en fonction de Φ on obtient :



Dans notre cas on a $\Phi(t) = \omega_0 t - \varphi$

Propriété : Relation pulsation, fréquence, période

La période d'un signal est la plus petite durée T non nulle de répétition d'un motif tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, s(t+T) = s(t)$$

La fréquence est définie comme l'inverse de la période, c'est un nombre de motif répété par unité de temps et s'exprime en Hertz (Hz).

La pulsation ω correspond à une variation de phase par unité de temps. Son unité est le rad $\cdot$ s^{-1} et on a les relations avec T et f :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

On a alors par analyse dimensionnelle : $[\omega t] = [\varphi]$

Propriété : Conditions initiales

Pour résoudre totalement l'équation différentielle, il est nécessaire de trouver les valeurs des deux constantes d'intégrations. Pour ça on utilise les deux conditions initiales :

- La tension aux bornes du condensateur est continue donc : $\boxed{u_C(t=0) = u_0}$;
- Le courant qui traverse la bobine est continue donc : $\boxed{i_L(t=0) = i_0}$.

Exemple : Résolution

Soit $u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + E$, on a utilise comme condition initiale que $u(t=0)$ et $i(t=0)$:

$$u(0) = 0 \Longrightarrow A + E = 0 \Longrightarrow A = -E$$

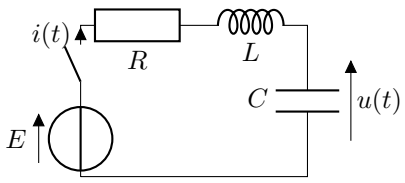
$$i(0) = 0 \Longrightarrow B\omega_0 = 0 \Longrightarrow B = 0$$

Soit $u(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))$

2 Oscillateur électrique amorti

Exemple : Description du circuit

On étudie la circuit RLC série composé d'un générateur de idéal de tension de f.e.m. E, d'un interrupteur, d'une résistance R, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L. La bobine et le condensateur sont initialement déchargés, et à $t = 0$ on ferme l'interrupteur.



Exemple : Équation différentielle

On applique la loi des mailles on a alors :

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u(t) \qquad \text{or : } u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$
$$e(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u(t) \qquad \text{or : } i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$
$$e(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C(t)$$

Soit avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, $u_\infty = E$ et $\lambda = \frac{R}{2L}$ on obtient l'équation sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 u_\infty$$

Il existe une deuxième forme canonique de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 u_\infty$$

Avec $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité et λ le coefficient d'amortissement.

Definition : Équation différentielle d'ordre 2

On appelle équation différentielle d'ordre 2 une équation qui relie une fonction $u(t)$, sa dérivée temporelle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et sa dérivée temporelle seconde $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$. On retiendra les deux formes canoniques de l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty} \text{ ou } \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega_0\xi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty}$$

La solution se met sous la forme :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

avec $u_h(t)$ solution de l'équation différentielle homogène :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_h}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_h = 0$$

et $u_p(t)$ solution particulière de l'équation différentielle.
Pour $u_\infty = C^{te}$ on a $u_p(t) = u_\infty$.

3 Régime apériodique

Propriété : Régime apériodique

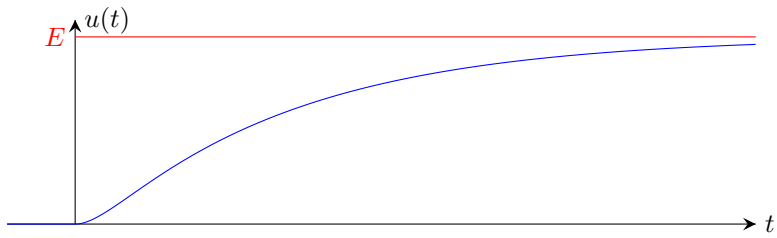
Dans le cas où $Q < \frac{1}{2}$, le régime est dit alors apériodique on a alors la solution homogène qui est :

$$\boxed{u_h(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A\mathrm{ch}\,(\Omega t) + B\mathrm{sh}\,(\Omega t)\right]} \quad \text{avec} \quad \boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}} \quad \text{et} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple : Cas apériodique de réponse à un échelon

Si on considère le circuit RLC série avec une bobine et un condensateur initialement déchargés, on obtient la solution suivante dans le cas apériodique :

$$u_C(t)=E-e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[E\text{ch }(\Omega t)+\frac{E}{\sqrt{1-4Q^2}}\text{sh }(\Omega t)\right]$$



Démonstration : Solution apériodique

Pour trouver la solution homogène on cherche des solutions de la forme $u(t) = A\exp(rt)$, on doit alors résoudre l'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène :

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$$

Pour résoudre cette équation et trouver les racines on calcule le déterminant :

$$\Delta=\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)-4\omega_0^2=\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)$$

Dans le cas où $\Delta > 0$ et où $Q < \frac{1}{2}$, on a les racines de l'équation caractéristiques :

$$r_1=-\frac{\omega_0}{2Q}+\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}=-\frac{\omega_0}{2Q}+\Omega$$

$$r_2=-\frac{\omega_0}{2Q}-\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}=-\frac{\omega_0}{2Q}-\Omega$$

On a alors la solution homogène qui est $\quad u_h(t)=Ae^{r_1t}+Be^{r_2t}=e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(Ae^{\Omega t}+Be^{-\Omega t}\right)$

On peut mettre cette solution sous une autre forme en utilisant les fonctions hyperboliques, on utilise $e^x = \text{ch}(x)+\text{sh}(x)$:

$$u(t)=e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\underbrace{(A+B)}_{A'}\text{ch }(\Omega t)+\underbrace{(A-B)}_{B'}\text{sh }(\Omega t)\right)\qquad\text{avec}\quad\boxed{\Omega=\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}}$$

Exemple : Détermination de A et B

On considère que la bobine et le condensateur sont initialement déchargés soit $i(0) = 0$ et $u(0) = 0$:

$$u(t)=e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left[A\text{ch }(\Omega t)+B\text{sh }(\Omega t)\right]+E$$

$$u(0)=0=A+E\Longrightarrow A=-E$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\frac{\omega_0}{2Q}(u(t)-E)+\Omega e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(A\text{sh }(\Omega t)+B\text{ch }(\Omega t)\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0)=0\Longrightarrow-\frac{\omega_0}{2Q}(u(0)-E)+B\Omega\Longrightarrow B=-\frac{\omega_0 E}{\Omega 2Q}$$

4 Régime critique

Propriété : Régime critique

Dans le cas où $Q = \frac{1}{2}$, le régime est dit alors critique on a alors la solution homogène qui est :

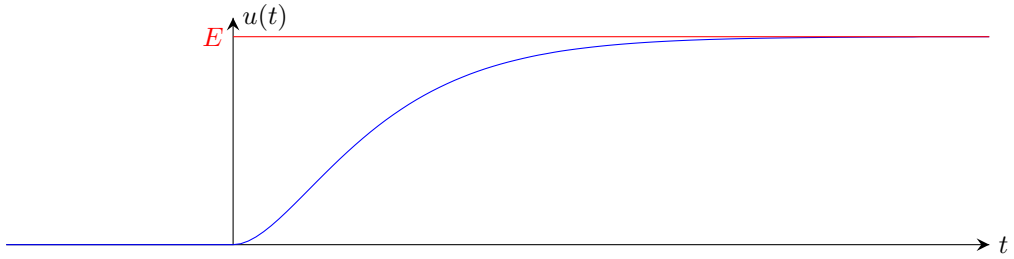
$$\boxed{u_h(t)=(A+Bt)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}}$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple : Cas critique de réponse à un échelon

Si on considère le circuit RLC série avec une bobine et un condensateur initialement déchargés, on obtient la solution suivante dans le cas critique :

$$u_C(t) = E - E\left(1 + \frac{\omega_0 t}{2Q}\right) e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$



Démonstration : Solution critique

Pour trouver la solution homogène on cherche des solutions de la forme $u(t) = A\exp(rt)$, on doit alors résoudre l'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Pour résoudre cette équation et trouver les racines on calcule le déterminant :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right) - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

Dans le cas où $\Delta = 0$ et où $Q = \frac{1}{2}$, on a la racine double de l'équation caractéristiques :

$$r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q}$$

On a alors la solution homogène qui est :

$$u_h(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$$

Exemple : Calcul de A et B

Soit $u(t) = u(t) = E + (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$ avec $u(0) = 0$ et $i(0) = 0$ donc $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$:

$$u(0) = 0 = E + A \Longrightarrow A = -E$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (B - A\omega_0 - \omega_0 Bt)e^{-\omega_0 t}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0 = B - A\omega_0 \Longrightarrow B = -E\omega_0$$

5 Régime pseudo-périodique

Propriété : Régime pseudo-périodique

Dans le cas où $Q > \frac{1}{2}$, le régime est dit alors pseudo-périodique on a alors la solution homogène qui est :

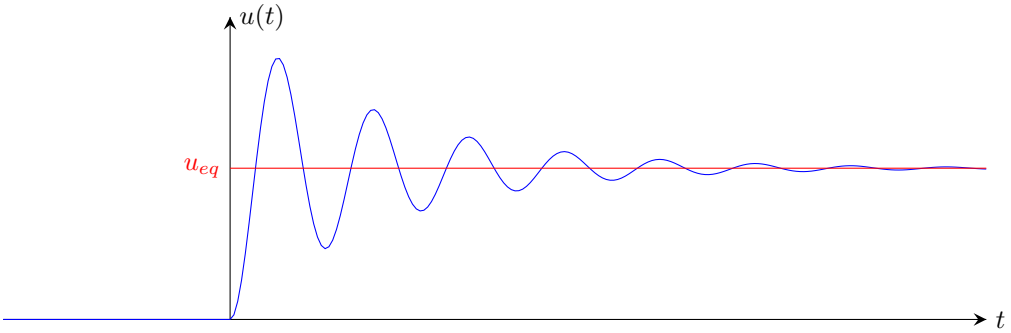
$$\boxed{u_h(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]}$$

avec $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ et $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple : Cas pseudo-périodique de réponse à un échelon

Si on considère le circuit RLC série avec une bobine et un condensateur initialement déchargés, on obtient la solution suivante dans le cas pseudo-périodique :

$$u_C(t) = E - e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[E\cos(\omega t) + \frac{E}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\omega t)\right]$$



Démonstration : Solution pseudo-périodique

Pour trouver la solution homogène on cherche des solutions de la forme $u(t) = A\exp(rt)$, on doit alors résoudre l'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Pour résoudre cette équation et trouver les racines on calcule le déterminant :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right) - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

Dans le cas où $\Delta < 0$ et où $Q > \frac{1}{2}$, on a les racines de l'équation caractéristiques :

$$\underline{r_1} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + j\sqrt{\omega_0^2\left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega$$

$$\underline{r_2} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - j\sqrt{\omega_0^2\left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega$$

On a alors la solution homogène qui est :

$$u_h(t) = \underline{A}e^{\underline{r_1}t} + \underline{B}e^{\underline{r_2}t} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\underline{A}e^{j\omega t} + \underline{B}e^{-j\omega t}\right)$$

On peut mettre cette solution sous une autre forme en utilisant les fonctions hyperboliques, on utilise $e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$:

$$u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\underbrace{(\underline{A} + \underline{B})}_{A'}\cos(\omega t) + \underbrace{j(\underline{A} - \underline{B})}_{B'}\sin(\omega t)\right)$$

On peut alors renomer les constantes $A' = \underline{A} + \underline{B}$ et $B' = j(\underline{A} - \underline{B})$ et alors :

$$\boxed{u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A'\cos(\omega t) + B'\sin(\omega t)\right)}$$

avec $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

6 Exemples et remarques

Méthode : Résolution d'un circuit linéaire d'ordre 2

- Utiliser le circuit équivalent en régime permanent pour prévoir les valeurs des tensions et courant lors du régime permanent.
- Utiliser la loi des mailles et la loi des nœuds ainsi que les conditions initiales pour connaître les valeurs initiales des différentes tensions et courants.
- Appliquer la loi des mailles et la loi des nœuds pour obtenir l'équation différentielle demandée.
- Mettre l'équation différentielle sous forme canonique et identifier ω_0 et Q.
- Calculer le discriminant de l'équation caractéristique et les racines. En déduire le régime et proposer la forme de la solution homogène adéquate.

Remarque : Durée du régime transitoire

On évalue la durée du régime transitoire grâce à l'exponentielle décroissante $\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$, on peut alors dire que l'ordre de grandeur du régime transistoire T_R est :

$$T_R \sim 10\frac{Q}{\omega_0}$$

Remarque : Analogie oscillateur électrique/mécanique

On a l'analogie entre les grandeurs suivantes :

Grandeurs électriques	E	$q(t)$	L	C	R
Grandeurs mécaniques	F_0	$x(t)$	m	$\frac{1}{k}$	μ

Signaux 4 : Régime des oscillations forcées

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
1.4. Oscillateurs libres et forces	
Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale.	Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.
Impédances complexes.	Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Résonance.	Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.**

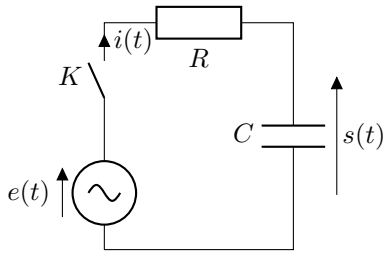
Remarque : Contexte

On s'intéresse dans ce chapitre au cas où le second membre d'une équation différentielle n'est pas constant. On s'intéresse ici à un cas particulier très simple et très utile en maths et en physique, l'excitation sinusoïdale.

1 Régime sinusoïdal forcé (RSF)

Exemple : Excitation sinusoïdale

On étudie la circuit RC série composé d'un générateur basse fréquence de tension de f.e.m. $e(t)$, d'un interrupteur, d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C.
Le condensateur est initialement déchargé, et à $t = 0$ on ferme l'interrupteur de manière à avoir :



$$e(t) = \begin{cases} E_m \cos(\omega t) \text{ pour } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ pour } t < 0 \end{cases}$$

On applique la loi des mailles on a alors : $e(t) = RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C(t)$ On a alors l'équation différentielle sous forme canonique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{\tau} = \frac{E_m}{\tau}\cos(\omega t)$$

On a alors $s(t) = s_h(t) + s_p(t)$ avec $s_h(t)$ la solution homogène et $s_p(t)$ la solution particulière.

Exemple : Régime transitoire

On sait que $s_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ donc on obtient : $s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + s_p(t)$
Or au bout d'une durée de l'ordre de 5τ On sait que $s_h(t) \approx 0$ donc on aura : $s(t) \approx s_p(t)$
Lors d'un régime sinusoïdal forcé, la durée de l'observation est forcément supérieure à plusieurs τ. On cherche donc simplement à connaître la réponse en régime permanent.

Definition : Régime sinusoïdal forcé

On appelle régime sinusoïdal forcé la réponse en régime permanent à une excitation sinusoïdale d'un système. Cette réponse correspond à la solution particulière de l'équation différentielle du système, de forme sinusoïdale et de même fréquence que l'excitation.

$$s(t) = S_m(\omega)\cos(\omega t - \varphi(\omega))$$

Ici l'amplitude de la réponse $S_m(\omega)$ et sont retard de phase $\varphi(\omega)$ dépendent de la pulsation de l'excitation ω.

Exemple : Régime permanent

On a alors les expressions suivantes :

$$s(t) = S_m(\omega)\cos(\omega t - \varphi(\omega)) \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\omega S_m(\omega)\sin(\omega t - \varphi(\omega))$$

et on injecte dans l'équation canonique : $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau} = \dfrac{E_m}{\tau}\cos(\omega t)$

$$-\omega S_m(\omega)\sin(\omega t - \varphi(\omega)) + \frac{S_m(\omega)}{\tau}\cos(\omega t - \varphi(\omega)) = \frac{E_m}{\tau}\cos(\omega t)$$
$$S_m(\omega)\left[A(\omega)\cos(\omega t - \varphi(\omega)) - B(\omega)\sin(\omega t - \varphi(\omega))\right] = E_m\cos(\omega t)$$

Avec $A(\omega) = 1$ et $B(\omega) = \tau\omega$. On sait qu'une fonction de cette forme pouvait aussi se mettre sous la forme :

$$A(\omega)\cos(\Phi(\omega)) - B(\omega)\sin(\Phi(\omega)) = C(\omega)\cos(\Phi(\omega) + \psi(\omega))$$

avec $C(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ et $\psi(\omega) = \arctan(\tau\omega)$. Ici on a $\Phi(\omega) = \omega t - \varphi(\omega)$:

$$\underbrace{S_m(\omega)\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}_{=E_m}\cos(\omega t \underbrace{-\varphi(\omega) + \psi(\omega)}_{=0}) = \omega_0^2 E_m\cos(\omega t)$$

On en déduit donc :

$$S_m(\omega) = \frac{E_m}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \qquad \text{et} \qquad \varphi(\omega) = \arctan(\tau\omega)$$

On sait résoudre ce problème, mais c'est long et assez dur.

Definition : L'amplitude complexe

On utilise une méthode très classique en mathématiques pour résoudre des équations différentielles. Comme les équations différentielles que nous étudions sont linéaires, on définit pour une tension $u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi)$ et un courant $i(t) = I_m\cos(\omega t + \psi)$:

$$u(t) = Re(\underline{u}(t)) \qquad \text{avec : } \underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{U_m} e^{j\omega t}$$
$$i(t) = Re(\underline{i}(t)) \qquad \text{avec : } \underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi)} = \underline{I_m} e^{j\omega t}$$

avec U_m et I_m les amplitudes réelles du courant et de la tension, et $\underline{U_m}$ et $\underline{I_m}$ les amplitudes complexes. et on a :

$$\varphi = \arg \underline{U_m} \text{ et } \psi = \arg \underline{I_m}$$

Remarque : La notation complexe

En physique, on note le nombre imaginaire pure j tel que $j^2 = -1$ pour ne pas confondre avec i l'intensité du courant.
On note les nombre complexe en souligné : $\underline{u}$, $\underline{i}$, ...
La loi des mailles, la loi des nœuds et les ponts diviseurs de tension et de courant sont toujours valable en notation complexe.

Propriété : Équation différentielle complexe

On utilise les définitions du courant complexe et des tensions complexes suivantes :

$$s(t) = \mathscr{R}e\left(\underline{s}(t)\right) \qquad \text{avec : } \underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t - \varphi)} = \underline{S_m} e^{j\omega t}$$

De la même manière on a : $e(t) = \mathscr{R}e\left(\underline{e}(t)\right)$ avec : $\underline{e}(t) = E_m e^{j(\omega t}$
L'équation différentielle réelle devient alors :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{\tau} = \frac{E_m}{\tau}\cos(\omega t) \Longleftrightarrow \mathscr{R}e\left(\frac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t} + \frac{\underline{s}}{\tau} = \frac{\underline{e}}{\tau}\right)$$

On étudie alors l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\underline{s}}{\tau} = \dfrac{\underline{e}}{\tau}$

Propriété : Dérivation d'une grandeur complexe

On peut alors calculer les dérivées suivantes : $\dfrac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t} = j\omega S_m e^{j(\omega t-\varphi)} = j\omega \underline{s}(t)$ On retiendra : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^n\underline{s}}{\mathrm{d}t^n} = (j\omega)^n \underline{s}}$

Exemple : Résolution en complexe

L'équation différentielle complexe peut alors se simplifier :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t} + \frac{\underline{s}}{\tau} = \frac{\underline{e}}{\tau} \Longleftrightarrow \left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)\underline{s} = \frac{\underline{e}}{\tau} \Longleftrightarrow \underline{s} = \frac{\underline{e}}{1+j\tau\omega}$$

On obtient alors deux égalités, l'égalité de module et l'égalité d'argument :

$$|\underline{s}| = S_m = \frac{E_m}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \text{ et } \arg \underline{s} = \omega t - \varphi = \arg \underline{e} - \arg 1 + j\tau\omega \Longrightarrow \varphi = \arctan(\tau\omega)$$

Remarque : La puissance

On définit la puissance instantanée comme :

$$P(t) = u(t)i(t) = \mathscr{R}e\left(\underline{u}(t)\right) \times \mathscr{R}e\left(\underline{i}(t)\right) \neq \mathscr{R}e\left(\underline{u} \times \underline{i}\right) \text{ !!!!!}$$

Il faut toujours calculer la puissance à partir des grandeurs réelles !

2 Étude d'un circuit :

Definition : Impédance

En régime permanent pour un dipôle linéaire, on peut relier la relation entre la tension complexe $\underline{u}(t)$ à ses bornes en convention récepteur, et l'intensité complexe du courant $\underline{i}(t)$ qui traverse le dipôle.
On définit alors $\underline{Z}$, l'impédance complexe du dipôle comme le rapport :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$$

L'impédance complexe peut se mettre sous forme algébrique :

$$\underline{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

La partie réelle de l'impédance complexe est appelée résistance du dipôle $R(\omega)$, la partie imaginaire de l'impédance complexe est appelée réactance du dipôle $X(\omega)$.

Propriété : Impédances à connaître

Pour une résistance on a :

$$u(t) = Ri(t)$$
$$\underline{u}(t) = R\underline{i}$$

On a alors $\underline{Z}_R = R$.

Pour une bobine on a :

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$
$$\underline{u_L} = L\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} = jL\omega\underline{i}$$

On a alors : $\underline{Z}_L = jL\omega$

Pour un condensateur on a :

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$
$$\underline{i}(t) = C\frac{\mathrm{d}\underline{u}_C}{\mathrm{d}t} = jC\omega\underline{u}_C(t)$$

On a alors : $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega}$

Propriété : Comportement haute fréquence/basse fréquence

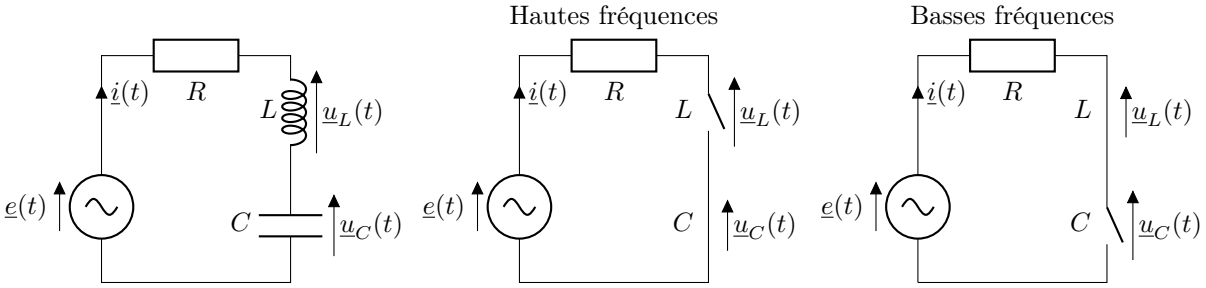
On peut faire l'approximation du comportement du condensateur dans la limite des hautes fréquences (lorsque $\omega \to +\infty$) et des basses fréquences (lorsque $\omega \to 0$).

En basse fréquence : $\begin{cases} |Z_C| \to +\infty \\ |Z_L| \to 0 \end{cases}$

En haute fréquence : $\begin{cases} |Z_C| \to 0 \\ |Z_L| \to +\infty \end{cases}$

Exemple :

Soit un circuit RLC série, on donne les circuits équivalent en hautes fréquences et basses fréquences :



Remarque : Association d'impédances

Toutes les lois d'associations restent valable en complexe avec les impédances. On peut notamment utiliser le pont diviseur de tension sur des circuits avec bobine et condensateur. C'est le point fort de la notation complexe.

Exemple : Circuit RC

Soit le circuit RC série suivant, alimenté par un générateur basse fréquence de f.e.m :

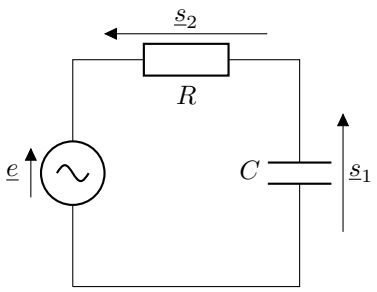
$$e(t) = E_m \cos(\omega t)$$

En notation complexe on applique le pont diviseur de tension pour obtenir directement :

$$\underline{s}_1 = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_c + R}\underline{e} \Longrightarrow \underline{s}_1 = \frac{\underline{e}}{1 + jRC\omega}$$

Ou bien :

$$\underline{s}_2 = \frac{R}{\underline{Z}_c + R}\underline{e} \Longrightarrow \underline{s}_2 = \frac{jRC\omega\underline{e}}{1 + jRC\omega}$$



3 Exemple de résonance en intensité

Definition : Phénomène de résonance

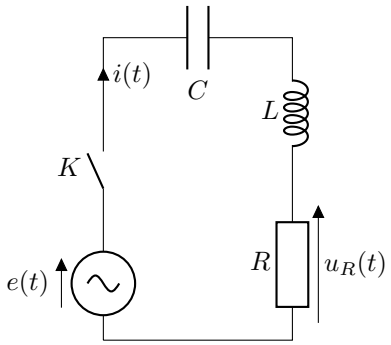
En régime sinusoïdal forcé, lorsque l'excitation sinusoïdale est d'amplitude constante, si on observe un maximum d'amplitude pour une fréquence $f_r \neq 0$, on appelle ce phénomène la résonance et f_r la fréquence de résonance.

Exemple : Circuit RLC série

On étudie un circuit RLC série alimenté par un GBF en régime sinusoïdale forcé de f.e.m. $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ avec E_m fixé et on fait varier ω.

On souhaite observer l'image de l'intensité du courant dans le circuit, on observe donc la tension $u_R(t) = Ri(t)$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\underline{u}_R(t) &= \frac{R}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C}\underline{e} = \frac{R\underline{e}}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}} \\
&= \frac{jRC\omega\underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0 Q}\underline{e}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\dfrac{\omega}{\omega_0 Q}} \\
&= \frac{\underline{e}}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}
\end{aligned}$$



En posant $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ on obtient : $\quad \underline{i} = \dfrac{\underline{u}_R}{R} = \dfrac{\underline{e}}{R}\dfrac{1}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$

Exemple : Recherche de la fréquence de résonance

On cherche x_r telle que la pulsation de résonance $\omega_r = x_r\omega_0$ pour laquelle l'amplitude réelle de l'intensité du courant est maximale. L'amplitude de l'intensité du courant s'exprime :

$$I_m = |\underline{i}| = \left|\frac{\underline{e}}{R}\frac{1}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}\right| = \frac{|\underline{e}|}{R}\frac{1}{\left|1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right|} = \frac{E_m}{R}\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}$$

On cherche alors $x_r = \dfrac{\omega_r}{\omega_0}$ tel que : $\quad \dfrac{\mathrm{d}I_m}{\mathrm{d}x}(x = x_r) = 0 \Longleftrightarrow x_r = 1$

On a résonance en intensité lorsque la fréquence d'excitation est la fréquence propre du système. Soit $\omega_r = \omega_0$.

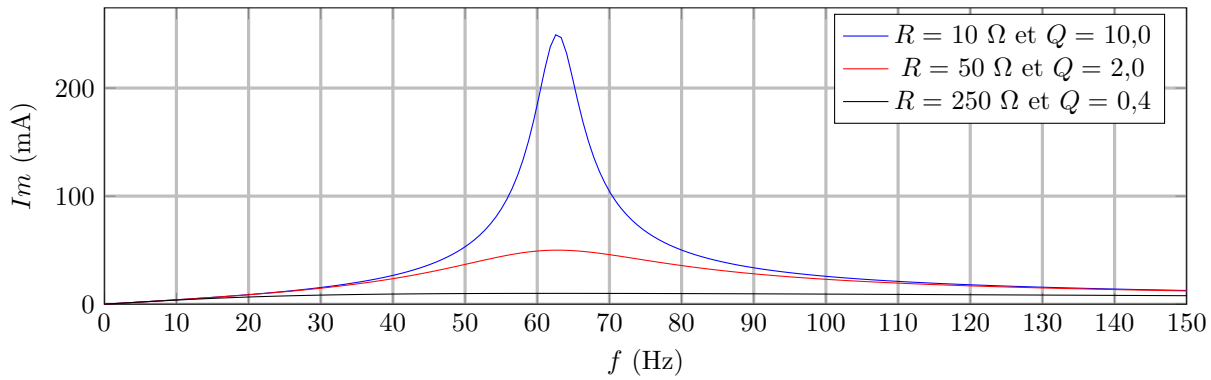
Exemple : Amplitude de résonance

L'amplitude de résonance $I_m(\omega_r)$ est donc : $\quad I_m(\omega_r) = \dfrac{E_m}{R}$

Exemple : Influence de R

On trace la courbe de résonance en fonction de f pour différentes valeurs de R :

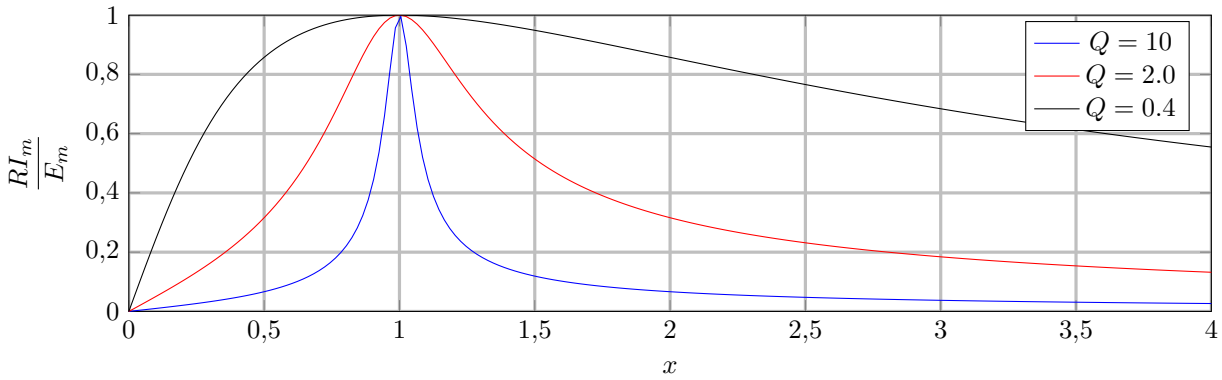
$L = 10$ mH ; $C = 1$ µF ; $E_m = 2{,}5$ V



On constate que plus R diminue, plus Q augmente et plus l'amplitude de résonance augmente.

Exemple : Influence de Q

On trace la courbe de résonance normalisée $\dfrac{I_m}{\max(I_m)}$ en fonction de x pour différentes valeurs de Q :



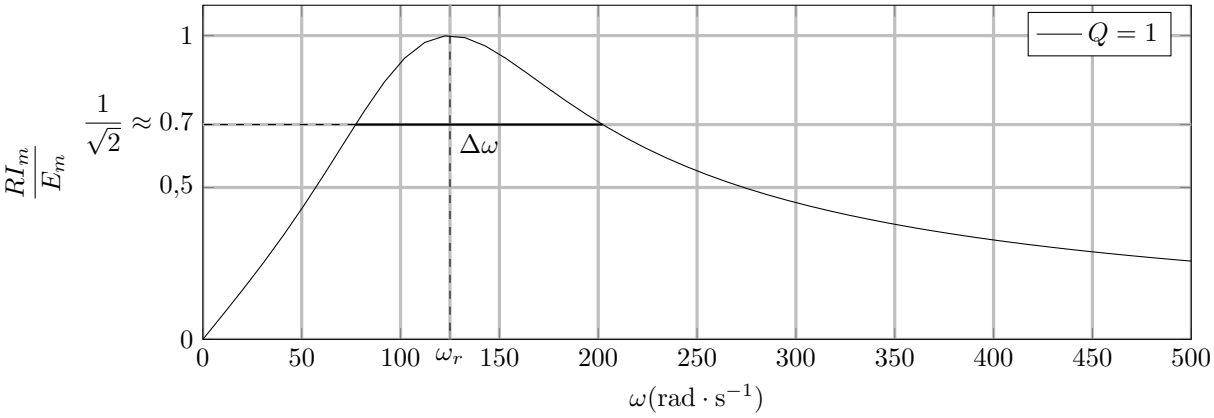
On constate que plus Q augmente, plus la largeur du pic augmente.

Definition : Acuité d'une résonance

Si on définit $\Delta f = f_2 - f_1$ (ou $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ou $\Delta x = x_2 - x_1$) comme la plage de fréquence pour lequel l'amplitude du signal respecte :

$$I_m(\omega) \geqslant \frac{\max(I_m)}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{2}} \quad \text{avec} \quad I_m(\omega_{1/2}) = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}$$

On définit l'acuité d'un résonance par le rapport : $\boxed{\frac{f_r}{\Delta f} = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{x_r}{\Delta x}}$



Propriété : Relation acuité-facteur de qualité

On cherche a exprimer l'acuité de la résonance en fonction de Q, pour cela on cherche x_1 et x_2 tel que :

$$I_m(x_{1/2}) = \frac{I_m(x_r)}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}$$

Ce qui revient à calculer : $\quad Q^2\left(x_{1/2} - \frac{1}{x_{1/2}}\right)^2 = 1$

On a alors deux équations du second degrés :

$$\left.\begin{array}{l} Q\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) = 1 \Longleftrightarrow x_1^2 - \frac{1}{Q}x_1 - 1 = 0 \\ Q\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) = -1 \Longleftrightarrow x_2^2 + \frac{1}{Q}x_2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > \frac{1}{Q^2} > 0$$

Chaque équation possède une solution positive : $\quad x_1 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \qquad x_2 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$

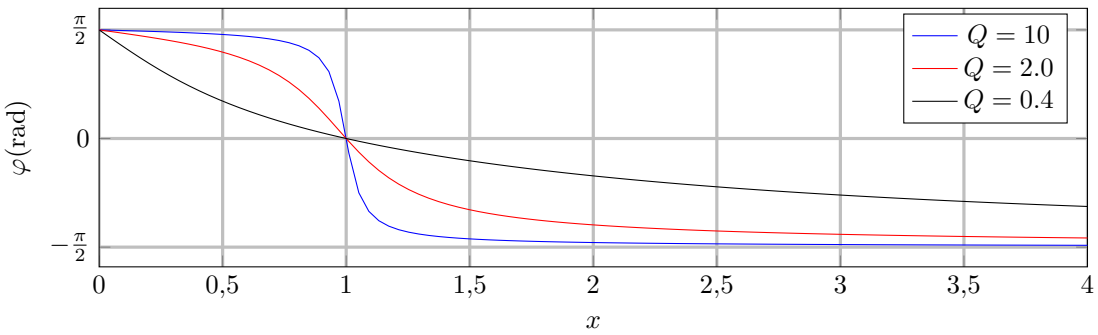
On obtient la relation : $\boxed{Q = \frac{f_r}{\Delta f} = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{x_r}{\Delta x}}$

Exemple : Déphasage

On cherche a regarder la différence de phase entre l'intensité du courant i et la f.e.m e du générateur. Soit $\underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$ et $\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t - \varphi)}$:

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}_R}{R} = \frac{\underline{e}}{R}\frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \Longleftrightarrow I_m e^{-j\varphi} = \frac{E_m}{R}\frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \Longrightarrow \varphi = \arg 1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Comme $\mathscr{R}e\left(1 + \left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = 1 > 0$ alors on peut exprimer le déphasage : $\boxed{\varphi(x) = -\arctan\left[Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]}$



On remarque également que pour $\omega = \omega_0$ le courant est en phase avec la tension du générateur.

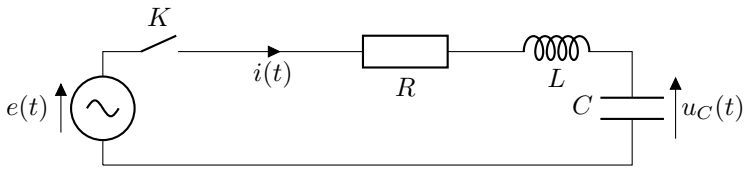
Propriété : Déphasage et pulsation propre

Lorsque le système oscille à $\omega = \omega_0$ la pulsation propre du système. L'intensité du courant et la tension du générateur sont en phase $\forall Q$.

4 Exemple de résonance en tension

Exemple : Circuit RLC série

On étudie un circuit RLC série alimenté par un GBF en régime sinusoïdale forcé de f.e.m. $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ avec E_m fixé et on fait varier ω.



On cherche cette fois à mesurer la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$:

$$\underline{u}_C(t) = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C}\underline{e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}\underline{e}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{\underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

En posant $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ on obtient : $\quad \underline{u}_C = \dfrac{\underline{e}}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$

Exemple : Recherche de la fréquence de résonance

On cherche la pulsation de résonance ω_r pour laquelle l'amplitude réelle de la tension aux bornes du condensateur est maximale. L'amplitude de u_C s'exprime :

$$U_{Cm} = |\underline{u}_C| = \left|\frac{\underline{e}}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}\right| = \frac{|\underline{e}|}{\left|1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}\right|} = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}$$

On cherche alors $x_r = \dfrac{\omega_r}{\omega_0}$ tel que :

$$\frac{\mathrm{d}U_{Cm}}{\mathrm{d}x}(x = x_r) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}((1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}{\mathrm{d}x}(x = x_r) = 0 \Longleftrightarrow x_r = 0 \text{ ou } x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Exemple : Amplitude de résonance

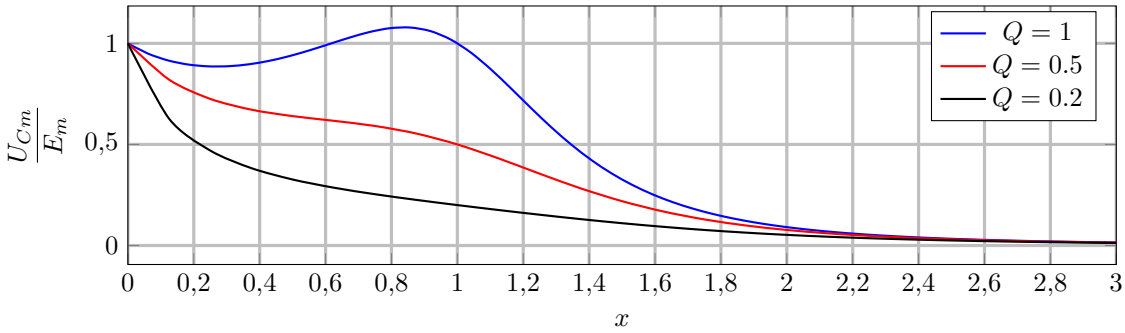
L'amplitude de résonance $U_{Cm}(\omega_r)$ est donc :

$$U_{Cm}(\omega_r) = \frac{E_m}{\sqrt{\left(1 - 1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1 - \frac{1}{2Q^2}}{Q^2}}} = \frac{E_m}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}}} = \frac{E_m Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Dans le cas d'un système faiblement amorti où $Q \gg 1$, on a $U_{Cm}(\omega_r) \approx E_m Q$

Exemple : Influence de Q

On peut alors tracer en fonction de x pour différentes valeurs de Q la fonction U_{Cm} :



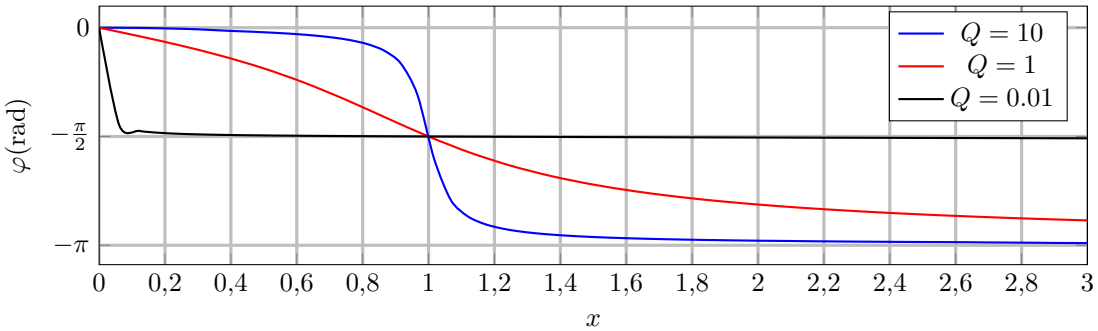
Exemple : Déphasage

Soit $\underline{e}(t = E_m e^{j\omega t})$ et $\underline{u}_C(t) = U_{Cm} e^{j(\omega t + \varphi)}$. On peut également calculer le déphasage de l'intensité du courant par rapport à la source de tension :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{e}}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}} \Longleftrightarrow U_{Cm} e^{j\varphi} = \frac{E_m}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}} \Longrightarrow \varphi = -\arg 1 - x^2 + j\frac{x}{Q}$$

Comme $\mathscr{R}e\left(1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}\right) = 1 - x^2$ alors on peut exprimer le déphasage :

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\arctan\left(\dfrac{x}{Q(1-x^2)}\right) & \text{pour } x < 1 \\ -\pi - \arctan\left(\dfrac{x}{Q(1-x^2)}\right) & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$



On remarque également que pour $\omega = \omega_0$ le courant est en phase avec la tension du générateur.

Propriété : Déphasage et pulsation propre

Lorsque le système oscille à $\omega = \omega_0$ la pulsation propre du système. La tension aux bornes du condensateur et la tension du générateur sont déphasé de $-\dfrac{\pi}{2}$ $\forall Q$.

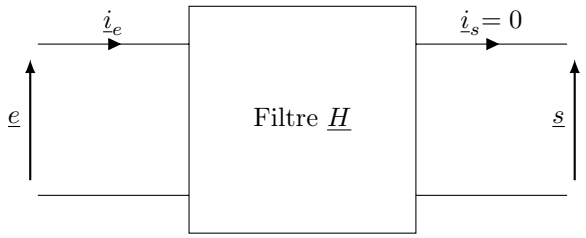
Signaux 5 : Filtres d'ordre 2 et résonance

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
1.5. Filtrage linéaire	
Signaux périodiques.	Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales. Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal. Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1. Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.**
Modèles de filtres passifs : passe-bas et passe- haut d'ordre 1, passe-bas et passe-bande d'ordre 2.	Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges. Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée. **Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.** **Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.** Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

1 Description d'un filtre

Definition : Fonction de transfert

On considère un circuit quadripôle avec 2 bornes pour un signal d'entré $e(t)$ et 2 bornes pour le signal de sortie $s(t)$.



En RSF $\underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$ et $\underline{s}(t) = S_m e^{j(\omega t+\varphi)}$, on définit la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ à la pulsation ω en circuit ouvert avec $i_s = 0$:

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S_m}{E_m} e^{j\varphi}$$

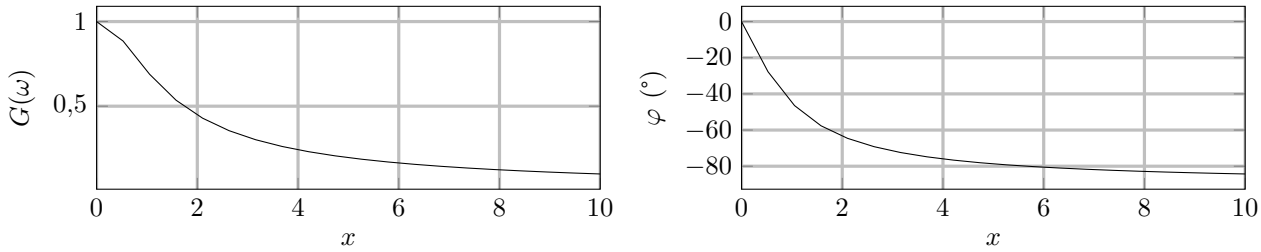
On peut alors exprimer le rapport des amplitudes réelle : $|\underline{H}| = S_m/E_m$

et le déphasage $\varphi = \arg(\underline{H})$

Propriété : Représentation graphique

On définit $G(\omega) = |\underline{H}|$ le gain et $\varphi = \arg \underline{H}$ la phase, dont on trace la représentation graphique en fonction de ω :

$$\text{Exemple avec } \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+jx} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}$$



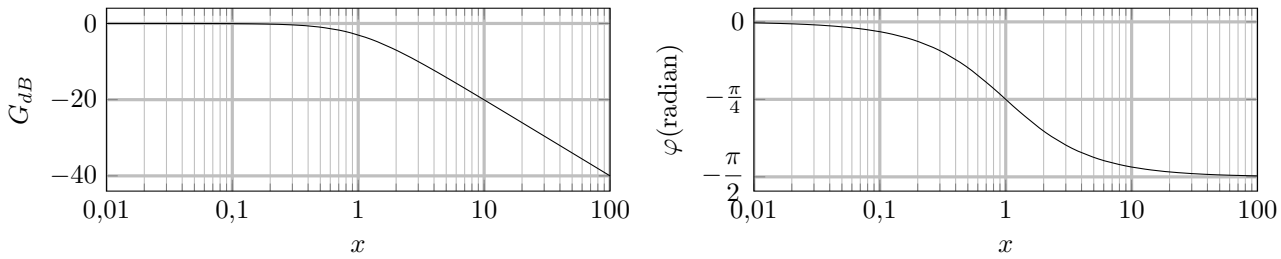
Definition : Diagramme de Bode

On définit le gain en décibel :

$$G_{dB} = 20 \log(G(\omega))$$

On utilise alors le diagramme de Bode pour représenter la variation de l'action d'un filtre en fonction de la fréquence. Le diagramme de Bode est composé de deux figures, on représente le G_{dB} et le déphasage φ en fonction de ω en échelle logarithmique. Une échelle logarithmique est une échelle où l'augmentation d'une graduation consiste à une multiplication par 10 de l'abscisse. On a par exemple :

$$\text{Exemple avec } \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+jx} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}$$



Propriété : Courbes asymptotiques

Dans une zone de fréquence où la courbe d'amplitude du diagramme de Bode est quasiment rectiligne, de pente p en dB/décade, le gain du filtre $G(\omega)$ est quasiment proportionnel à $\omega^{\frac{p}{20}}$.

Propriété : Domaine dérivateur

Un filtre se comporte comme un dérivateur dans un domaine de pulsation sur lequel la courbe d'amplitude a une pende de +20dB/dec.

Propriété : Domaine intégrateur

Un filtre se comporte comme un intégrateur dans un domaine de pulsation sur lequel la courbe d'amplitude a une pende de -20dB/dec.

Definition : Pulsation de coupure

On définit conventionnellement la pulsation de coupure ω_c du filtre comme :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{db,max}} - 3 \text{ dB}$$

2 Filtres d'ordre 1

Definition : Passe-bas d'ordre 1

La forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 1 est : $\underline{H}(\omega) = \dfrac{H_0}{1+j\tau\omega}$

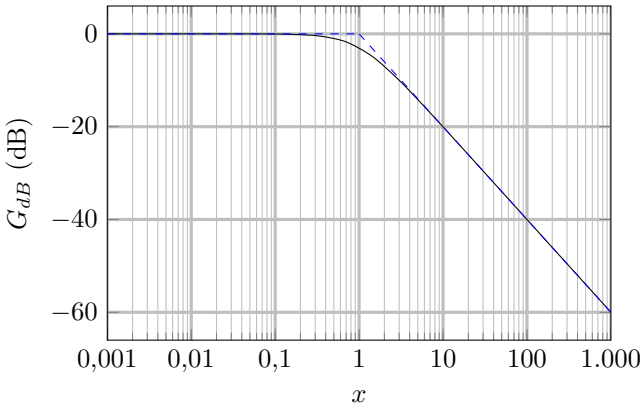
On peut alors poser $x = \tau\omega$ et on obtient : $\underline{H}(x) = \dfrac{H_0}{1+jx}$

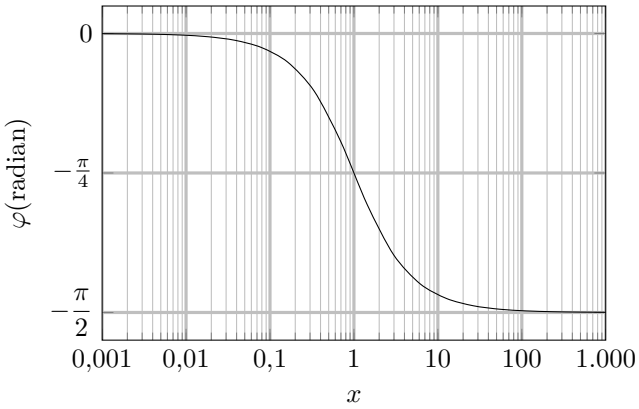
Propriété : Diagramme de Bode d'un PB d'ordre 1

On calcule les asymptotes du diagramme de Bode du filtre :

- $x \to 0$ alors $G_{dB} \approx 20\log(H_0)$ et $\varphi \approx 0$;
- $x \to +\infty$ alors $G_{dB} \approx 20\log(H_0) - 20\log(x)$ et $\varphi \approx -\dfrac{\pi}{2}$.

On trace alors le diagramme de Bode et ses asymptotes :





Pour cette fonction de transfert l'amplitude du signal de sortie est du même ordre de grandeur que l'amplitude du signal d'entrée en basse fréquence. Elle est atténuée en haute fréquence. On appelle alors ce filtre un filtre passe-bas.

Propriété : Caractère intégrateur

Lorssque $\omega \gg \omega_c$ on a $|\underline{H}| \approx \left|\dfrac{H_0\omega_c}{j\omega}\right|$ et $\varphi \approx -\dfrac{\pi}{2} = \arg \dfrac{H_0\omega_c}{j\omega}$ on peut alors faire l'approximation en haute fréquence :

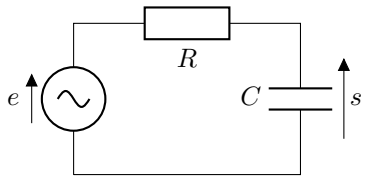
$$\underline{H} \approx \frac{\omega_c H_0}{j\omega}$$

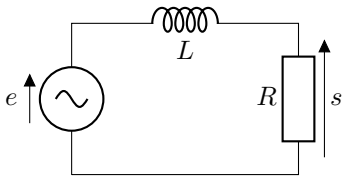
or une fonction de transfert de la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0\omega_c}{j\omega} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = H_0\omega_c e(t)$$

On a alors le signal $s(t)$ qui correspond au signal $e(t)$ intégré au cours du temps. On dit que le filtre présente un caractère intégrateur en haute fréquence.

Exemple : Circuit PB d'ordre 1





Definition : Passe-haut d'ordre 1

La forme canonique d'un filtre passe-haut d'ordre 1 est : $\underline{H}(\omega) = \dfrac{H_0 j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$

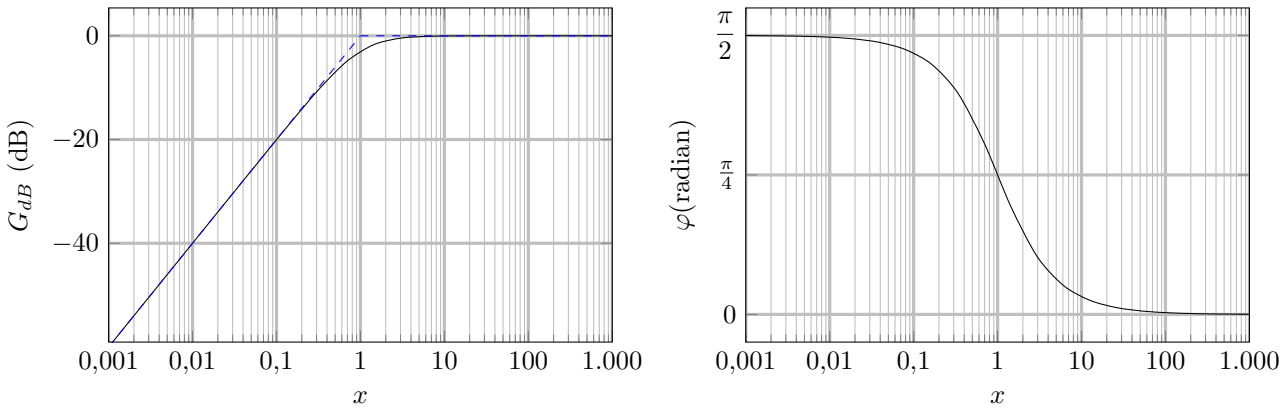
On peut alors poser $x = \tau\omega$ et on obtient : $\underline{H}(x) = \dfrac{H_0 jx}{1 + jx}$

Propriété : Diagramme de Bode d'un PH d'ordre 1

On calcule les asymptotes du diagramme de Bode du filtre :

- $x \to 0$ alors $G_{dB} \approx 20\log(H_0) + 20\log(x)$ et $\varphi \approx \dfrac{\pi}{2}$;
- $x \to +\infty$ alors $G_{dB} \approx 20\log(H_0)$ et $\varphi \approx 0$.

On trace alors le diagramme de Bode et ses asymptotes :



Pour cette fonction de transfert l'amplitude du signal de sortie est du même ordre de grandeur que l'amplitude du signal d'entrée en haute fréquence. Elle est atténuée en basse fréquence. On appelle alors ce filtre un filtre passe-haut.

Propriété : Caractère dérivateur

Lorssque $\omega \ll \omega_c$ on a $|\underline{H}| \approx \left|H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}\right|$ et $\varphi \approx \frac{\pi}{2} = \arg \frac{H_0 j\omega}{\omega_c}$ on peut alors faire l'approximation en haute fréquence :

$$\underline{H} \approx \frac{j\omega H_0}{\omega_c}$$

or une fonction de transfert de la forme :

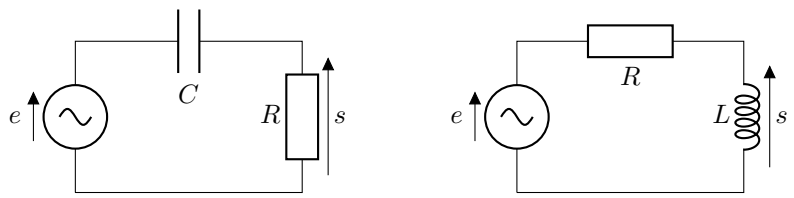
$$\underline{H} = \frac{j\omega H_0}{\omega_c} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \Longleftrightarrow s(t) = \frac{H_0}{\omega_c}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

On a alors le signal $s(t)$ qui correspond au signal $e(t)$ dérivé au cours du temps. On dit que le filtre présente un caractère dérivateur en basse fréquence.

Propriété : Pulsation de coupure

L'intersection des deux asymptotes se fait à se qu'on appelle la pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ pour $x_c = 1$. La pulsation de coupure sépare les deux régimes, le régime des basses fréquences et des hautes fréquences.

Exemple : Circuit PH ordre 1



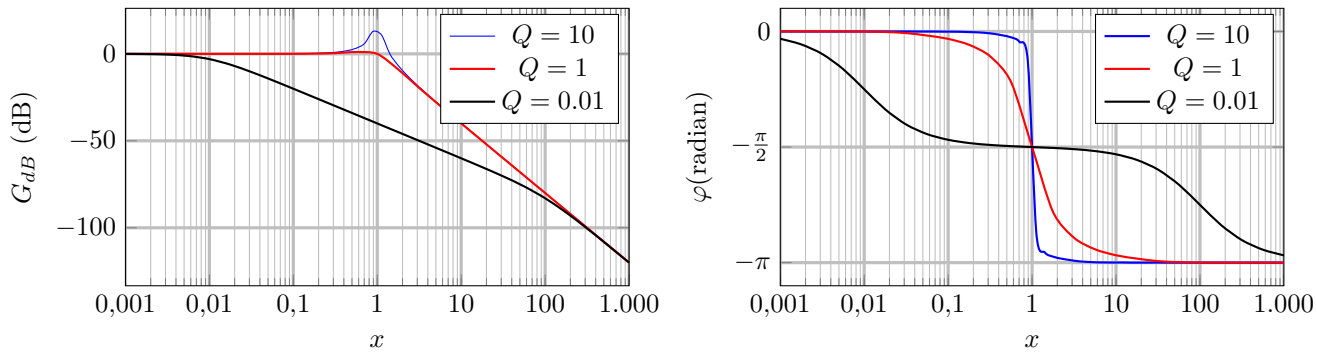
3 Filtres d'ordre 2

Definition : Passe-bas d'ordre 2

La forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 2 est : $\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \Longleftrightarrow \underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$

Propriété : Diagramme de Bode d'un PB d'ordre 2

On trace le diagramme de Bode :



On calcule les asymptotes du diagramme de Bode du filtre :

- $\omega \ll \omega_0$: on a $G_{dB} \approx 20\log(H_0)$ et $\varphi \approx 0$;
- $\omega_0 \ll \omega$: on a $G_{dB} \approx 20\log(H_0) - 40\log(x)$ et $\varphi \approx -\pi$.

Definition : Passe-bande d'ordre 2

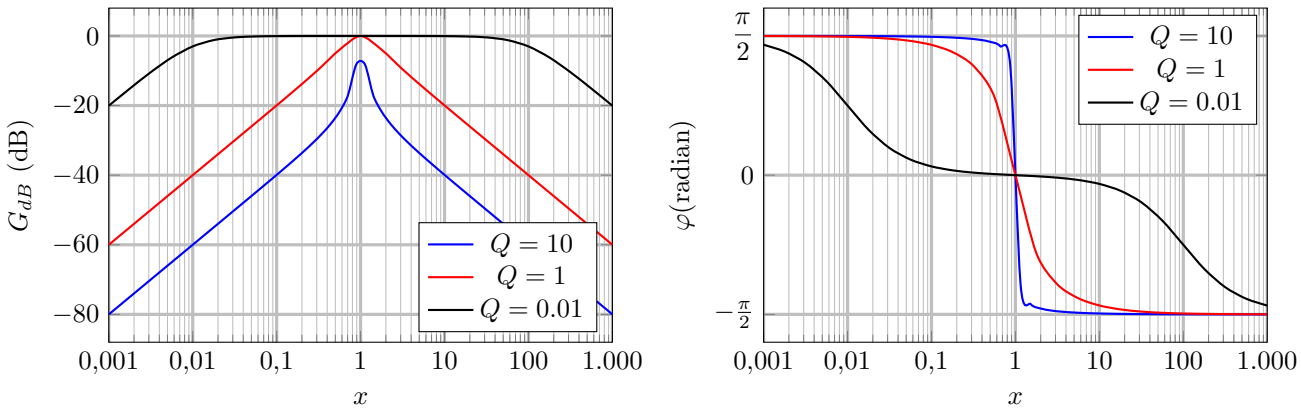
La forme canonique d'un filtre passe-bande d'ordre 2 est : $\underline{H}(\omega) = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$

On peut alors poser $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et on obtient : $\underline{H}(x) = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$ ou $\underline{H}(x) = \dfrac{H_0 \frac{jx}{Q}}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$

Propriété : Diagramme de Bode d'un Passe-bande d'ordre 2

On calcule les asymptotes du diagramme de Bode du filtre :

- $\omega \ll \omega_0$: on a $G_{dB} \approx 20\log\left(\dfrac{H_0}{Q}\right) + 20\log x$ et $\varphi \approx \dfrac{\pi}{2}$;
- $\omega_0 \ll \omega$: on a $G_{dB} \approx 20\log\left(\dfrac{H_0}{Q}\right) - 20\log x$ et $\varphi \approx -\dfrac{\pi}{2}$.



Definition : Passe-haut d'ordre 2

La forme canonique d'un filtre passe-haut d'ordre 2 est :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \times \frac{-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\dfrac{\omega}{\omega_0 Q}} \Longrightarrow \underline{H}(jx) = \frac{-H_0 x^2}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Propriété : Diagramme de Bode d'un Passe-haut d'ordre 2

On a alors : $|\underline{H}(x)| = \dfrac{H_0 x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$

et $\varphi = \arg \underline{H} = \arg -H_0 x^2 - \arg 1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q} = \pi - \arg 1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}$

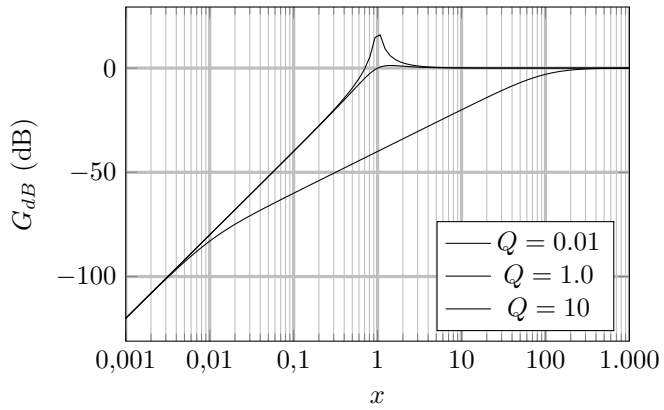
En basse fréquence $\omega \ll \omega_0$ et $x \ll 1$ on a :

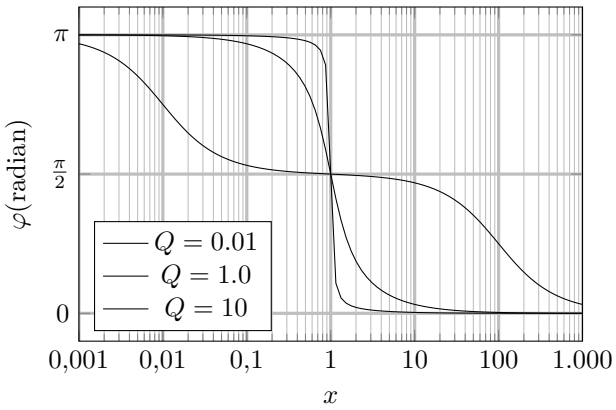
$$|\underline{H}(x)| \approx \frac{H_0 x^2}{1} \Longrightarrow G_{dB} \approx 20\log(H_0) + \underbrace{40\log(x)}_{+40dB/dec} \text{ et } \varphi \approx \pi - 0$$

En haute fréquence $\omega \gg \omega_0$ et $x \gg 1$ on a :

$$|\underline{H}(x)| \approx \frac{H_0 x^2}{x^2} \Longrightarrow G_{dB} \approx 20\log(H_0) = C^{te} \text{ et } \varphi \approx \pi - \pi = 0$$

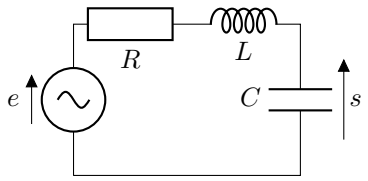
On obtient alors le diagramme de Bode suivant :



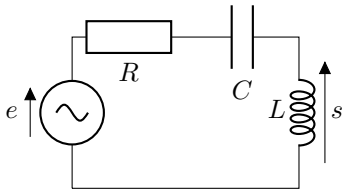


Exemple : Circuits à connaître

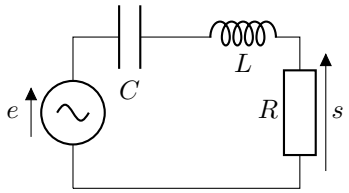
Circuit passe-bas d'ordre 2 :



Circuit passe-haut d'ordre 2 :



Circuit passe-bande d'ordre 2 :



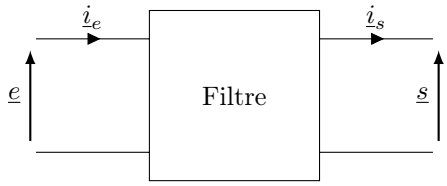
Méthode : Étude d'un filtre

- Utiliser les circuits équivalents en HF et BF pour prévoir la nature du filtre.
- Appliquer le pont diviseur de tension et éventuellement calculer une impédance équivalente pour obtenir la fonction de transfert.
- Mettre la fonction de transfert sous forme canonique en factorisant pour obtenir $1 + ...$ au dénominateur.
- Calculer la pulsation de coupure.
- Calculer les équations des asymptotes du diagramme de Bode (G_{dB} et φ).
- Tracer le diagramme de Bode asymptotique, préciser les pentes des asymptotes et les valeurs à l'intersection entre les asymptotes.

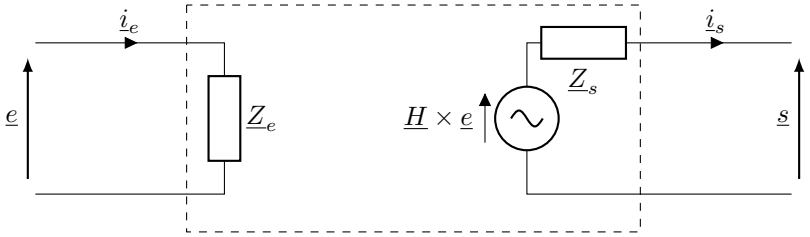
4 Influence du circuit

Definition : Impédance de sortie/entrée d'un filtre

Soit un filtre modélisé par un quadripôle :



On peut modéliser le quadripôle comme deux circuits :



On définit alors :

L'impédance d'entrée du filtre :

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{e}}{\underline{i}_e}$$

La fonction de transfert du filtre à vide ($\underline{i}_s = 0$) :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

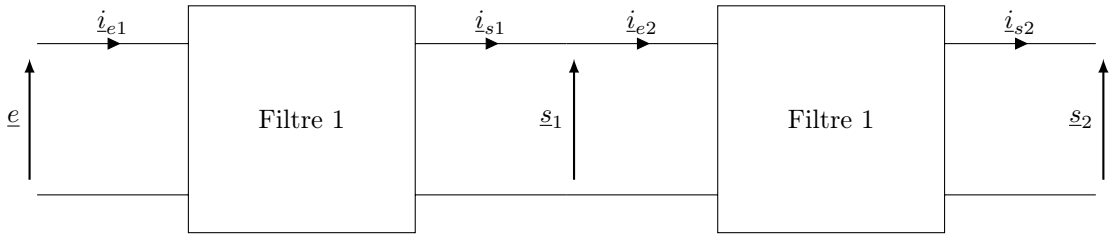
L'impédance de sortie du filtre :

$$\underline{Z}_s = \frac{\underline{s} - \underline{H} \times \underline{e}}{\underline{i}_s}$$

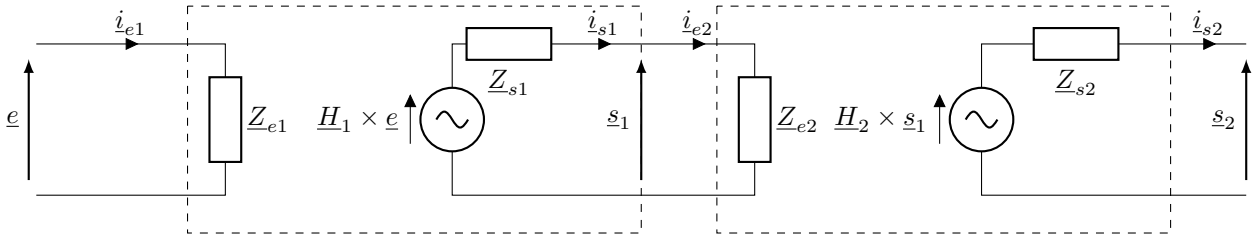
En dehors de la fonction de transfert, les expressions de $\underline{Z}_e$ et $\underline{Z}_s$ dépendent forcément des composant branché après le filtre car ils dépendent des courants.

Propriété : Mise en cascade de filtres

On considère la mise en cascade de deux filtres :



En définissant les fonctions de transfert $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$ pour $\underline{i}_{s1} = 0$ et $\underline{i}_{s2} = 0$ on obtient la modélisation suivante :



En observant qu'on a forcément $\underline{i}_{s1} = \underline{i}_{e2}$ on obtient alors rapidement :

$$\underline{s}_1 = \underline{H}_1 \times \underline{e} - \frac{\underline{Z}_{s1}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}} \times \underline{H}_1 \times \underline{e} = \underline{H}_1 \times \underline{e} \times \left(\frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_{s1}}{\underline{Z}_{e2}}} \right)$$

Si $\underline{i}_{s2} = 0$, on a également : $\underline{s}_2 = \underline{H}_2 \underline{s}_1$ Si $\left| \frac{\underline{Z}_{s1}}{\underline{Z}_{e2}} \right| \ll 1$. On peut alors obtenir : $\underline{s}_2 \approx \underline{H}_2 \times \underline{H}_1 \times \underline{e}$

5 Signaux périodiques

Propriété : Décomposition

Soit un signal $s(t)$ périodique de période $T_S = \frac{1}{f_S}$. Un théorème mathématique découvert par Joseph Fourier indique que :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n)$$

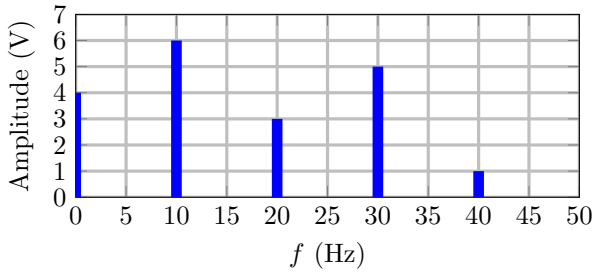
avec A_n des constantes positives et φ_n des constantes.

On peut donc décomposer n'importe quel signal périodique en son développement en série de Fourier. A_n et φ_n représentent l'amplitude et la phase initiale de la $n^{\text{ième}}$ composante sinusoïdale du signal $s(t)$.

A_0 est la composante continue du signal, c'est aussi sa valeur moyenne. La composante pour $n = 1$ est appelée fondamentale. Les composantes $n > 1$ sont appelées harmoniques de rang n.

Propriété : Spectre

On peut caractériser un signal périodique par son spectre, la courbe des amplitudes associée à chaque fréquence :



Definition : Valeur moyenne

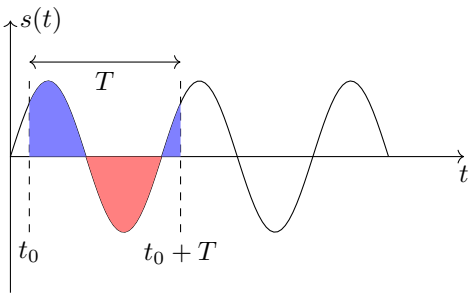
On peut calculer la valeur moyenne d'un signal périodique $s(t)$ de période T :

$$S_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\mathrm{d}t$$

Propriété : Valeur moyenne d'un signal sinusoïdal

Pour un signal sinusoïdal de la forme $s(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$ on a comme valeur moyenne :

$$\begin{aligned} S_0 = \langle s(t) \rangle &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A_1 \cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$



Propriété : Valeur moyenne d'un signal périodique

Pour un signal périodique quelconque $s(t)$ de période T, on a alors grâce à la décomposition en série de Fourier :

$$S_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)\mathrm{d}t = A_0$$

Definition : Valeur efficace

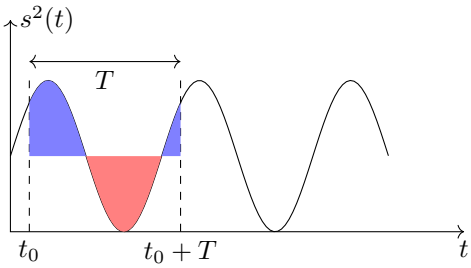
On peut calculer la valeur efficace d'un signal périodique $s(t)$ de période T :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\mathrm{d}t}$$

Propriété : Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

Pour un signal sinusoïdal de la forme $s(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$ on a comme valeur moyenne :

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A_1^2 \cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t} \\ &= \frac{A_1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$



Propriété : Linéarité d'un filtre

On définit un filtre linéaire un opérateur qui permet de sélectionner des signaux utiles, sur un critère fréquentiel. Il est composé d'un circuit électrique recevant un signal d'entre $e(t)$ et délivrant un signal de sortie $s(t)$ tous deux analogiques.

On considère un filtre linéaire lorsque la relation entre le signal d'entrée $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$ est une équation différentielle linéaire de la forme :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + a_2 \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = b_0 e(t) + b_1 \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

L'ordre de l'équation différentielle est également appelé ordre du filtre.

Le filtre étant linéaire, comme un signal d'entré peut être décomposé suivant son spectre, on a pour :

$$e(t) = \sum_{\omega_1}^{\omega_n} E_i \cos(\omega_i t)$$

Pour chaque ω_i on a la réponse $s_i(t) = \mathscr{R}e\left(\underline{H}(\omega_i)\underline{e}_i(t)\right) = S_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$. On peut alors calculer :

$$s(t) = \sum_{\omega_1}^{\omega_n} \mathscr{R}e\left(\underline{H}(\omega_i) E_i e^{j\omega_i t}\right)$$

6 Capacité numérique : Filtrage numérique d'un signal périodique

Propriété : Capacité numérique

Simuler, à l'aide de python, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des carctéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.

Definition : Spectre d'un signal périodique

Soit un signal $e(t)$ périodique de période $T_S = \dfrac{1}{f_S}$. Un théorème mathématique découvert par Joseph Fourier indique que :

$$e(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n)$$

avec C_n des constantes positives et φ_n des constantes.

On peut donc décomposer n'importe quel signal périodique en son développement en série de Fourier. C_n et φ_n représentent l'amplitude et la phase initiale de la $n^{\text{ième}}$ composante sinusoïdale du signal $s(t)$.

Exemple : Signal rectangulaire

Soit un signal rectangulaire $e(t)$ d'amplitude E et de période T, définit sur $[0; T[$ comme :$e(t) = \begin{cases} E \text{ pour } t \in [0; T/2[\\ -E \text{ pour } t \in [T/2; T[\end{cases}$

```
def Crenau(t,nmax):
    e=np.zeros(len(t))
    N=np.array([n for n in range(1,nmax,2)])
    En=np.array([4/(np.pi*n) for n in N])
    phin=np.array([3*np.pi/2 for n in N])
    for k in range(len(N)):
        n=N[k]
        e=e+En[k]*np.cos(2*np.pi*n*f1*t+phin[k])
    return e,N,En,phin
```

Definition : Linéarité d'un filtre

Si on considère un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(f)$. Si le signal d'entré est périodique de fréquence f_1, et de décom-

position qui donne les suites C_n et φ_n alors le signal de sorti sera :

$$e(t) = |H(0)|\, C_0 \cos(\arg \underline{H}(0)) + \sum_{n=1}^{+\infty} |H(nf_1)|\, C_n \cos(2\pi n f_1 t + \varphi_n - \arg \underline{H}(nf_1))$$

Propriété : Fonction transfert

On peut écrire des fonctions pour simuler l'action d'un filtre pour chaque type de filtre :

- Filtre passe-bas d'ordre 1 :

```
def gainPB1(f,fc):
    return 1/np.sqrt(1+(f/fc)**2)
def argPB1(f,fc):
    return -np.arctan(f/fc)
```

Propriété : Action du filtre

Pour connaître la signal de sorti, on utilise la linéarité du filtre, et en utilisant les fonctions définies ci-dessus :

```
def PB1(N,En,phin,t,f,fc):
    s=np.zeros(len(t))
    for k in range(len(N)):
        n=N[k]
        s=s+En[k]*gainPB1(n*f1,fc)*np.cos(2*np.pi*n*t+phin[k]+argPB1(n*f1,fc))
    return s
    nmax=100
  n=10000
  f1=1
  dt=2/(f1*(n-1))
  t=np.array([k*dt for k in range(n)])
  plt.figure()
  e,N,En,phin=Crenau(t,nmax)
  plt.plot(t,e)
  fc=0.1*f1
  s=PB1(N,En,phin,t,f1,fc)
  plt.plot(t,s)
  fc=1*f1
  s=PB1(N,En,phin,t,f1,fc)
  plt.plot(t,s)
  fc=10*f1
  s=PB1(N,En,phin,t,f1,fc)
  plt.plot(t,s)
  plt.legend(['e(t)','s(t) pour fc=f1/10','s(t) pour fc=f1','s(t) pour fc=10f1'])
  plt.xlabel(['t en s'])
  plt.ylabel(['e et s en V'])
  plt.show()
```

Troisième partie

Mécanique

Liste des chapitres Mécanique

1 Cinématique du point matériel **69**
1 Relativité du mouvement . . . 69
2 Repérage d'un point . . . 71
3 Vitesse d'un point . . . 73
4 Accélération d'un point . . . 74
5 Exemples : . . . 75
2 Dynamique du point matériel **77**
1 Principe d'inertie . . . 77
2 Principe fondamental de la dynamique . . . 78
3 Le mouvement dans un champ de pesanteur uniforme . . . 81
4 Mouvement avec forces de frottements fluides . . . 82
5 Mouvement circulaire . . . 84
3 Les oscillateurs mécanique **85**
1 Le système masse-ressort . . . 85
2 Les oscillateurs amorti . . . 86
3 Les oscillations forcées . . . 87
4 Capacité numérique . . . 88
4 Énergie, travail, puissance **89**
1 Les grandeurs énergétiques . . . 89
2 Le théorème de l'énergie cinétique . . . 90
3 Étude qualitative de mouvements à une dimension . . . 94
4 Application : Oscillation proche de l'équilibre . . . 95
5 Mouvement de particules chargées **97**
1 Force de Lorentz et notions de champs . . . 97
2 Aspect énergétique . . . 98
3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme . . . 99
4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme . . . 101

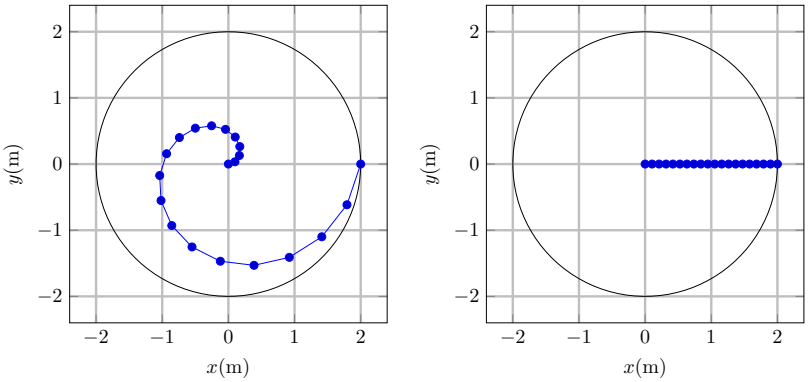
Mécanique 1 : Cinématique du point matériel

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point	
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
Cinématique du point Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques. Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue. Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.	Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. **Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.**

1 Relativité du mouvement

On considère un homme qui marche sur un manège en rotatin du centre vers le bord en ligne droite :

- une caméra située sur le plafond du manège filme ;
- une caméra située sur un arbre filme



Question : Quelle figure correspond à quel point de vue ? On voit alors que le mouvement est relatif à l'observateur.

Definition : Référentiel

C'est un solide qu'on considère comme fixe et auquel est lié l'observateur du mouvement.

Le référentiel est caractérisé par :

- un repère $\mathscr{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$;
- une horloge qui définit une origine des temps $t = 0$ et la mesure des instants suivants t.

Remarque :

- Un instant t ou t_1, qui correspond à une coordonnée temporelle par rapport à son origine.
- Une durée $\Delta t = t_2 - t_1$ qui correspond à la variation de temps séparant deux instants t_1 et t_2.
- Les trois vecteurs $\overrightarrow{u}_x$, $\overrightarrow{u}_y$, $\overrightarrow{u}_z$ peuvent être quelconques tant qu'ils ne sont pas colinéaires et qu'ils sont fixes dans $\mathscr{R}$.
- Définir un référentiel est la première étape lors d'une étude de mécanique. On ne peut étudier un mouvement si on ne sait pas dans quel référentiel on se place. Pour le définir, il faut préciser à quel objet le référentiel est lié, et donner une origine et trois axes.

Definition : Base orthonormée directe (BOND)

Une base $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ est orthonormée directe si :

- Vecteurs normés : $\|\overrightarrow{u_x}\| = \|\overrightarrow{u_y}\| = \|\overrightarrow{u_z}\| = 1$
- Vecteurs orthogonaux : $\overrightarrow{u_x} \cdot \overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_x} \cdot \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_y} \cdot \overrightarrow{u_z} = 0$
- Base directe : $\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_z}$ (règle de la main droite)

Propriété : Produit scalaire

Pour deux vecteur $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{Q}$ qu'on exprime dans une BOND $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$:

$$\overrightarrow{P} = P_x \overrightarrow{u}_x + P_y \overrightarrow{u}_y + P_z \overrightarrow{u}_z \text{ et } \overrightarrow{Q} = Q_x \overrightarrow{u}_x + Q_y \overrightarrow{u}_y + Q_z \overrightarrow{u}_z$$

Le produit scalaire de $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{Q}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{Q} = \overrightarrow{Q} \cdot \overrightarrow{P} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z = \|\overrightarrow{P}\| \|\overrightarrow{Q}\| \cos(\alpha) \text{ avec } \alpha(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q})$$

Propriété : Hypothèses non-relativistes

Lors d'une description classique on a :

- les durées $\Delta t = t_2 - t_1$ qui ne dépendent pas du référentiel d'étude ;
- les distances entre deux points M_1 et M_2 : $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \sqrt{\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}}$ qui ne dépendent pas du référentiel d'étude.

Ces deux propriétés ne sont valables que lorsqu'on peut décrire de manière classique le mouvement. Si la vitesse des objets devient non négligeable devant le vitesse de la lumière c, on assiste à une dilatation du temps et de l'espace en fonction du référentiel d'observation. C'est la mécanique relativiste d'Einstein.

Propriété : Produit vectoriel

Pour deux vecteur $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{Q}$ qu'on exprime dans une BOND $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ on définit le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{P} \wedge \overrightarrow{Q} = -\overrightarrow{Q} \wedge \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_y Q_z - P_z Q_y \\ P_z Q_x - P_x Q_z \\ P_x Q_y - P_y Q_x \end{pmatrix} = \overrightarrow{W}$$

avec $\overrightarrow{W}$ qui est orthogonal au plan défini par $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{Q}$. On a également

$$\|\overrightarrow{W}\| = \|\overrightarrow{P}\| \|\overrightarrow{Q}\| \sin(\alpha) \text{ avec } \alpha(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q})$$

Exemple : Référentiel héliocentrique

Lié au centre du Soleil et à trois étoiles «fixes», c'est-à-dire suffisamment lointaines pour nous paraître fixes sur la durée du problème. Le soleil tourne dans le référentiel mais son centre est fixe. Noté $\mathscr{R}_K$.

Exemple : Référentiel géocentrique

Lié au centre de la Terre et à trois étoiles «fixes». En translation par rapport au référentiel héliocentrique. La Terre tourne dans le référentiel mais son centre est fixe. Noté $\mathscr{R}_G$.

Exemple : Référentiel Terrestre

Lié à la Terre, il peut se présenter en un point quelconque de la planète. Il est en rotation autour du centre de la Terre par rapport au référentiel géocentrique. C'est très souvent le référentiel classique en laboratoire. Noté $\mathscr{R}_T$.

Definition : Trajectoire

La trajectoire d'un point M, dans un référentiel donné, est l'ensemble des positions de ce point au cours du temps, rapportées à un repère fixe dans ce référentiel.

2 Repérage d'un point

Definition : Point matériel

Un point matériel est un solide dont on peut négliger l'extension spatiale et la rotation sur lui-même.

Definition : vecteur position

La position du point M, par rapport au point O fixe dans un référentiel $\mathscr{R}$, à un instant donné, est défini par la vecteur position :

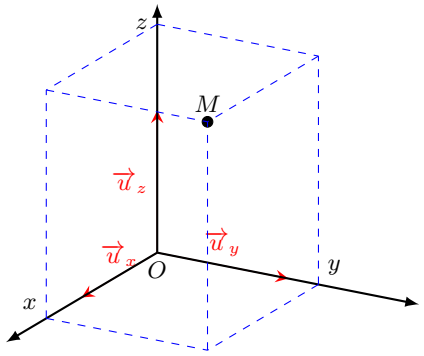
$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$$

Definition : Coordonnées Cartésiennes

C'est le repère fixe par définition dans le référentiel d'étude. Il est définit à partir d'une origine O fixe et d'une BOND $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ fixe également.

Le vecteur position s'exprime dans ce repère en fonction des coordonnées cartésienne (x, y, z) :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{u}_x + y(t)\overrightarrow{u}_y + z(t)\overrightarrow{u}_z}$$



Propriété :

Pour un vecteur $\overrightarrow{P}$ quelconque dans le repère cartésien, on peut calculer ses coordonnées (P_x, P_y, P_z) en faisant la projection du vecteur sur chaque axe du repère. Pour ça on utilise le produit scalaire :

$$P_x = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{u_x}\,;\ P_y = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{u_y}\,;\ P_z = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{u_z}$$

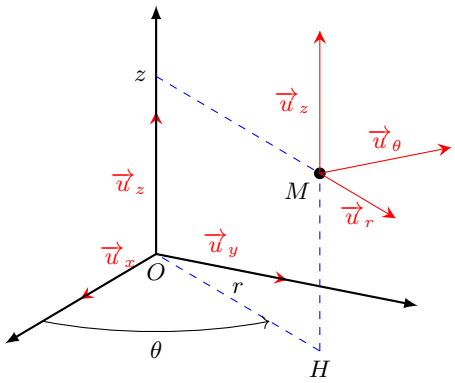
Definition : Coordonnées cylindriques

On définit une BOND mobile liée au point M tel que :

- On projette le point M dans le plan Oxy pour obtenir le point H ;
- On définit $r = \|\overrightarrow{OH}\|$ et $\overrightarrow{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{\|\overrightarrow{OH}\|}$;
- On définit $\theta = (\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_r)$ et $\overrightarrow{u}_\theta = \overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_r}$;

On peut alors exprimer le vecteur position en fonction des coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\overrightarrow{u}_r(t) + z(t)\overrightarrow{u}_z}$$

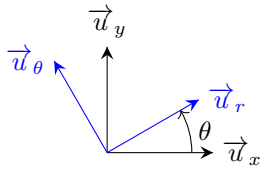


Propriété : Liens entre coordonnées cylindriques et cartésiennes

On peut projeter les vecteurs $\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{u}_\theta$ dans la base cartésienne :

$$\vec{u}_r = (\vec{u_r}\cdot\vec{u_x})\vec{u}_x + (\vec{u_r}\cdot\vec{u_y})\vec{u}_y$$
$$\vec{u}_r = \cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y$$
$$x = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{u_x} = r\cos(\theta)$$

$$\vec{u}_\theta = (\vec{u_\theta}\cdot\vec{u_x})\vec{u}_x + (\vec{u_\theta}\cdot\vec{u_y})\vec{u}_y$$
$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y$$
$$y = \overrightarrow{OM}\cdot\vec{u_y} = r\sin(\theta)$$



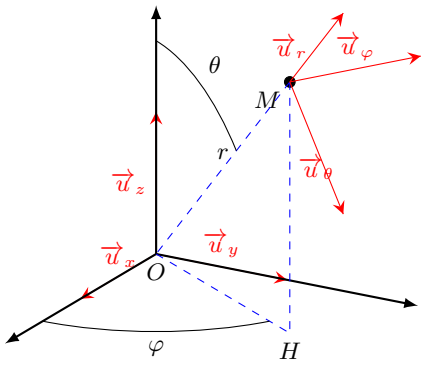
Definition : Coordonnées sphériques

On définit une BOND mobile tel que :

- $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ et $r = \|\overrightarrow{OM}\|$;
- l'angle $\theta = (\vec{u}_z, \vec{u}_r)$;
- $\vec{u}_\theta$ est orthogonal à $\vec{u}_r$ et dans le plan OMH et orienté dans le sens de θ ;
- $\vec{u}_\varphi$ correspond au $\vec{u}_\theta$ des coordonnées cylindriques ;

On peut alors exprimer le vecteur position en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{u}_r(t)}$$



Definition : Déplacement élémentaire

On définit $\vec{\mathrm{d}l}$ (ou $\overrightarrow{\mathrm{d}OM}$) tel que entre un instant t et un instant infiniment proche $t + \mathrm{d}t$, le point M s'est déplacé de :

$$\vec{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = \overrightarrow{OM}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t) \qquad \text{avec } \vec{\mathrm{d}l} \text{tangent à la trajectoire}$$

Propriété : Expression de $\vec{\mathrm{d}l}$ à partir d'un schéma

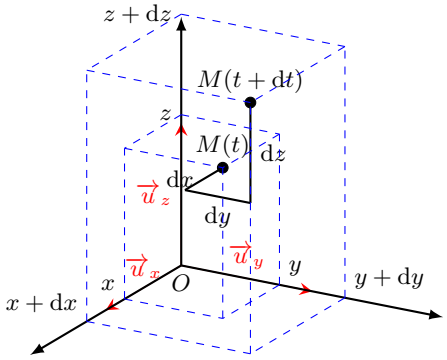
Coordonnées cartésiennes :

On a les coordonnées du point M à l'instant t : (x, y, z)

On a les coordonnées du point M à l'instant $t + \mathrm{d}t$: $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$

où $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$ correspondent à la variation élémentaire sur chaque coordonnée entre t et $t + \mathrm{d}t$

$$\boxed{\vec{\mathrm{d}l} \approx \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z}$$



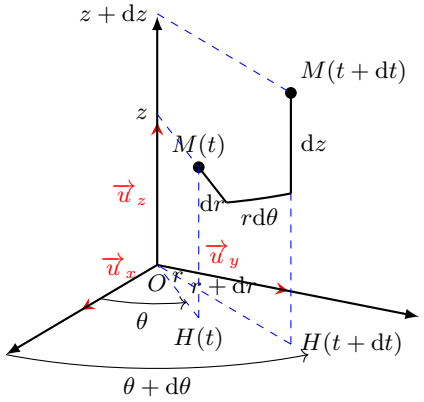
Coordonnées cylindriques :

On a les coordonnées du point M à l'instant t : (r, θ, z)

On a les coordonnées du point M à l'instant $t + \mathrm{d}t$: $(r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, z + \mathrm{d}z)$

où $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}z$ correspondent à la variation élémentaire sur chaque coordonnée entre t et $t + \mathrm{d}t$

$$\boxed{\vec{\mathrm{d}l} \approx \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z}$$



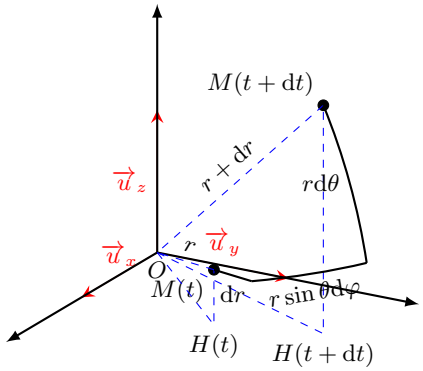
Coordonnées sphériques :

On a les coordonnées du point M à l'instant t : (r, θ, z)

On a les coordonnées du point M à l'instant $t + \mathrm{d}t$: $(r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, z + \mathrm{d}z)$

où $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}z$ correspondent à la variation élémentaire sur chaque coordonnée entre t et $t + \mathrm{d}t$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}l} \simeq \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u}_r + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u}_\theta + r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}}$$



3 Vitesse d'un point

Definition : Vitesse expérimentale

Si on connaît la position du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ à un instant t_1 et à un instant $t_2 = t_1 + \Delta t$ alors on peut approcher expérimentalement la vitesse du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ à l'instant t_1 tel que :

$$\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t_1) = \left.\frac{\overrightarrow{OM}(t_1 + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t_1)}{\Delta t}\right|_{\mathscr{R}}$$

Definition : Vitesse instantannée

Dans la limite où $\Delta t \to 0$ on définit la vitesse instantannée du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ par :

$$\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}$$

On note généralement $v = \|\overrightarrow{v}\|$.

Remarque :

La vitesse, tout comme la position et la trajectoire, dépend du référentiel. C'est pour cela que nous préciserons toujours dans sa notation ainsi que celle de la dérivée, le référentiel.

Il ne faut pas confondre référentiel et système de coordonnée. On peut exprimer un vecteur dans une base mobile (cylindrique ou sphérique) et le dériver dans une référentiel associé à une base fixe (cartésienne).

Propriété : Expression en coordonnées cartésiennes

Pour obtenir l'expression du vectuer vitesse du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ en coordonnées cartésiennes il existe deux méthodes :

- **Dérivation directe :** On calcule directement la dérivée de l'expression de $\overrightarrow{OM}(t)$ dans le référentiel donné.

$$\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}(x(t)\overrightarrow{u}_x + y(t)\overrightarrow{u}_y + z(t)\overrightarrow{u}_z)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}$$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_z + x(t)\cancel{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_x}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}} + y(t)\cancel{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_y}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}} + z(t)\cancel{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_z}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}}$$

On obtient alors : $\boxed{\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\overrightarrow{u}_y + \dot{z}\overrightarrow{u}_z}$

- **À partir du déplacement élémentaire :** On divise simplement le déplacement élémentaire par $\mathrm{d}t$.

$$\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \frac{\mathrm{d}x\,\overrightarrow{u}_x + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u}_y + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u}_z}{\mathrm{d}t}$$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\overrightarrow{u}_y + \dot{z}\overrightarrow{u}_z$$

Remarque :

La norme de la vitesse en coordonnée cartésienne vaut : $v = \|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}} = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$
Par soucis d'allégement des notations, les dérivées des grandeurs scalaires comme x, y, z, r, θ et φ seront notée $\dot{x}$, ...

Propriété : Expression en coordonnées cylindriques

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ en coordonnées cylindriques il existe deux méthodes :

- **Dérivation directe :** On calcule directement la dérivée de l'expression de $\overrightarrow{OM}(t)$ dans le référentiel donné.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}\\ &= \left.\frac{\mathrm{d}(r(t)\overrightarrow{u}_r(t)+z(t)\overrightarrow{u}_z)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}\\ &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_r+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_z+r(t)\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_r}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}+z(t)\cancel{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_z}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}}\end{aligned}$$

On doit alors calculer la dérivée du vecteur $\overrightarrow{u}_r$ par rapport au temps dans le référentiel $\mathscr{R}$.

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_r}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}(\cos(\theta(t))\overrightarrow{u}_x+\sin(\theta(t))\overrightarrow{u}_y)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(-\sin(\theta(t))\overrightarrow{u}_x+\cos(\theta(t))\overrightarrow{u}_y) = \dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$$

On obtient alors : $\boxed{\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{u}_z}$

- **À partir du déplacement élémentaire :** On divise simplement le déplacement élémentaire par $\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}\\ &= \frac{\mathrm{d}r\overrightarrow{u}_r + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u}_\theta + \mathrm{d}z\overrightarrow{u}_z}{\mathrm{d}t}\\ &= \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{u}_z\end{aligned}$$

4 Accélération d'un point

Definition : accélération expérimentale

Si on connaît la vitesse du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ à un instant t_1 et à un instant $t_2 = t_1 + \Delta t$ alors on peut approcher expérimentalement l'accélération du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ à l'instant t_1 tel que :

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t_1) = \left.\frac{\overrightarrow{v}(t_1+\Delta t)-\overrightarrow{v}(t_1)}{\Delta t}\right|_{\mathscr{R}}$$

Definition : accélération instantannée

Dans la limite où $\Delta t \to 0$ on définit l'accélération instantanée du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ par :

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathscr{R}}$$

Remarque :

Un mouvement peut être accéléré même si la norme de la vitesse reste constante. Pour savoir si un mouvement est non accéléré il faut que le *vecteur accélération* soit nul, autrement dit $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \overrightarrow{0}$.

Propriété : Expression en coordonnées cartésiennes

On calcule directement la dérivée de l'expression de $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}(t)$ dans le référentiel donné.

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}(\dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\overrightarrow{u}_y + \dot{z}\overrightarrow{u}_z)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}$$

On obtient alors : $\boxed{\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x + \ddot{y}\overrightarrow{u}_y + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z}$

Propriété : Expression en coordonnées cylindriques

On calcule directement la dérivée de l'expression de $\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t)$ dans le référentiel donné.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}(\dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{u}_z)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} \\
&= \ddot{r}\overrightarrow{u}_r + \frac{\mathrm{d}(r\dot{\theta})}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z + \dot{r}\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_r}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} + r\dot{\theta}\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} + z(t)\cancel{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_z}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}} \\
&= \ddot{r}\overrightarrow{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + r\dot{\theta}\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} \\
&= \ddot{r}\overrightarrow{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z + r\dot{\theta}\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}}
\end{aligned}$$

On doit alors calculer la dérivée du vecteur $\overrightarrow{u}_r$ par rapport au temps dans le référentiel $\mathscr{R}$.

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}(-\sin(\theta(t))\overrightarrow{u}_x + \cos(\theta(t))\overrightarrow{u}_y)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(-\cos(\theta(t))\overrightarrow{u}_x - \sin(\theta(t))\overrightarrow{u}_y) = -\dot{\theta}\overrightarrow{u}_r$$

On obtient alors : $\boxed{\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z}$

Definition : Repère de Frenet

On définit le vecteur tangent à la trajectoire $\overrightarrow{u_T}$ par :

$$\overrightarrow{u_T} = \frac{\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}}{\|\overrightarrow{v(M)_{/\mathscr{R}}}\|}$$

On définit le vecteur normal $\overrightarrow{u_N}$ comme le vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u_T}$ tourné d'un angle $+\frac{\pi}{2}$.

On admet alors que l'expression pour un trajectoire plane de l'accélération d'un point M dans le repère de Frenet s'exprime :

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_T}$$

avec R le rayon de courbure de la trajectoire au point M, v la norme du vecteur vitesse et $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ la dérivée temporelle de la norme du vecteur vitesse.

Propriété : Degrés de liberté du mouvement

Lors d'un mouvement à vecteur accélération constant, on a deux situations possibles :

- Le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ est colinéaire au vecteur accélération $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}$, dans ce cas le mouvement est à une dimension.
- Le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ n'est pas colinéaire au vecteur accélération $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}$, dans ce cas le mouvement est à deux dimension.

5 Exemples :

Exemple : Mouvement de vecteur accélération constant

Système : On étudie le mouvement du point M.

Référentiel : On se place dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire (Terrestre).

On considère que $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \overrightarrow{C^{te}} = \overrightarrow{a}_0$. Quel est la base la plus adapté pour étudier le mouvement ?

Si le vecteur accélération est constant au cours du mouvement, alors on peut choisir un vecteur de la base constant et

colinéaire à $\overrightarrow{a}_0$ dans $\mathscr{R}$. On définit donc le repère $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ tel que :

$$\overrightarrow{a}_0 = a_0\overrightarrow{u}_z \text{ et } \overrightarrow{OM}(t=0) = \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{v}(t=0) = v_{0x}\overrightarrow{u}_x + v_{0z}\overrightarrow{u}_z = v_0(\cos\alpha\overrightarrow{u}_x + \sin\alpha\overrightarrow{u}_z)$$

On obtient alors le système d'équation différentielle suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = a_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_{0x} \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = a_0 t + v_{0z} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \dfrac{a_0}{2}t^2 + v_{0z}t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t\cos\alpha \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \dfrac{a_0}{2}t^2 + v_0 t\sin\alpha \end{cases}$$

On peut alors obtenir l'équation de la trajectoire parabolique en exprimant $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$ on obtient :

$$z = \frac{a_0 x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + z\tan\alpha = \frac{a_0}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha$$

Exemple : Mouvement circulaire

Système : On étudie le mouvement du point M.

Référentiel : On se place dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire (Terrestre).

On cherche à étudier le mouvement circulaire du point M. La base la plus adaptée pour exprimer les coordonnées du point M est la base cylindrique tel que :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\overrightarrow{u}_r + z(t)\overrightarrow{u}_z$$

Comme le mouvement est circulaire on a :

$$z(t) = C^{te} = z_0 \text{ et } r(t) = C^{te} = R$$

On choisit le base cylindrique tel que :

$$\theta(t=0) = 0 \text{ et } z_0 = 0$$

On obtient alors :

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u}_r$$

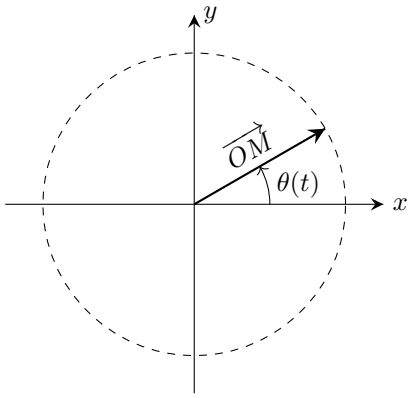
On a alors le vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta = R\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$$

On a alors le vecteur accélération :

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$$

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}(t) = \overrightarrow{a}_N + \overrightarrow{a}_T$$



En utilisant $v = \|\overrightarrow{v}\| = R\dot{\theta}$, on peut exprimer l'accélération : $\overrightarrow{a}_N = -\dfrac{v^2}{R}\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{a}_T = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_\theta$ On a alors deux types de mouvements circulaires :

- Le mouvement circulaire uniforme si $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. Alors $v = R\omega = C^{te}$ où ω est la vitesse de rotation en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.
- Le mouvement circulaire non uniforme si $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \neq 0$. Alors l'accélération comporte deux composantes.

Mécanique 2 : Dynamique du point matériel

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
2.2. Lois de Newton	
Quantité de mouvement Masse d'un système. Conservation de la masse pour système fermé. Quantité de mouvement d'un point et d'un système de points. Lien avec la vitesse du centre de masse d'un système fermé.	Exploiter la conservation de la masse pour un système fermé. Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points sous la forme : $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}(G)$.
Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
Notion de force. Troisième loi de Newton.	Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
Deuxième loi de Newton.	Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen. **Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force par exemple à l'aide d'un microcontrôleur.**
Force de gravitation. Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.	Etudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement.
Modèles d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute.	Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée. **Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.**
Tension d'un fil. Pendule simple.	Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

Remarque : Contexte

Dans ce chapitre nous allons voir les trois lois fondamentales sur lesquelles reposent toute la théorie classique de la mécanique Newtonienne ainsi que la liste des forces à connaître pour le programme.

Le but est d'abord d'illustrer la méthodes de résolution sur des exemples simples vu en terminal mais dont la rédaction et la rigueur devront être en cohérence avec la manipulation des vecteurs et des coordonnées cinématique vu au chapitre précédent.

On verra ensuite l'introduction des forces de frottements et l'impact sur le mouvement d'un point.

1 Principe d'inertie

Definition : Masse inertielle

C'est une grandeur caractéristique d'un point matériel qui est :

- positive ;
- conservative, elle est constante au cours du mouvement pour un système fermé ;
- extensive, additive ;
- invariante par changement de référentiel en mécanique classique.

Remarque :

Par commodité on appelle masse intertielle : masse

Definition : Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}$ par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ est :

$$\boxed{\overrightarrow{p}_{M/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}} \text{ en kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Definition : Système isolé ou pseudo-isolé

Si aucune action mécanique ne s'énerve sur un système on dit qu'il est isolé.

Si toutes les actions mécaniques qui s'exercent sur un système se compensent, alors il est pseudo-isolé.

Première loi de Newton

On postule l'existence de référentiels dit galiléens ou inertiels où un point matériel isolé ou pseudo-isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

Propriété : Référentiel galiléen

Un référentiel est galiléen **ssi** il est en translation rectiligne et uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen.

Remarque : Les référentiels supposés galiléens classiques

Il n'existe pas de référentiel strictement galiléen. En revanche on peut supposer qu'un référentiel est supposé galiléen si le temps de l'expérience est petit devant le temps caractéristique du mouvement :

- Le référentiel terrestre $\mathscr{R}_T$ $(\Delta t \ll T_{\text{jour}})$;
- Le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_G$ $(\Delta t \ll T_{\text{année}})$;
- Le référentiel héliocentrique $\mathscr{R}_S$ $(\Delta t \ll T_{\text{galaxie}})$;

2 Principe fondamental de la dynamique

Definition : Force

Une force est une action mécanique qui modifie le vecteur vitesse d'un point matériel.

Propriété : Modélisation d'une force

Une force se modélise mathématiquement à l'aide d'un vecteur, noté généralement $\overrightarrow{F}$ et possède :

- Un point d'application qui est l'origine du vecteur ;
- Une direction et un sens qui sont décrits dans une BOND $\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{u}_x + F_y\overrightarrow{u}_y + F_z\overrightarrow{u}_z$;
- Une intensité $\|\overrightarrow{F}\|$ exprimée en N.

Une force s'applique forcément d'un point M_1 sur un point M_2. On note alors : $\overrightarrow{F}_{M_1 \to M_2}$

Remarque :

Chaque force possède un point d'application car les objets réels ne sont pas des points matériel mais des solides. Dans le modèle du point matériel on suppose que toutes les forces s'appliquent sur le point matériel.

Seconde loi de Newton : le principe fondamental de la dynamique (PFD)

Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un point matériel M, de masse m est égale à la résultante $\overrightarrow{F}_{ext \to M}$ des forces extérieures s'appliquant au point matériel.

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{M/\mathscr{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g} = \overrightarrow{F}_{ext \to M}}$$

Remarque :

Le PFD est une équation différentielle vectorielle, elle cache donc trois équations différentielles scalaires appelées équations du mouvements. Les solutions de ces équations du mouvements avec les conditions initiales données sont appelées équations horaires du mouvement.

Troisième loi de Newton : le principe des actions réciproques

Soient deux points matériels M_1 et M_2. Si M_1 exercice une force $\overrightarrow{F}_{M_1 \to M_2}$ sur M_2 alors le point M_2 exercice une force $\overrightarrow{F}_{M_2 \to M_1}$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{1\to 2} = -\overrightarrow{F}_{2\to 1}}$$

Les deux forces ont alors :

- Même direction ;
- Même intensité ;
- Des sens opposés.

L'Interaction gravitationnelle

On considère deux points matériels M_1 et M_2 de masse respectives m_1 et m_2 et de position dans le repère $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$.

On caractérise alors la force gravitationnelle $\overrightarrow{F}_{2\to 1}$ de M_2 sur M_1 :

Expression : $\boxed{\overrightarrow{F}_{2\to 1} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u}_{2\to 1}}$

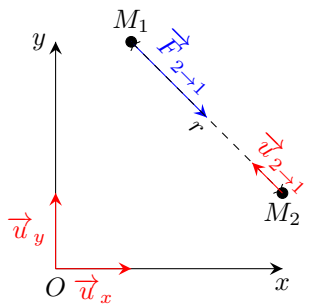
direction : colinéaire à $\overrightarrow{M_2M_1}$;

Sens : Toujours attractive.

Norme : $\|\overrightarrow{F_{2\to 1}}\| = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$;

Point d'application : Le centre de gravité ;

Type : Force à distance.



avec $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ la constante de gravitation universelle, r la distance entre M_1 et M_2 et $\overrightarrow{u}_{2\to 1}$ le vecteur unitaire qui part de M_2 en direction de M_1.

Le poids

On considère une masse m soumise au champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g}$. On caractérise alors le poids $\overrightarrow{P}$ qu'exerce la Terre sur la masse m :

Expression : $\boxed{\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u}_z}$

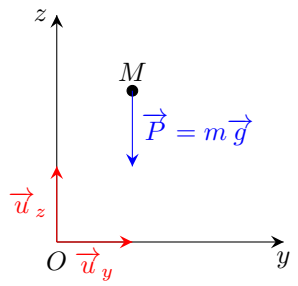
direction : verticale ;

Sens : dirigée vers le sol ;

Norme : $\|\overrightarrow{P}\| = mg$;

Point d'application : Le centre de gravité de la masse m ;

Type : Force à distance.



avec $g = 9{,}81\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur de direction verticale et dirigée vers le bas.

La direction et la norme de $\overrightarrow{g}$ dépendent en pratique de l'altitude et des coordonnées du point M à la surface de la Terre.

La tension d'un fil

On considère une masse m accrochée à un fil. Un fil inextensible possède une tension $\overrightarrow{T}$ constante tout le long du fil.

On caractérise la tension $\overrightarrow{T}$ qu'éxerce le fil sur la masse m par :

Expression : $\boxed{\overrightarrow{T} = -\|\overrightarrow{T}\|\overrightarrow{u}}$

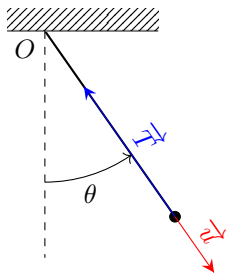
direction : colinéaire au fil ;

Sens : Du support vers le système ;

Norme : À calculer ;

Point d'application : L'attache du fil ;

Type : Force de contact.



Réaction normale du spport

On considère une masse m en contact avec une surface. La surface exerce une force appelée réaction normale et notée $\overrightarrow{R}_N$ sur la masse m. On caractérise alors $\overrightarrow{R}_N$:

Expression : $\boxed{\overrightarrow{R}_N = \|\overrightarrow{R_N}\|\overrightarrow{n}}$

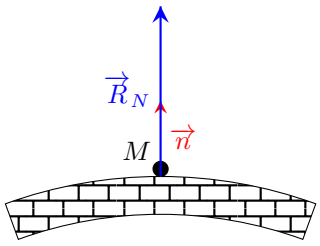
direction : orthogonale à la surface ;

Sens : De la surface vers la masse ;

Norme : À calculer ;

Pt d'application : Barycentre de la surface de contact ;

Type : Force de contact.



Les frottements fluides

On considère une masse m en mouvement par rapport à un fluide visqueux, le fluide exercice une action mécanique appelée frottement fluide $\overrightarrow{f}$ qu'on peut modéliser suivant deux modèles :

Expression : $\boxed{\overrightarrow{f} = \begin{cases} -\lambda \overrightarrow{v}(M)_{/fluide} \\ -\kappa v \overrightarrow{v}(M)_{/fluide} \end{cases}}$

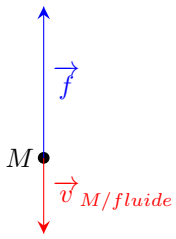
direction : tangente au mouvement, colinéaire au vecteur vitesse ;

Sens : opposé au vecteur vitesse, opposé au mouvement ;

Norme : $\|\overrightarrow{f}\| = \begin{cases} \lambda v \\ \kappa v^2 \end{cases}$;

Point d'application : barycentre de la surface de contact ;

Type : Force de contact.



Ces deux modèles découlent de l'analyse via la mécanique des fluides, le modèle linéaire s'applique pour des vitesse faibles par rapport au fluide, et le modèle quadratique pour des vitesses plus importantes.

La poussée d'Archimède

Soit un système immergé dans un fluide au repos. La résultante des forces de pression est appelée poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi}_A$ est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.

On caractérise $\overrightarrow{\Pi}_A$ par :

Expression : $\boxed{\overrightarrow{\Pi}_A = -\rho_{fluide} V \overrightarrow{g}}$

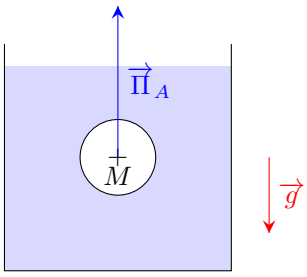
direction : verticale ;

Sens : vers la surface (vers le haut) ;

Norme : $\|\overrightarrow{\Pi_A}\| = V \rho_{fluide} g$;

Point d'application : centre de gravité du fluide déplacé ;

Type : Force de contact.



Avec V le volume de fluide déplacé, et ρ_{fluide} la masse volumique du fluide déplacé.

Méthode : Résoudre un problème de dynamique du point

- Faire un schéma en utilisant des couleurs avec en évidence la ou les BOND utiles, les coordonnées du points M, d'autres paramètres importants.
- Définir le système étudié ! (Dans certains exercices plusieurs points matériels existent et il faut bien définir le système).
- Choisir un référentiel et préciser sa nature (galiléen, supposé galiléen, ou non galiléen).
- Faire le bilan des actions mécaniques extérieur s'appliquant au système, dans le bilan exprimer chaque action mécanique dans la BOND utilisée.
- Appliquer le PFD.
- Faire une projection du PFD dans la BOND choisie.
- Obtenir la ou les équations du mouvement.
- Résoudre la ou les équations du mouvement pour obtenir les équations horaires du mouvement.
- Obtenir l'équation de la trajectoire en éliminant le temps dans les équations horaire.

3 Le mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

Definition : Champ de pesanteur uniforme

On appelle champ de pesanteur uniforme lorsque la résultante des forces extérieure qui s'applique à un point M de masse m s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{g} \qquad \text{où} \quad \overrightarrow{g} = \overrightarrow{C^{te}}$$

Propriété : Mouvement à accélération constante

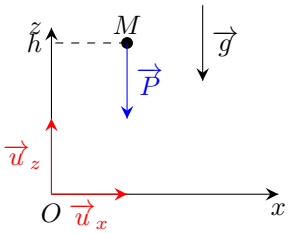
Dans un champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g}$ le mouvement d'un point M de masse m est à vecteur accélération constante tel que :

$$\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{g}$$

Exemple : Chute libre

Soit un point M de masse m, lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h :

Système :$\{M(m)\}$
Référentiel : Terrestre supposé galiléen
Bilan des forces : $\bullet\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$
PFD : $m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{g}$



Coordonnées : Cartésienne et mouvement à un dégrès de liberté.

$$\overrightarrow{OM} = z(t)\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}} = \dot{z}\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \ddot{z}\overrightarrow{u}_z$$

Équation du mouvement : $/\overrightarrow{u}_z$: $\ddot{z} = -g$

Équation horaire : $\dot{z}(t) - \cancel{\dot{z}(0)} = -gt \Longrightarrow z(t) - h = -\dfrac{1}{2}gt^2$

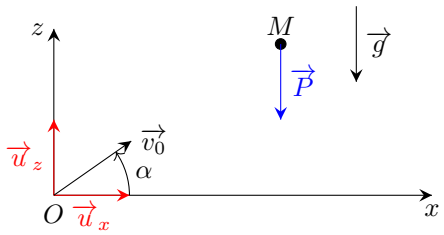
Temps de chute : $z(t_f) = 0 \Longrightarrow t_f = \sqrt{2h/g}$

Vitesse d'impact : $|\dot{z}(t_f)| = \sqrt{2gh}$

Exemple : Mouvement parabolique

Soit un point M de masse m, lancé avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ en 0 à $t = 0$:

Système :$\{M(m)\}$
Référentiel : Terrestre supposé galiléen
Bilan des forces : $\bullet\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$
PFD : $m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{g}$



Coordonnées : Cartésienne et mouvement à deux dégrès de liberté.

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{u}_x + z(t)\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{z}\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z$$

Équations du mouvements : $/\overrightarrow{u}_z$: $\ddot{z} = -g$
Équation horaire :

$$\dot{z}(t) - v_0\sin(\alpha) = -gt \Longrightarrow z(t) - \cancel{z(0)} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t$$

Équations du mouvements : $/\overrightarrow{u}_x$: $\ddot{x} = 0$
Équation horaire :

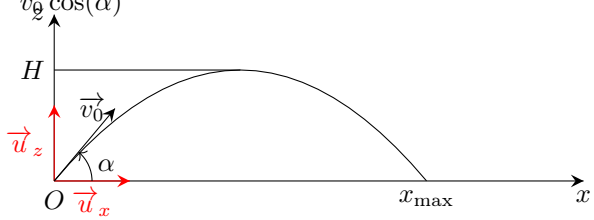
$$\dot{x}(t) - v_0\cos(\alpha) = 0 \Longrightarrow x(t) - \cancel{x(0)} = v_0\cos(\alpha)t$$

Équation de la trajectoire : soit $x(t) = v_0\cos(\alpha)t$ d'où $t(x) = \dfrac{x}{v_0\cos(\alpha)}$ pour $\alpha \neq \pi/2$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t$$

$$z(x) = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x$$

$$z(x) = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2}(1 + \tan^2(\alpha)) + \tan(\alpha)x$$



Portée : soit $x_{\max} \neq 0$ tel que $z(x_{\max}) = 0 \Longrightarrow x_{\max} = \dfrac{2v_0}{g}\cos(\alpha)\sin(\alpha)$

Hauteur maximale : instant t_h tel que $\dot{z}(t_h) = 0 \Longrightarrow t_h = \dfrac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$

$$H = z(t_h) = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$$

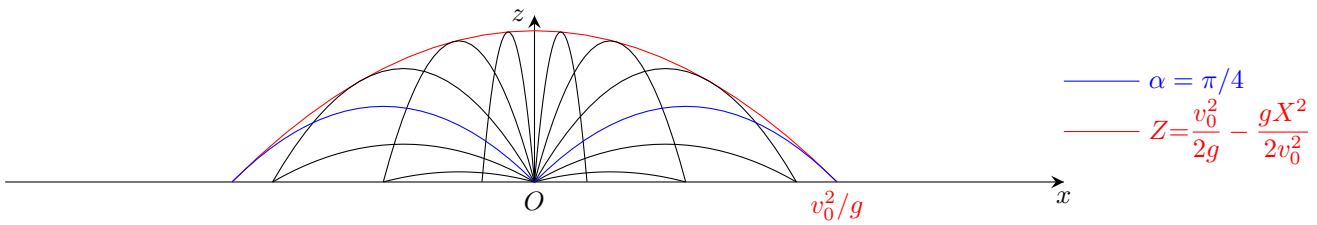
Exemple : Parabole de sureté

On cherche tous les points $M(X, Z)$ accessible via un tir de vitesse initiale v_0 fixé et en cherchant un angle initiale α :

$$Z = -\frac{1}{2} g \frac{X^2}{v_0^2}(1 + \tan^2(\alpha)) + \tan(\alpha) X \qquad \frac{1}{2} g \frac{X^2}{v_0^2} \tan^2(\alpha) - X \tan(\alpha) + Z - \frac{1}{2} g \frac{X^2}{v_0^2}$$

Il existe une solution à cette équation si : $\Delta \geqslant 0$

$$\Delta = X^2 - 4 \times \left(Z - \frac{1}{2} g \frac{X^2}{v_0^2}\right) \frac{1}{2} g \frac{X^2}{v_0^2} = X^2 \left(1 - \frac{2gZ}{v_0^2} - g^2 \frac{X^2}{v_0^2}\right) \Longrightarrow Z \leqslant \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gX^2}{2v_0^2}$$



4 Mouvement avec forces de frottements fluides

Definition : Vitesse limite

Lorsqu'on est en présence de frottement fluide, on suppose que le point M de masse m va suivre un mouvement transitoire jusqu'à atteindre une vitesse constante où les forces se compensent et le système devient pseudo-isolé. Alors :

$$\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}} = \vec{v}_{\text{lim}} = \overrightarrow{C^{te}}$$

Est une solution particulière de l'équation du mouvement.

Definition : Temps caractéristique

Si on lâche sans vitesse initiale une masse m dans un champ de pesanteur $\vec{g}$. Les frottements sont initialement négligeable devant les forces de frottement.

On peut alors supposer que la vitesse va évoluer pendant une durée τ comme : $v(t) = gt$

On définit alors la durée τ comme le temps pour atteindre la vitesse limite :

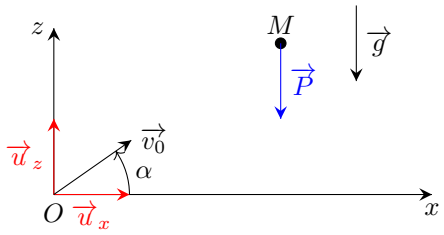
$$v(\tau) = g\tau = v_{\text{lim}}$$

Exemple : Force de frottement fluide linéaire

Soit un point M de masse m, lancé avec une vitesse $\vec{v_0}$ en 0 à $t = 0$:

Système :$\{M(m)\}$
Référentiel : Terrestre supposé galiléen
Bilan des forces :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$;
- $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$



PFD : $m\vec{a}(M)_{/\mathscr{R}} = m\vec{g} - \lambda \vec{v}$

Équations vectorielle du mouvements : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\lambda}{m}\vec{v} = \vec{g}$

Vitesse limite : on cherche une solution $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_{\text{lim}}} = \overrightarrow{C^{te}} \Longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{\text{lim}}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = \frac{m\overrightarrow{g}}{\lambda}$$

Temps caractéristique : soit $v(t) = gt$ et $v(\tau) = v_{\text{lim}}$

$$v_{\text{lim}} = g\tau \qquad \Longrightarrow \qquad \tau = \frac{m}{\lambda}$$

Équation adimensionnée : on pose $\tilde{t} = t/\tau$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}/v_{\text{lim}}$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}\tilde{t}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}\tilde{t}} + \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}_z$$

Temps long : (vitesse limite) $t \gg \tau$ alors le terme dérivé est négligeable et on obtient : $\overrightarrow{u} \simeq -\overrightarrow{u}_z$.
Temps cours : soit $t \ll \tau$ alors on peut faire un DL_1 de $\overrightarrow{u}$

$$\overrightarrow{u}(\tilde{t}) = \overrightarrow{u}(0) + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}\tilde{t}}(0)(\tilde{t} - 0)$$

En utilisant l'équation différentielle et $\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{v_0}/v_{\text{lim}}$ on obtient :

$$\overrightarrow{u} \simeq \overrightarrow{u_0} - (\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u}_z)\tilde{t}$$

Soit $\|\overrightarrow{u_0}\| \ll 1$:

$$\overrightarrow{u} \simeq \overrightarrow{u_0} - \tilde{t}\overrightarrow{u}_z \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} - gt\overrightarrow{u}_z$$

Ce qui revient à considérer un mouvement sans frottement.

Soit $\|\overrightarrow{u_0}\| \gg 1$:

$$\overrightarrow{u} \simeq \overrightarrow{u_0}(1 - \tilde{t}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$$

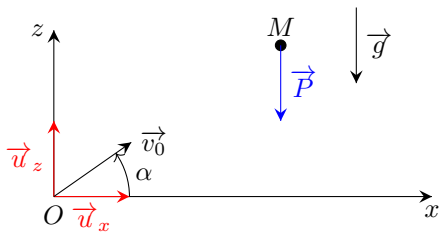
Ce qui donne un mouvement rectiligne uniformément décéléré.

Exemple : Force de frottement fluide quadratique

Soit un point M de masse m, lancé avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ en 0 à $t = 0$:

Système :$\{M(m)\}$
Référentiel : Terrestre supposé galiléen
Bilan des forces :

- $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u}_z$;
- $\overrightarrow{f} = -\kappa v\overrightarrow{v}$



PFD : $\quad m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{g} - \kappa v\overrightarrow{v}$

Équations vectorielle du mouvements : $\quad \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\kappa}{m}v\overrightarrow{v} = \overrightarrow{g}$

Vitesse limite : on cherche une solution $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_{\text{lim}}} = \overrightarrow{C^{te}} \Longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{\text{lim}}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = \frac{m\overrightarrow{g}}{\kappa v_{\text{lim}}} \Longrightarrow v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\kappa}}$$

Temps caractéristique : soit $v(t) = gt$ et $v(\tau) = v_{\text{lim}}$

$$v_{\text{lim}} = g\tau \qquad \Longrightarrow \qquad \tau = \sqrt{\frac{m}{g\kappa}}$$

Équation adimensionnée : on pose $\tilde{t} = t/\tau$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}/v_{\text{lim}}$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}\tilde{t}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}\tilde{t}} + u\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}_z$$

Temps long : (vitesse limite) $t \gg \tau$ alors le terme dérivé est négligeable et on obtient : $\overrightarrow{u} \simeq -\overrightarrow{u}_z$.
Temps cours : soit $t \ll \tau$ alors on peut faire un DL_1 de $\overrightarrow{u}$

$$\overrightarrow{u}(\tilde{t}) = \overrightarrow{u}(0) + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}\tilde{t}}(0)(\tilde{t} - 0)$$

En utilisant l'équation différentielle et $\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{v_0}/v_{\text{lim}}$ on obtient :

$$\overrightarrow{u} \simeq \overrightarrow{u_0} - (u_0\overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{u}_z)\tilde{t}$$

Soit $\|\overrightarrow{u_0}\| \ll 1$:

$$\overrightarrow{u} \simeq \overrightarrow{u_0} - \tilde{t}\overrightarrow{u}_z \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} - gt\overrightarrow{u}_z$$

Ce qui revient à considérer un mouvement sans frottement.

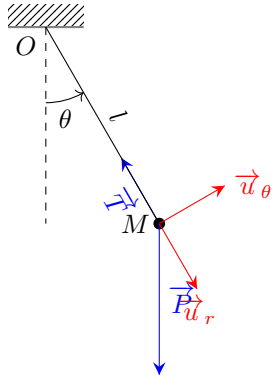
Soit $\|\overrightarrow{u_0}\| \gg 1$:

$$\overrightarrow{u} \simeq \overrightarrow{u_0}(1 - u_0\tilde{t}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0}\left(1 - \frac{v_0 t}{v_{lim}\tau}\right)$$

Ce qui donne un mouvement rectiligne uniformément décéléré.

5 Mouvement circulaire

Exemple : Pendule simple



On considère un point matériel M de masse m attaché à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur l. On cherche à étudier le mouvement d'oscillation du pendule.

Système : Point matériel M de masse m.

Référentiel : Terrestre noté $\mathscr{R}_T$ supposé galiléen et de repère $\mathscr{R}_T(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$.

Bilan des forces : dans la base polaire $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$

- $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = m[(\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{u_r})\overrightarrow{u}_r + (\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{u_\theta})\overrightarrow{u}_\theta] = mg(\cos\theta\overrightarrow{u}_r - \sin\theta\overrightarrow{u}_\theta)$;
- $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u}_r$ avec $T = \|\overrightarrow{T}\|$

Principe fondamental de la dynamique :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}_{M/\mathscr{R}_T}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_T} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} \Longleftrightarrow m\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}_T}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_T} = mg(\cos\theta\overrightarrow{u}_r - \sin\theta\overrightarrow{u}_\theta) - T\overrightarrow{u}_r$$

Comme la longueur l est constante alors on a :

$$\overrightarrow{OM} = l\overrightarrow{u}_r \Longrightarrow \overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}_T} = l\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta \Longrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}_T}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_T} = -l\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r + l\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$$

On projette alors le PFD sur $\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{u}_\theta$:

$$\begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 &= -T + mg\cos\theta \\ ml\ddot{\theta} &= -mg\sin\theta \end{cases}$$

On obtient alors l'équation du moment : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta}$

et l'expression de la norme de la tension du fil : $\boxed{T = m[g\cos\theta + l\dot{\theta}^2]}$

Dans le cas où $\theta \ll 1$ on a alors :

$$\sin\theta = \theta + o(\theta) \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta \approx \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta$$

On obtient alors l'équation du mouvement d'un OH de solution :

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et θ_0 l'amplitude d'oscillation.

On parle d'Isochronisme car la pulsation de l'OH ne dépend pas de l'amplitude θ_0.

Remarque :

Ce n'est pas le cas général. La période du pendule peut alors se calculer numériquement ou en faisant un développement limité d'ordre plus élevé.

Mécanique 3 : Les oscillateurs mécanique

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
1.4. Oscillateurs libres et forces	
Oscillateur harmonique.Exemples du circuit LC et de l'oscillateur mécanique.	Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. Réaliser un bilan énergétique.
Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. **Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique.** **Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.**
Résonance.	Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.**
1.5. Filtrage linéaire	
Signaux périodiques.	Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales. Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal. Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.**
Modèles de filtres passifs : passe-bas et passe-bande d'ordre 2.	Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.).

1 Le système masse-ressort

Definition : Équation différentielle d'un OH

Un OH à 1 degré de liberté est un système dont l'équation du mouvement est de la forme : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$
où $X = x(t) - x_{\text{eq}}$ est l'écart à la position d'équilibre et ω_0 la pulsation propre.
La solution est donnée par : $X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$
où A et B sont deux constantes d'intégrations à déterminer avec $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.

Loi de Hook

On considère une masse m accrochée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. Lorsque le ressort est déformé et qu'il possède une longueur l il exerce une action mécanique sur la masse m appelée force de rappel $\overrightarrow{F_r}$. On caractérise alors $\overrightarrow{F_r}$:

Expression : $\boxed{\overrightarrow{F_r} = -k(l-l_0)\overrightarrow{u}}$

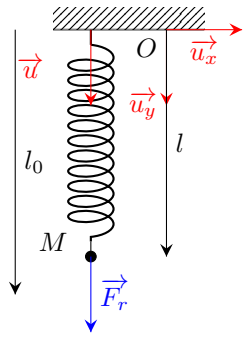
direction : colinéaire au ressort ;

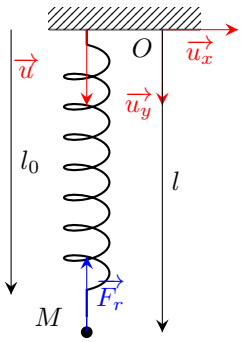
Sens : opposé à l'élongation $(l - l_0)\overrightarrow{u}$;

Norme : $\|\overrightarrow{F_r}\| = k|l - l_0|$;

Point d'application : Point d'attache du ressort ;

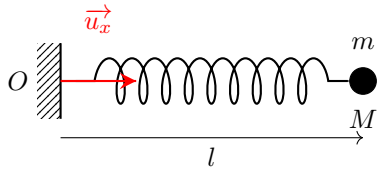
Type : Force de contact.





Exemple : Le ressort horizontal non amorti

On considère un point M de masse m lié à un ressort de raideur k et longueur à vide l_0 qui est fixé à son extrémité en O. Le ressort et la masse sont posés sur un support horizontal et la masse glisse sans frottement.



Référentiel : Terrestre supposé galiléen.

Système : $\{M\ (m)\}$ **Bilan des actions mécaniques :**

- $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$;
- $\overrightarrow{R}_N = R_N\overrightarrow{u_z}$;
- $\overrightarrow{F} = -k(l-l_0)\overrightarrow{u}_x$;

PFD : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{F}$ projection selon Ox : $m\ddot{x} = -k(x - l_0)$

Équation du mouvement : $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{k}{m}l_0$ on pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

2 Les oscillateurs amorti

Definition : Rappel

On considère que le système masse-ressort amorti est soumis à une force de frottement fluide linéaire : $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$

L'équation du mouvement vérifiée par l'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre $X = x - X_{\text{eq}}$ peut se mettre sous la forme : $\ddot{X} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$

Pour résoudre cette équation on doit chercher les racines de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

- Si $\Delta > 0$ alors $Q < \dfrac{1}{2}$ et le régime est apériodique : $r_1 = -\dfrac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$ $\quad r_2 = -\dfrac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$

  on pose alors $\Omega = \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$ et la solution s'écrit : $X(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A\text{ch}\,(\Omega t) + B\text{sh}\,(\Omega t)\right]$

  avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ deux constantes d'intégrations à déterminer avec $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.

- Si $\Delta = 0$ alors $Q = \dfrac{1}{2}$ et le régime est critique : $r_1 = r_2 = -\dfrac{\omega_0}{2Q}$

  La solution s'écrit : $X(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(A + Bt)$

  avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ deux constantes d'intégrations à déterminer avec $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.

- Si $\Delta < 0$ alors $Q > \dfrac{1}{2}$ et le régime est pseudo-périodique :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \qquad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

on pose alors $\omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$ et la solution s'écrit : $X(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ deux constantes d'intégrations à déterminer avec $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.

Exemple : Le ressort vertical amorti

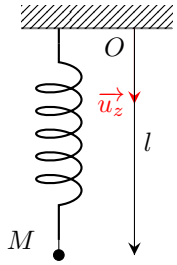
Soit un point M de masse m lié à un ressort vertical dont l'extrémité haute est fixée à un point O.

Le point M est soumis à une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$.

Système : $\{M\ (m)\}$

Bilan des actions mécaniques :

- $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{u_z}$;
- $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v} = -\lambda\dot{z}\overrightarrow{u}_z$
- $\overrightarrow{F} = -k(l-l_0)\overrightarrow{u}_z$;



PFD : $m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{f}$ On projette selon Ox : $m\ddot{z} = -k(z-l_0) + mg - \lambda\dot{z}$

Position d'équilibre : On cher $z = z_{\text{éq}} = C^{te}$ solution de l'équation précédente avec $\dot{z} = \ddot{z} = 0$:

$$0 = -k(z_{\text{éq}} - l_0) + mg - 0 \Longrightarrow \boxed{z_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}}$$

Équation du mouvement : $\ddot{z} + \dfrac{\lambda}{m}\dot{z} + \dfrac{k}{m}z = \dfrac{k}{m}\left(l_0 + \dfrac{mg}{k}\right)$

Allongement du ressort : Par commodité on pose $Z = z - z_{\text{éq}}$ tel que $\dot{z} = \dot{Z}$ et $\ddot{z} = \ddot{Z}$

$$\ddot{Z} + \frac{\lambda}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = 0$$

et on pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{\sqrt{km}}{\lambda}$

3 Les oscillations forcées

Definition : Régime forcé

Soit un système masse-ressort soumis à une force excitatrice : $\overrightarrow{F}(t) = F_0\cos(\omega t)$ On définit le régime des oscillations forcées pour un oscillateur linéaire à un degré de liberté, un système de masse m dont l'équation du mouvement se met sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

où $F(t)$ est une force excitatrice de la forme : $F(t) = F_0\cos(\omega t)$.

La solution particulière $x_p(t)$ peut donc se mettre sous la forme :

$$x_p(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)$$

avec X_m l'amplitude d'oscillation et φ le déphasage par rapport à l'excitation.

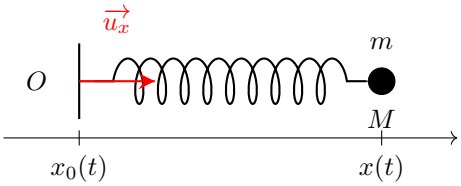
On pose alors l'abscisse complexe $\underline{x}(t) = \underline{X_m}e^{j\omega t}$ où $\underline{X_m}$ est l'amplitude complexe tel que $x_p = \mathscr{R}e\,(\underline{x})$, $X_m = \left|\underline{X_m}\right|$ et $\varphi = \arg(\underline{X_m})$.

On obtient après calcul :

$$\underline{X_m} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega\omega_0}{Q}}$$

Exemple : Ressort horizontal accroché à un point oscillant

On considère un point M de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur k et lié en un point O mobile de position $x_0(t) = A\cos(\omega t)$. Le point M est soumis aux forces de frottements fluides $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$.



4 Capacité numérique

Definition : Méthode d'Euler appliquée aux équation d'ordre 2

On considère une équation différentielle d'ordre 2 de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t), y(t), t\right) \qquad \text{avec } t \in [t_0, t_f] \text{ et} y(t_0) = y_0 \text{ et } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) = x_0$$

On peut appliquer la méthode d'Euler en considérant deux équations différentielle d'ordre 1 couplée :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = x(t) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(x(t), y(t), t)$$

On peut alors construire les suites de N nombres suivantes :

- $t_k = t_0 + k \times \delta t$ avec $k \in [0; N-1]$ et $\delta t = \dfrac{t_f - t_0}{N-1}$
- $y_{k+1} = y_k + x_k \times \delta t$ avec $y_0 = y_0$
- $x_{k+1} = x_k + F(, x_k, y_k, t_k) \times \delta t$ avec $x_0 = x_0$

Les N couples (t_k, y_k) les coordonnées des N points approchés de la courbe $y(t)$.

Les N couples (t_k, x_k) représentent les coordonnées des N points approchés de la courbe $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)$.

Propriété : Capacité numérique 3

À l'aide de python, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non linéaire et faire apparaître l'effet des termes non linéaires.

Propriété : Créaction fonction Euler2

On cherche à définir une nouvelle fonction python qui prendra en paramètre y_0, x_0, t_0, t_f, F les paramètres mathématiques et N le paramètre numérique.

```
import numpy as np
def Euler(y0,x0,t0,tf,F,N):
    y,x=np.zeros(N),np.zeros(N)
    dt=(tf-t0)/(N-1)
    t=np.array([t0+k*dt for k in range(N)])
    y[0]=y0
    x[0]=x0
    for k in range(1,N):
        y[k]=y[k-1]+x[k]*dt
        x[k]=x[k-1]+F(y[k-1],x[k-1],t[k-1])*dt
    return t,y,x

def F(y,x,t):
    return ....... #à compléter en fonction du problème à résoudre
```

Mécanique 4 : Énergie, travail, puissance

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel	
Puissance, travail et énergie cinétique Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.
Champ de force conservative et énergie potentielle Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique. Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.
Énergie mécanique Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
Mouvement conservatif à une dimension.	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
Positions d'équilibre. Stabilité.	Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non- linéaire et faire apparaître l'effet des termes non- linéaires.

1 Les grandeurs énergétiques

Definition : Puissance d'une force

La puissance d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée à un point M animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$ est la grandeur instantanée :

$$\mathscr{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V}_{M/\mathscr{R}} \text{ exprimée en watt (W)}$$

Definition : Travail d'une force

Le travail élémentaire, entre t et $t + \mathrm{d}t$, d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée à un point matériel M se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$ est défini par :

$$\delta W(\overrightarrow{F}) = \mathscr{P}\mathrm{d}t = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}\mathrm{d}t = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

avec $\mathrm{d}l$ le déplacement élémentaire du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$.

Pour obtenir le travail d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée à un point matériel M qui se déplace, dans le référentiel $\mathscr{R}$, de la position M_1 à l'instant t_1 à la position M_2 à l'instant t_2, est défini en faisant la somme des travaux élémentaires :

$$W(\overrightarrow{F})_{M_1 \to M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P}\mathrm{d}t = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

La travail d'une force s'exprime en joule (J).

Propriété : Force motrice/résistante

On dit qu'une force $\overrightarrow{F}$ est :

- Motrice si $\mathscr{P} > 0$ ($W(\overrightarrow{F})_{M_1 \to M_2} > 0$) ;
- Résistante si $\mathscr{P} < 0$ ($W(\overrightarrow{F})_{M_1 \to M_2} < 0$).

Propriété : Cas d'un point matériel soumis à plusieurs forces

Soit un point matériel soumis à plusieurs forces extérieures $\overrightarrow{F_i}$ dont la somme vaut $\overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i}$, on montre que :

$$W(\overrightarrow{F})_{M_1 \to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{M_1}^{M_2} \left(\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i} \right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \sum_{i=1}^{N} \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \sum_{i=1}^{N} W(\overrightarrow{F_i})_{M_1 \to M_2}$$

On obtient alors la relation :

$$\boxed{W(\overrightarrow{F})_{M_1 \to M_2} = \sum_{i=1}^{N} W(\overrightarrow{F_i})_{M_1 \to M_2}}$$

Propriété : Cas particulier d'une force vectoriellement constante

Soit un point matériel M soumis à une force extérieure $\overrightarrow{F}$ de vecteur constant au cours du mouvement du point A au point B (norme constante, direction constante, sens contant). On calcule alors le travail de la force $\overrightarrow{F}$ au cours du mouvement :

$$W(\overrightarrow{F})_{A \to B} = \int_{A}^{B} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{F} \cdot \int_{A}^{B} \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

On obtient alors la relation :

$$\boxed{W(\overrightarrow{F})_{A \to B} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

Valable uniquement dans le cas d'une force constante vectoriellement, le reste du temps il faut calculer l'intégrale du travail élémentaire.

Definition : Énergie cinétique d'un point matériel

L'énergie cinétique dun point matériel M de masse m, animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$, est définie par :

$$\boxed{\mathscr{E}_\mathrm{c} = \frac{1}{2} m \overrightarrow{v}^2_{M/\mathscr{R}}}$$

L'énergie cinétique s'exprime en joule (J).

Remarque :

Le travail exprime l'énergie reçue par le point matériel au cours du mouvement de M_1 vers M_2. C'est un transfert d'énergie. Il ne faut pas confondre l'énergie d'un système comme son énergie cinétique qui est une variable d'état du système et ne dépend donc que de l'état du système.

Tandis qu'une énergie est calculée à un instant donnée, un transfert d'énergie s'effectue au cours d'un mouvement. Le travail n'est donc pas une variable d'état du système.

2 Le théorème de l'énergie cinétique

Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces qui lui sont appliquées :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g} = \sum_{i=1}^{N} \mathscr{P}(\overrightarrow{F_i})$$

Démonstration :

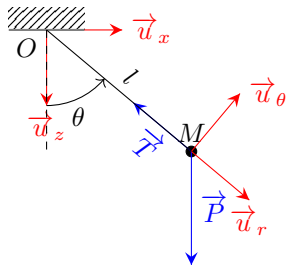
On considère un point matériel M de masse m en mouvement dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$ et soumis à N forces $\overrightarrow{F_i}$. On applique le principe fondamental de la dynamique au point M :

$$m\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_{M\mathscr{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g} = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F_i}$$

$$m\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}_{M\mathscr{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g}\cdot\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}_g} = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F_i}\cdot\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}_g}$$

$$\frac{1}{2}m\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}^2_{M/\mathscr{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g} = \sum_{i=1}^{N}\mathscr{P}(\overrightarrow{F_i}) \Longrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g} = \sum_{i=1}^{N}\mathscr{P}(\overrightarrow{F_i})$$

Exemple :



On étudie un pendule pensant, on assimile un solide de masse m à un point matériel accroché à un fil idéal de masse négligeable et de longueur l supposée inextensible.

Système : Point matériel M de masse m.

Référentiel : Terrestre noté $\mathscr{R}_T$ supposé galiléen et de repère $\mathscr{R}_T(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$.

Bilan des forces : dans la base polaire $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$

- $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = m[(\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{u_r})\overrightarrow{u}_r + (\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{u_\theta})\overrightarrow{u}_\theta] = mg(\cos\theta\overrightarrow{u}_r - \sin\theta\overrightarrow{u}_\theta)$;
- $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u}_r$ avec $T = \|\overrightarrow{T}\|$

Théorème de la puissance cinétique : (TPC)

On exprime la vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}_T} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = l\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta \Longrightarrow \mathscr{E}_\mathrm{c} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

On applique le TPC :

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_T} &= \mathscr{P}(\overrightarrow{P}) + \mathscr{P}(\overrightarrow{T}) = mgl\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}\cdot\overrightarrow{u_\theta} + \|\overrightarrow{T}\|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\theta}\\ &= -mgl\dot{\theta}\sin(\theta) + 0\\ ml\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mgl\dot{\theta}\sin(\theta) &\Longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}\end{aligned}$$

On retrouve l'équation du mouvement du pendule pesant.

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel M qui se déplace de la position M_1 à l'instant t_1 à la position M_2 à l'instant t_2 est égale à la somme des travaux des forces qui lui sont appliquées :

$$\Delta\mathscr{E}_\mathrm{c} = \mathscr{E}_\mathrm{c}(t_2) - \mathscr{E}_\mathrm{c}(t_1) = \sum_{i=1}^{N} W(\overrightarrow{F_i})_{M_1\to M_2}$$

Démonstration :

On considère un point matériel M de masse m en mouvement dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$ et soumis à N forces $\overrightarrow{F_i}$. On applique le théorème de la puissance cinétique au point M :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g} = \sum_{i=1}^{N} \mathscr{P}(\overrightarrow{F_i})$$

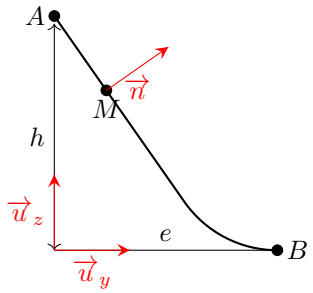
$$\int_{t_1}^{t_2} \left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}_g} \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \mathscr{P}(\overrightarrow{F_i})\mathrm{d}t$$

$$\mathscr{E}_\mathrm{c}(t_2) - \mathscr{E}_\mathrm{c}(t_1) = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{P}(\overrightarrow{F_i})\mathrm{d}t$$

$$\Delta\mathscr{E}_\mathrm{c} = \sum_{i=1}^{N} W(\overrightarrow{F_i})_{M_1\to M_2}$$

Exemple :

Soit un pratiquant du saut à ski, il part ans élan du sommet A d'un tremplin. La vitesse du skieur en B doit être inférieur à $v_{max} = 30\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. On réalise une étude pour un skieur qui s'élance sans vitesse initiale en négligeant les frottements pour évaluer la hauteur h_{max} du tremplin et sa longueur e_{max}.



Système : Skieur assimilé à un point matériel M de masse m.

Référentiel : Terrestre noté $\mathscr{R}_T$ supposé galiléen et de repère $\mathscr{R}_T(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$.

Bilan des forces :

- $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u}_z$
- $\overrightarrow{R}_N = \|\overrightarrow{R_N}\|\overrightarrow{n} = R_N\overrightarrow{n}$

Théorème de l'énergie cinétique : (TEC) On calcule la variation d'énergie cinétique entre l'instant $t_A = 0\,\mathrm{s}$ et l'instant t_B :

$$\Delta\mathscr{E}_\mathrm{c} = \mathscr{E}_\mathrm{c}(t_B) - \mathscr{E}_\mathrm{c}(t_A) = \mathscr{E}_\mathrm{c}(t_B) = \frac{1}{2}m\|\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}_T}}\|^2(t_B) < \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

On calcule les travaux des forces sur le trajet $A \to B$:

$$W(\overrightarrow{P})_{A\to B} = \int_A^B \overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{z_A}^{z_B} -mg\mathrm{d}z = mgh$$

$$W(\overrightarrow{R}_N)_{A\to B} = \int_A^B \overrightarrow{R_N}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_A^B \|\overrightarrow{R_N}\|\cancel{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}} = 0$$

On applique alors le TEC :

$$\frac{1}{2}m\|\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}_T}}\|^2(t_B) = mgh < \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Longrightarrow h_max = \frac{v_{max}^2}{2g}$$

La hauteur maximale est indépendante de la longueur e du tremplin dans ce modèle. Un modèle plus évolué avec prise en compte du travail des forces de frottements feraient intervenir la longueur e du tremplin.

Definition : Force conservative

Une force est dite conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi.

Propriété : Force conservative

Il existe alors une fonction $\mathscr{E}_\mathrm{p}(\overrightarrow{OM})$ de la position du point M telle que le travail élémentaire d'une force conservative puisse d'écrire :

$$\delta W(\overrightarrow{F_c}) = -\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{p}$$

De cette manière le travail ne dépend que des valeurs initiales et finales de la fonction $\mathscr{E}_\mathrm{p}(\overrightarrow{OM})$

Definition : Énergie potentielle

On définit la fonction énergie potentielle $\mathscr{E}_\mathrm{p}(\overrightarrow{OM})$ liée à une force conservative $\overrightarrow{F_c}$ qui dépend de la position du point M telle que définie à une constante près on a :

$$\overrightarrow{F_c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{p}$$

L'énergie potentielle $\mathscr{E}_\mathrm{p}$ d'un système se définit comme la somme des énergies potentielles des forces conservatives appliquées.

Propriété : Gradient

Lorsqu'une force est conservative et qu'on peut définir son énergie potentielle, on définit alors l'opérateur vectoriel gradient :

$$\overrightarrow{F_c} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathscr{E}_\text{p} \quad \text{avec } \overrightarrow{\text{grad}}\mathscr{E}_\text{p} \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = \text{d}\mathscr{E}_\text{p}$$

L'opérateur gradient d'une fonction de plusieurs variable d'espaces dépend du système de coordonnée utilisé. En coordonnée cartésienne il s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u}_z$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}$ correspond à la dérivée partielle de f par rapport à x en considérant y et z comme des constantes, $\frac{\partial f}{\partial y}$ correspond à la dérivée partielle de f par rapport à y en considérant x et z comme des constantes, etc.

Propriété : Travail d'une force conservative

Si un point M possède une énergie potentielle $\mathscr{E}_\text{p}$, alors il est soumis à une force extérieure $\overrightarrow{F_c}$ conservative et son travail entre la position M_1 et la position M_2 s'exprime :

$$W(\overrightarrow{F_c})_{M_1\to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{F_c} \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = -\int_{M_1}^{M_2} \text{d}E_p = -(E_p(M_2) - E_p(M_1)) = -\Delta\mathscr{E}_\text{p}$$

Definition : Énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$, l'énergie mécanique $\mathscr{E}_\text{m}$ d'un système est la somme de son énergie cinétique $\mathscr{E}_\text{c}$ et de son énergie potentielle $\mathscr{E}_\text{p}$:

$$\boxed{\mathscr{E}_\text{m} = \mathscr{E}_\text{c} + \mathscr{E}_\text{p}}$$

Démonstration :

On considère un point matériel M de masse m en mouvement dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$ et soumis à N forces $\overrightarrow{F_i}$ dont N_c forces conservatives $\overrightarrow{F_i^c}$ et N_{nc} forces non conservatives $\overrightarrow{F_i^{nc}}$. On applique le théorème de l'énergie cinétique au point M entre le point M_1 à l'instant t_1 et le point M_2 à l'instant t_2 :

$$\Delta\mathscr{E}_\text{c} = \sum_{i=1}^{N} W(\overrightarrow{F_i})_{M_1\to M_2}$$

$$\Delta\mathscr{E}_\text{c} = \sum_{i=1}^{N_c} W(\overrightarrow{F_i^c})_{M_1\to M_2} + \sum_{i=1}^{N_{nc}} W(\overrightarrow{F_i^{nc}})_{M_1\to M_2}$$

$$\Delta\mathscr{E}_\text{c} = -\Delta\mathscr{E}_\text{p} + \sum_{i=1}^{N_{nc}} W(\overrightarrow{F_i^{nc}})_{M_1\to M_2}$$

$$\Delta\mathscr{E}_\text{m} = \Delta\mathscr{E}_\text{c} + \Delta\mathscr{E}_\text{p} = \sum_{i=1}^{N_{nc}} W(\overrightarrow{F_i^{nc}})_{M_1\to M_2}$$

Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, la variation $\Delta\mathscr{E}_\text{m}$ de l'énergie mécanique, entre deux position M_1 et M_2, d'un point matériel soumis à des forces conservatives de résultante $\overrightarrow{F_c}$ vaut :

$$\Delta\mathscr{E}_\text{m} = \mathscr{E}_\text{m}(M_2) - \mathscr{E}_\text{m}(M1) = W(\overrightarrow{F_\text{nc}})_{M_1\to M_2}$$

Si toutes les forces qui travaillent sont conservatives alors l'énergie mécanique est une constante du mouvement et le système est qualifié de conservatif.

Propriété : Énergie potentielle de pesanteur

Soit un référentiel terrestre de repère $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ avec $\overrightarrow{u}_z$ orienté vers le haut. La force $\overrightarrow{P}$ d'un point M de masse m s'exprime :

$$\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \delta W(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{\text{d}l} = -mg\text{d}z = -\text{d}\mathscr{E}_\text{p,p}$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathscr{E}_{\text{p,p}}$ à partir de l'intégrale :

$$\boxed{\mathscr{E}_{\text{p,p}}(z) = \int_{z_0}^{z} mg\mathrm{d}z = mg(z - z_0)}$$

Propriété : Énergie potentielle gravitationnelle

Soit un référentiel galiléen de repère $\mathscr{R}(0, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ avec un point matériel O de masse m_0 qui exerce une force gravitationnelle sur M de masse m :

$$\overrightarrow{F}_{O\to M} = -G\frac{mm_0}{r^2}\overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \delta W(\overrightarrow{F}_{O\to M}) = \overrightarrow{F_{O\to M}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -G\frac{mm_0}{r^2}\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\mathscr{E}_{\text{p,G}}$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle $\mathscr{E}_{\text{p,G}}$ à partir de l'intégrale :

$$\boxed{\mathscr{E}_{\text{p,G}}(r) = \int_{r_0}^{r} G\frac{mm_0}{r^2}\mathrm{d}r = -Gmm_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

Propriété : Énergie potentielle élastique

Soit un référentiel galiléen de repère $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$. La force $\overrightarrow{F}_r$ de rappel qu'exerce un ressort de longueur $\overrightarrow{l} = l\overrightarrow{u}_x$ et de longueur à vide $\overrightarrow{l} = l\overrightarrow{u}_x$ sur un point M s'exprime :

$$\overrightarrow{F}_r = -k(\overrightarrow{l} - \overrightarrow{l_0}) \Longrightarrow \delta W(\overrightarrow{F}_r) = \overrightarrow{F_r} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -k(l - l_0)\mathrm{d}l = -\mathrm{d}\mathscr{E}_{\text{p,el}}$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathscr{E}_{\text{p,el}}$ à partir de l'intégrale :

$$\boxed{\mathscr{E}_{\text{p,el}}(l) = \int_{l_1}^{l} k(l - l_0)\mathrm{d}l = \frac{1}{2}(l - l_0)^2 - \frac{1}{2}(l_1 - l_0)^2}$$

3 Étude qualitative de mouvements à une dimension

Dans cette partie on considère le mouvement conservatif à une dimension d'un point matériel M de masse m dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$. Le mouvement est selon l'axe Ox de vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_x$ et de vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x$ et de résultante des forces $F(x) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{u}_x$.

Definition : Position d'équilibre

Une position d'équilibre d'un système mécanique est une position telle que si on abandonne sans vitesse le système dans cette position, il y reste.

Propriété : Position d'équilibre

Soit un point matériel M de masse m en mouvement conservatif dans le référentiel $\mathscr{R}_g$. Le point M possède une énergie potentielle $\mathscr{E}_{\text{p}}(x)$. À l'équilibre le point M peut alors être aux positions x_{eq} tel que la somme des forces appliquées au point soit nulle :

$$F(x = x_{eq}) = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\text{p}}}{\mathrm{d}x}(x = x_{eq}) = 0$$

Definition : Stabilité

La stabilité d'une position d'équilibre se définit en abandonnant le système sans vitesse au voisinage de cette position :

- si le système se rapproche de sa position d'équilibre, c'est que celle-ci est stable ;
- si le système s'éloigne de sa position d'équilibre, c'est que celle-ci est instable.

Propriété : Stabilité

Soit un point matériel M de masse m en mouvement conservatif dans le référentiel $\mathscr{R}_g$. Le point M possède une énergie

potentielle $\mathscr{E}_\mathrm{p}(x)$. On étudie la position d'équilibre x_{eq} en posant $x = x_{eq} + \delta x$:

$$F(x_{eq} + \delta x) = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}(x + \delta x) = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}(x = x_{eq}) - \frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}(x = x_{eq})\delta x + o(\delta x)$$

On a alors :

- Un équilibre stable si pour $\delta x > 0$ on a $F(x) < 0$ pour que la force ramène le point vers la gauche donc :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}(x = x_{eq}) > 0}$$

  La position d'équilibre correspond à un minimum local de $\mathscr{E}_\mathrm{p}(x)$.
- Un équilibre instable si pour $\delta x > 0$ on a $F(x) > 0$ pour que la force ramène le point vers la gauche donc :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}(x = x_{eq}) < 0}$$

  La position d'équilibre correspond à un maximum local de $\mathscr{E}_\mathrm{p}(x)$.

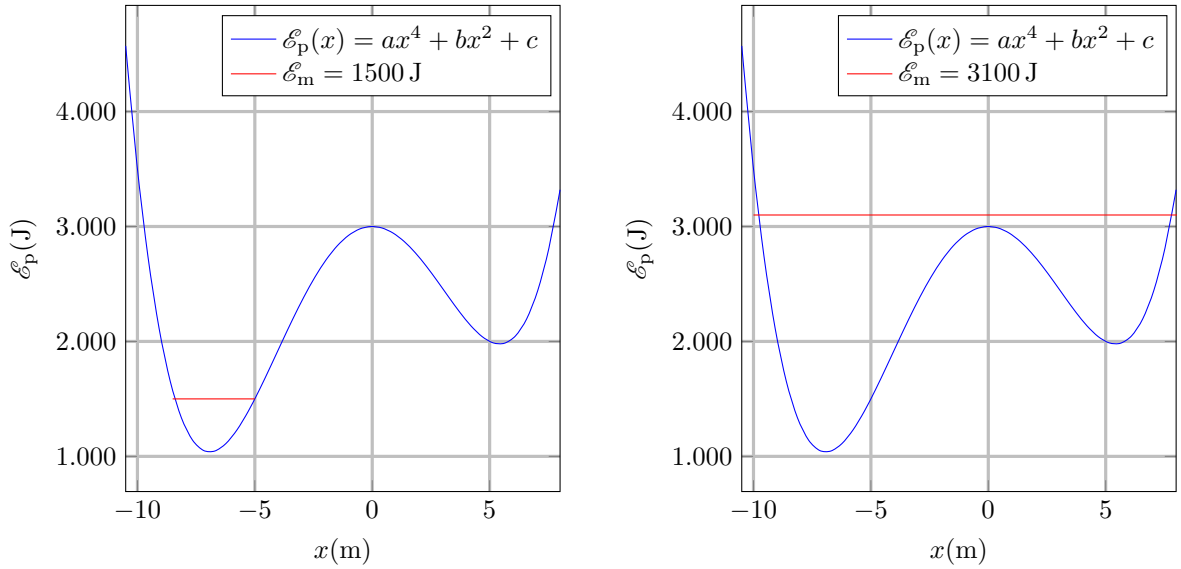
On obtiendrait le même résultat avec $\delta x < 0$.

Propriété : Barrière de potentielle

Soit un point matériel M soumis à une énergie potentielle $\mathscr{E}_\mathrm{p}(x)$. Si le mouvement est conservatif le point M possède une énergie mécanique $\mathscr{E}_\mathrm{m}$ tel que :

$$\mathscr{E}_\mathrm{m} = \mathscr{E}_\mathrm{c} + \mathscr{E}_\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathscr{E}_\mathrm{p}(x) \geqslant \mathscr{E}_\mathrm{p}(x)$$

Sans énergie cinétique, un point matériel ne peut pas accéder aux régions de l'espace où $\mathscr{E}_\mathrm{p}(x) > \mathscr{E}_\mathrm{m}$.



4 Application : Oscillation proche de l'équilibre

On considère le mouvement conservatif à une dimension d'un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$. On considère que le point matériel est proche d'une position d'équilibre stable notée x_{eq}. Le système possède alors une énergie cinétique :

$$\mathscr{E}_\mathrm{c} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Il possède également une énergie potentielle dont on fait le développement limité autour de x_{eq} à l'ordre 2 :

$$\mathscr{E}_\mathrm{p}(x) = \mathscr{E}_\mathrm{p}(x_{eq}) + \frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}(x = x_{eq})(x - x_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}(x = x_{eq})(x - x_{eq})^2 + o\left((x - x_{eq})^2\right)$$

Or par définition de la position d'équilibre stable on a :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}(x = x_{eq}) = 0 \text{ et } \frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}(x = x_{eq}) = k > 0$$

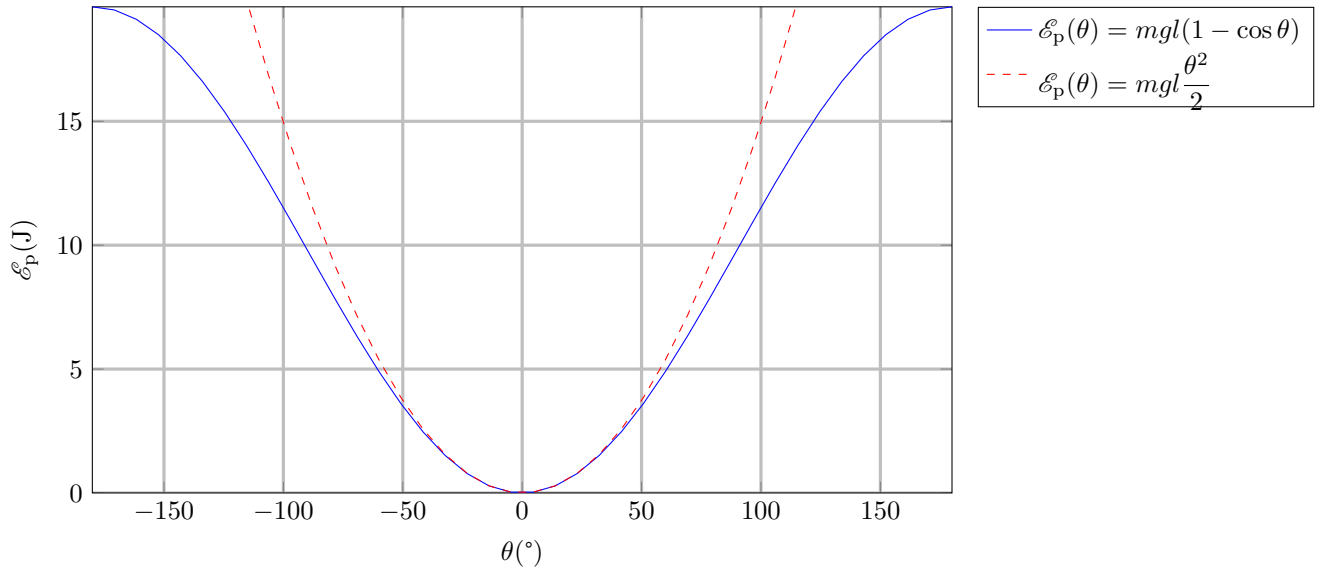
On peut alors appliquer le théorème de l'énergie mécanique entre $t = 0$ et t :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathscr{E}_\mathrm{p}(x_{eq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2 = \mathscr{E}_\mathrm{m}(t = 0)$$

Si on dérive cette équation on obtient l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} + kx = kx_{eq}$$

qui est l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique correspondant à un système masse-ressort.
Au voisinage de l'équilibre on peut donc modéliser tout système conservatif par un oscillateur harmonique.



Mécanique 5 : Mouvement de particules chargées

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
2.4. Mouvement de particules chargées dans des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$, uniformes et stationnaires	
Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique. Puissance de la force de Lorentz.	Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles. Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétostatique.	Déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.

1 Force de Lorentz et notions de champs

Definition : Champ électrostatique

On considère la force coulombienne d'une particule 2 de charge q_2 sur une particule 1 de charge q_1 avec $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$ la permittivité diélectrique du vide :

$$\overrightarrow{F}_{2\to1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{u}_{2\to1} = q_1\overrightarrow{E}_2(r)$$

On appelle alors $\overrightarrow{E}_2(r) = \dfrac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ le champ électrique créé par la particule 2.

Definition : Champ uniforme et stationnaire

Un champ stationnaire est un champ dont les caractéristiques sont indépendantes du temps :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{E}(M)$$

Un champ uniforme est un champ dont les caractéristiques sont les mêmes en tout point de l'espace :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{E}(t)$$

Definition : Champ électrostatique et magnétostatique

Un champ électrostatique est un champ stationnaire. Un champ magnétostatique est un champ stationnaire.

Definition : Force de Lorentz

Une particule de charge q, animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}$ dans un référentiel, placée dans un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E}$ et magnétostatique uniforme $\overrightarrow{B}$ subit une force, appelée force de Lorentz :

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + q\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{B}$$

Remarque : Ordre de grandeur

Si on étudie un proton de masse $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ et de charge $q = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ plongé dans un champ électrostatique uniforme de module $E = 1{,}0\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ à la surface de la Terre :

- $F_g \approx mg = 1{,}6 \times 10^{-26}\,\mathrm{N}$
- $F_e \approx qE = 1{,}6 \times 10^{-16}\,\mathrm{N}$

On a alors toujours $F_e \gg F_g$.

Ordre de grandeur de champ électrique ou magnétique :

- Antenne mobile $E \sim 10^1\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ à $10^2\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$;
- Condensateur $E \sim 10^2\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ à $10^4\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$;
- Champ de claquage de l'air $E \sim 10^6\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$;
- Champ magnétique terrestre $B \sim 5\times 10^{-5}\,\mathrm{T}$;
- Aimants puisants de moteurs $B \sim 0{,}3\,\mathrm{T}$;
- IRM $B \sim 6\,\mathrm{T}$;

Si on compare en ordre de grandeur la force électrique et la force magnétique on a :

$$\frac{F_e}{F_m} = \frac{E}{vB}$$

Pour un champ électrostatique $E \sim 10^3\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ et un champ magnétostatique $B \sim 0{,}3\,\mathrm{T}$ la vitesse pour que les deux forces soient équivalentes doit être de :

$$v \sim 1\times 10^4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

On voit donc que la force magnétique est bien plus efficace pour modifier la trajectoire d'une particule chargée.

2 Aspect énergétique

Propriété : Puissance fournie par un champ électrique

Soit une particule de charge q soumise à un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$, la puissance de la force de Lorentz s'exprime :

$$\boxed{\mathscr{P}(\overrightarrow{F}) = q\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}}}$$

Si on applique le théorème de la puissance cinétique on voit alors que :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \mathscr{P}(\overrightarrow{F}) = q\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}}$$

Le champ électrique peut alors augmenter ou diminuer l'énergie cinétique de la particule en fonction de son orientation et du signe de q.

Propriété : Puissance fournie par un champ magnétique

Soit une particule de charge q soumise à un champ magnétostatique $\overrightarrow{B}$, la puissance de la force de Lorentz s'exprime :

$$\boxed{\mathscr{P}(\overrightarrow{F}) = q\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}}\wedge\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}} = \overrightarrow{0}}$$

Si on applique le théorème de la puissance cinétique on voit alors que : $\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = 0$ L'énergie cinétique de la particule est donc constante, la force de Lorentz magnétique peut donc modifier la trajectoire de la particule sans changer son énergie cinétique.

Propriété : Énergie potentielle électrique

On peut montrer que la force de Lorentz électrique est une force conservative telle que :

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathscr{E}_\mathrm{p,elec}$$

où $\mathscr{E}_\mathrm{p,elec}$ est l'énergie potentielle électrique associée dont l'expression dépend uniquement de la charge de la particule et de la forme du champ électrique $\overrightarrow{E}$ (voir cours de physique de deuxième année).

Definition : Potentiel électrique

On définit le potentiel électrique noté V par la relation :

$$\mathscr{E}_\mathrm{p,elec} = qV \Longrightarrow \mathrm{d}V = -\frac{q}{q}\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

Propriété : Potentiel électrique d'un champ uniforme

Soit un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E} = E_0 \overrightarrow{u}_x$, le potentiel électrique est donné par la relation :

$$\boxed{V(x) - V(x_0) = -E_0(x - x_0)}$$

3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme

Propriété : Équation du mouvement

Pour une particule assimilée à un point M de masse m et de charge q soumise à un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ uniforme dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$. L'équation du mouvement est :

$$\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \frac{q\overrightarrow{E}}{m}$$

On se ramène donc à un vecteur accélération constant, et une résolution identique au champ de pesanteur constant.

Démonstration :

On considère une particule chargée de charge q dans un référentiel $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ placée dans un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E} = E_0 \overrightarrow{u}_y$ et dans un champ mangétostatique uniformément nul $\overrightarrow{B}_0 = \overrightarrow{0}$.
À l'instant $t = 0$ la particule possède une vitesse $\overrightarrow{v}_0 = v_0(\cos\alpha \overrightarrow{u}_x + \sin\alpha \overrightarrow{u}_y)$.

Système : On étudie la particule de masse m et de charge q assimilée à un point M.

Référentiel : On se place dans le référentiel du laboratoire $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ supposé galiléen.

Bilan des forces :

- $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} = qE_0 \overrightarrow{u}_y$;
- $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u}_z$ avec $\|\overrightarrow{P}\| \ll \|\overrightarrow{F}\|$;

Principe fondamental de la dynamique : On commence par exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y + z\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\overrightarrow{u}_y + \dot{z}\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x + \ddot{y}\overrightarrow{u}_y + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z$$

On applique alors le PFD :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}_{M/\mathscr{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = q\overrightarrow{E} \qquad \Longleftrightarrow \qquad m\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = q\overrightarrow{E}$$

On obtient alors une accélération constante vectoriellement comme dans le cas de la chute libre :

$$\boxed{\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \frac{q}{m}\overrightarrow{E}}$$

On peu alors retrouver l'équation de la trajectoire parabolique vu au chapitre Mécanique 2.

Exemple : Vitesse initiale parallèle au champ

Soit un champ électrostatique $\overrightarrow{E} = E_0 \overrightarrow{u}_x$ et à $t = 0$: $\overrightarrow{v_0} = v_0 \overrightarrow{u}_x$ et la particule en O.

$$\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x = \frac{q}{m}E_0\overrightarrow{u}_x \Longrightarrow \dot{x}(t) = \frac{qE_0t}{m} + v_0 \Longrightarrow x(t) = \frac{qE_0t^2}{2m} + v_0t$$

Exemple : Vitesse initiale orthogonale au champ

Soit un champ électrostatique $\overrightarrow{E} = E_0 \overrightarrow{u}_x$ et à $t = 0$: $\overrightarrow{v_0} = v_0 \overrightarrow{u}_y$ et la particule en O.

$$\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x + \ddot{y}\overrightarrow{u}_y = \frac{q}{m}E_0\overrightarrow{u}_x \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{qE_0t}{m} \\ \dot{y}(t) = v_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = \dfrac{qE_0t^2}{2m} \\ y(t) = v_0t \end{cases}$$

Propriété : Différence de potentielle entre deux électrodes

En appliquant une différence de potentiel U entre deux électrodes planes, parallèles et distantes de d, on obtient un champ électrique perpendiculaire aux grilles, dirigé vers les potentiels décroissants et de norme :

$$E = \frac{U}{d}$$

Propriété : Accélération d'une particule entre deux électrodes

Soit une particule unitialement au repos dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$ et assimilée à un point M, de masse m et de charge q soumise à un champ électrostatique uniforme $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u}_x$ tel qu'on impose une différence de potentiel U entre deux électrodes distantes de d. La vitesse de la particule après avoir parcouru la distance d est :

$$\boxed{v_f = \sqrt{\frac{2|qU|}{m}}}$$

Démonstration :

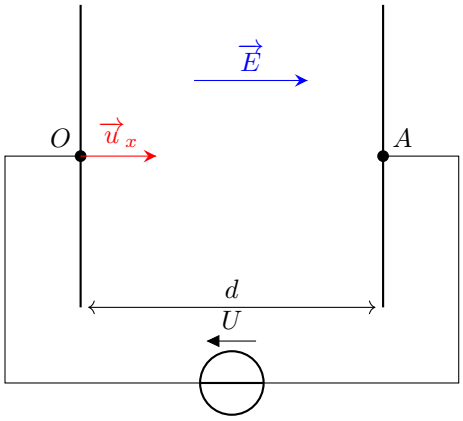
On considère deux plaques métallique séparées d'une distance d soumise à une différence de tension U.
On suppose que le champ électrostatique entre les deux plaques est uniforme :

$$\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u}_x \text{ donc } V(x) = V(x=0) - \frac{Ux}{d} \text{ donc } E_0 = \frac{U}{d}$$

et donc que le potentiel électrique est de la forme :

$$V(x) = v(x=0) + \frac{Ux}{d}$$

On étudie une particule chargée de masse m et de charge q sans vitesse initiale à la position $x = 0$.



Système : On étudie la particule de masse m et de charge q assimilée à un point M.

Référentiel : On se place dans le référentiel du laboratoire $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ supposé galiléen.

Bilan des forces :

- $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{B}$;
- $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u}_z$ avec $\|\overrightarrow{P}\| \ll \|\overrightarrow{F}\|$;

Théorème de l'énergie cinétique : On applique le TEC entre le point O et le point A :

$$\Delta\mathscr{E}_c = \mathscr{E}_c(t_A) - \mathscr{E}_c(t_O) = \mathscr{E}_c(t_A) = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Le travail de la force de Lorentz électrique s'obtient en faisant la différence de potentiel :

$$W(\overrightarrow{F})_{O\to A} = -\int_O^A \mathrm{d}E_p = -q\int_O^A \mathrm{d}V = qV(x=0) - qV(x=d) = qU$$

D'après le TEC on obtient :

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = qU \Longrightarrow \boxed{v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}}$$

Remarque : Limite relativiste

On considère qu'on peut appliquer les résultat issu de la mécanique Newtonienne tant que la vitesse des particules et inférieure à $0{,}1c$ avec $c = 3 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme

Propriété : Trajectoire circulaire

Soit une particule assimilée à un point M de masse m et de charge q dans un champ magnétostatique uniforme $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u}_z$ perpendiculaire à la trajectoire. À $t = 0$ la particule est placée au point O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0 = v_0\overrightarrow{u}_x$.
On montre que la trajectoire est circulaire de rayon :

$$R = \frac{mv_0}{|qB_0|}$$

Démonstration : Rayon de la trajectoire

Système : On étudie la particule de masse m et de charge q assimilée à un point M.

Référentiel : On se place dans le référentiel du laboratoire $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ supposé galiléen.

Bilan des forces :

- $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{B}$;
- $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u}_z$ avec $\|\overrightarrow{P}\| \ll \|\overrightarrow{F}\|$;

On se place dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$ et dans le repère de Frenet $(M, \overrightarrow{u_T}, \overrightarrow{u_N})$. Le mouvement est uniforme car on a montré que l'énergie cinétique de la particule était constante. On a alors l'accélération qui vaut :

$$\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \cancel{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}\overrightarrow{u_T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N}$$

On a également l'expression de la vitesse : $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}} = v_0\overrightarrow{u_T} \Longleftrightarrow \overrightarrow{F} = |qB_0|v_0\overrightarrow{u_N}$

Principe fondamental de la dynamique : $m\frac{v_0^2}{R}\overrightarrow{u_N} = |qB_0|v_0\overrightarrow{u_N}$

En projetant sur le vecteur $\overrightarrow{u_N}$ on obtient : $R = \frac{mv_0}{|qB_0|}$

Démonstration : Trajectoire circulaire

On considère le mouvement d'une particule chargée de masse m et de charge q dans un champ magnétostatique uniforme $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u}_z$. À $t = 0$ la particule est placée au point O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v}_0 = v_0\overrightarrow{u}_x$.

Système : On étudie la particule de masse m et de charge q assimilée à un point M.

Référentiel : On se place dans le référentiel du laboratoire $\mathscr{R}(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ supposé galiléen.

Bilan des forces :

- $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} = qE_0\overrightarrow{u}_y$;
- $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u}_z$ avec $\|\overrightarrow{P}\| \ll \|\overrightarrow{F}\|$;

Principe fondamental de la dynamique : On commence par exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y + z\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\overrightarrow{u}_y + \dot{z}\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow \overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x + \ddot{y}\overrightarrow{u}_y + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z$$

On peut alors exprimer la force magnétique dans le repère cartésien :

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v_{M/\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{B} = qB_0\dot{x}\overrightarrow{u}_x \wedge \overrightarrow{u}_z + qB_0\dot{y}\overrightarrow{u}_y \wedge \overrightarrow{u}_z = qB_0(\dot{y}\overrightarrow{u}_x - \dot{x}\overrightarrow{u}_y)$$

On applique le PFD :

$$m\ddot{x}\overrightarrow{u}_x + m\ddot{y}\overrightarrow{u}_y = qB_0(\dot{y}\overrightarrow{u}_x - \dot{x}\overrightarrow{u}_y)$$
$$/\overrightarrow{u}_x \ : \ \ddot{x} = \frac{qB_0}{m}\dot{y}$$
$$/\overrightarrow{u}_y \ : \ \ddot{y} = -\frac{qB_0}{m}\dot{x} \text{ et } \ddot{z} = \dot{z} = z = 0$$

On intègre entre l'instant $t = 0$ et l'instant t :

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t=0) = \frac{qB_0}{m}(y(t) - y(t=0))$$
$$\dot{y}(t) - \dot{y}(t=0) = -\frac{qB_0}{m}(x(t) - x(t=0))$$

Or à $t = 0$ on a $x(t=0) = y(t=0) = \dot{y}(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$:

$$\dot{x} = \frac{qB_0}{m}y + v_0$$
$$\dot{y} = -\frac{qB_0}{m}x$$

On injecte dans les premières équations couplées :

$$\ddot{x} = \frac{qB_0}{m}\left(-\frac{qB_0}{m}x\right) \Longrightarrow \ddot{x} + \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 x = 0$$
$$\ddot{y} = -\frac{qB_0}{m}\left(\frac{qB_0}{m}y + v_0\right) \Longrightarrow \ddot{y} + \left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 y = -v_0\frac{qB_0}{m}$$

On a alors deux équations du mouvement, on pose $\omega_0 = \left|\frac{qB_0}{m}\right|$ et on a les solutions :

$$x(t) = A_x\cos(\omega_0 t) + B_x\sin(\omega_0 t) \text{ et } y(t) = A_y\cos(\omega t) + B_y\sin(\omega_0 t) - v_0\frac{qB_0}{\omega_0^2 m}$$

On utilise les conditions initiales :

$$x(t=0) = A_x = 0 \text{ et } \dot{x}(t=0) = B_x\omega_0 = v_0 \text{ et } y(t=0) = A_y - \frac{mv_0}{|qB_0|} = 0 \text{ et } \dot{y}(t=0) = B_y\omega_0 = 0$$

On obtient alors :

$$x(t) = \frac{mv_0}{|qB_0|}\sin(\omega_0 t) \text{ et } y(t) = \frac{mv_0}{|qB_0|}\cos(\omega_0 t) - \frac{mv_0}{qB_0}$$

On obtient une trajectoire circulaire de rayon $R_c = \frac{mv_0}{|qB_0|}$ et de centre $C(0; -\frac{mv_0}{qB_0})$.

Quatrième partie

Chimie

Liste des chapitres Chimie

1 Molécules et solvants **105**
1 Configuration électronique d'un atome . . . 105
2 Modèle de la liaison covalente . . . 107
3 Polarité des molécules . . . 109
4 Forces intermoléculaires . . . 110
5 Les solvants moléculaires . . . 111
2 Transformation de la matière **113**
1 Description d'un système physico-chimique : . . . 113
2 Transformation chimique d'un système . . . 114
3 État final d'une transformation chimique . . . 115
4 Capacité numérique . . . 118
3 Cinétique chimique **119**
1 Vitesse de réaction . . . 119
2 Lois de vitesse . . . 120
3 Mesures physiques . . . 122
4 Méthode intégrale . . . 123
5 Influence de la température . . . 126

Chimie 1 : Molécules et solvants

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
4.2.1 Structure des entités chimiques	
Modèle de la liaison covalente Liaison covalente localisée. Schéma de Lewis d'une molécule ou d'un ion monoatomique ou d'un ion polyatomique pour les éléments des blocs s et p.	Citer les ordres de grandeur de longueurs et d'énergies de liaisons covalentes. Déterminer, pour les éléments des blocs s et p, le nombre d'électrons de valence d'un atome à partir de la position de l'élément dans le tableau périodique. Établir un schéma de Lewis pertinent pour une molécule ou un ion. Identifier les écarts à la règle de l'octet.
Géométrie et polarité des entités chimiques Électronégativité : liaison polarisée, moment dipolaire, molécule polaire.	Associer qualitativement la géométrie d'une entité à une minimisation de son énergie. Comparer les électronégativités de deux atomes à partir de données ou de leurs positions dans le tableau périodique. Prévoir la polarisation d'une liaison à partir des électronégativités comparées des deux atomes mis en jeu. Relier l'existence ou non d'un moment dipolaire permanent à la structure géométrique donnée d'une molécule. Déterminer direction et sens du vecteur moment dipolaire d'une liaison ou d'une molécule de géométrie donnée.
4.2.2 Relations structure des entités - propriétés physiques macroscopiques	
Interaction entre entités Interactions de van der Waals. Liaison hydrogène ou interaction par pont hydrogène.	Citer les ordres de grandeur énergétiques des interactions de van der Waals et de liaisons hydrogène. Interpréter l'évolution de températures de changement d'état de corps purs moléculaires à l'aide de l'existence d'interactions de van der Waals ou par pont hydrogène.
Solubilité ; miscibilité. Grandeurs caractéristiques et propriétés de solvants moléculaires : moment dipolaire, permittivité relative, caractère protogène. Mise en solution d'une espèce chimique moléculaire ou ionique.	Associer une propriété d'un solvant moléculaire à une ou des grandeurs caractéristiques. Interpréter la miscibilité ou la non-miscibilité de deux solvants. Interpréter la solubilité d'une espèce chimique moléculaire ou ionique.

1 Configuration électronique d'un atome

Definition : Composition d'un atome

L'atome est constitué d'un noyau et de son cortège électronique. On note ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$:

- Z le nombre de protons dans le noyau et d'électrons dans l'atome. Z représente le nombre de charges de l'atome. Il est aussi appelé numéro atomique.
- N le nombre de neutrons dans le noyau.
- $A = Z + N$ le nombre total de nucléons. A est aussi appelé nombre de masse.

Un atome est électriquement neutre, il contient donc Z électrons.

Un **élément chimique** est défini par son numéro atomique Z. Il peut être sous la forme de différents **isotopes** qui possèdent un nombre de masse A différent.

Propriété : Configuration électronique

Les électrons sont répartis dans des couches électroniques associées à un nombre entier n qui se déclinent en sous-couches associées à des lettres s, p, d, etc.

On retiendra que pour un atome dans son état fondamental :

- Une sous-couche s contient au maximum deux électrons, une sous-couche p au maximum six électrons et une sous-couche d au maximum dix électrons ;
- Toutes les sous-couches doivent être pleines avant d'en remplir une nouvelle ;

- L'ordre de remplissage des sous-couche est le suivant :

$$\underbrace{1s}_{\text{ligne 1}} \rightarrow \underbrace{2s2p}_{\text{ligne 2}} \rightarrow \underbrace{3s3p}_{\text{ligne 3}} \rightarrow \underbrace{4s3d4p}_{\text{ligne 4}} \rightarrow \underbrace{5s4d5p}_{\text{ligne 5}}$$

Definition : Électrons de cœur / électrons de valence

Les énergies des divers électrons présents dans un atome n'évoluent pas de façon continue. Il est d'usage de séparer les électrons d'un atome en deux groupes :

- Les électrons de valence qui sont moins liés au noyau ;
- Les électrons de cœur qui sont solidement liés au noyau.

Propriété : Électrons de valence

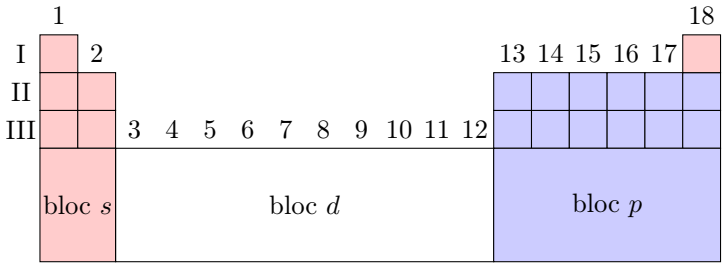
Les électrons de valence d'un atome sont les électrons occupant les orbitales de nombre quantique principal n le plus élevé et/ou les sous-couches incomplètes.

Definition : Tableau périodique, construction par bloc

Les éléments sont classés par numéros atomiques Z croissants et rangés en colonnes et lignes appelées périodes de façon à ce que les éléments d'une même colonne présentent des propriétés chimiques analogues.

Des considération de mécanique quantique permettre de définir 4 bloc dans le tableau périodique. À partir de la deuxième période on a :

- le bloc s qui constitue les deux premières colonnes plus les deux premiers éléments H et He ;
- le bloc p qui constitue les 6 dernières colonnes ;
- le bloc d qui constitue les 10 colonnes entre le bloc s et le bloc p à partir de la 4e ligne ;
- le bloc f qui constitue les 14 colonnes entre le bloc s et le bloc d à partir de la 6e ligne.



Propriété : Nombre d'électrons de valence

Le nombre d'électrons de valence se déduit de la place d'un élément dans la classification périodique.

- Pour un élément du bloc s c'est son numéro de colonne ;
- Pour un élément du bloc p c'est son numéro de colonne -10 ;

Exemple :

- Le sodium est situé à la période III dans la première colonne du bloc s : il possède un électron de valence et sa configuration électronique est

$$\text{Na} \qquad 1s^2 \quad 2s^2 2p^6 \quad 3s^1$$

- L'oxygène est situé à la période II dans la quatrième colonne du bloc p : il possède 6 électrons de valence et sa configuration électronique est

$$\text{O} \qquad 1s^2 \quad 2s^2 2p^4$$

- Le vanadium est à la période IV dans la troisième colonne du bloc d : il possède 5 électrons de valence et sa configuration électronique est

$$\text{V} \qquad 1s^2 \quad 2s^2 2p^6 \quad 3s^2 3p^6 \quad 4s^2 3d^3$$

Exemple :

En vous aidant de la classification périodique indiquer le nombre d'électrons de valence des éléments suivants : carbone,

azote, fluor, phosphore, soufre, chlore.

	1	2		13	14	15	16	17	18
I	1 H		Z X						2 He
II	3 Li	4 Be		5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
III	11 Na	12 Mg		13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar

2 Modèle de la liaison covalente

Definition : Liaison covalente selon Lewis

Une liaison covalente entre deux atomes résulte de la mise en commun de deux électrons de valence. Les électrons forment alors un doublet liant entre les deux atomes. La laison est simple si elle est constituée d'un seul doublet liant, elle peut être double si elle est constituée de deux doublets liants ou triple.

Les électrons de valences d'un atome ne sont pas partagés, ils forment des doublets non liants qui sont localisés autour de l'atome.

Remarque : Ordre de grandeur

On donne l'ordre de grandeur de l'énergie molaire d'une liaison covalente ainsi que la distance entre deux atomes lié par liaison covalente :

- $E_{cov} \sim 100\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$ à $1000\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$
- $d_{cov} \sim 100\,\mathrm{pm}$

Règle du duet et de l'octet

Les éléments tendent à former des édifices chimiques (molécules ou ions) dans lesquels ils sont entourés de :

- 2 électrons (1 doublet) pour l'hydrogène ;
- 8 électrons (4 doublets) pour les périodes $n \geqslant 2$;

afin de saturer leurs couche de valence et gagner en stabilité.

Remarque :

Le modèle de Lewis est restreint aux éléments des bloc s et p.

Les éléments du bloc d nécessitent d'utiliser un modèle basé sur la mécanique quantique pour comprendre les liaisons formées.

Definition : Charge formelle

Soit un atome X possédant E électrons de valence. Si au sein d'une molécule X est entouré de P doublets non liants et L doublets liants. Alors X possède une charge formelle :

$$CF = E - 2P - L$$

Propriété : Charge d'une molécule

Si la molécule formée possède une charge q. On peut alors vérifier :

$$q = \sum_i CF_i$$

Méthode : Méthode pour trouver le schéma de Lewis d'une molécule

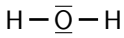
Pour une molécule de charge q, composée de k atomes X_i de nombre d'électrons de valences E_i :

1. Déterminer le nombre d'électrons de valence de la molécule : $N = \sum_{i=1}^{k} E_i - q$;

2. Déterminer le nombre de doublets à placer : $D = \dfrac{N}{2}$;
3. Relier chaque atome à ses voisins par un doublet liant.
4. Placer les doublets restants de façon à ce que le plus d'atomes respectent la règle du duet ou de l'octet.
5. Placer les charges formelles sur chaque atome.

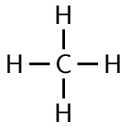
Exemple :

- La molécule d'eau H_2O :



L'atome O possède 6 électrons de valence, 2 doublets non liant et 2 doublet liant : $CF = 6 - 2 \times 2 - 2 = 0$

- La molécule de méthane CH_4 :

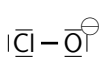


L'atome C possède 4 électrons de valence, 0 doublets non liant et 4 doublet liant : $CF = 4 - 0 \times 2 - 4 = 0$

- La molécule de dichlore Cl_2 :

L'atome Cl possède 7 électrons de valence, 3 doublets non liant et 1 doublet liant : $CF = 7 - 3 \times 2 - 1 = 0$

- L'ion hypochlorite ClO^- :

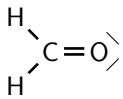


L'atome O possède 6 électrons de valence, 3 doublets non liant et 1 doublet liant : $CF = 6 - 3 \times 2 - 1 = -1$
On a bien la somme des charges formelles qui est égale à la charge de l'ion.

- La molécule de diazote N_2 :

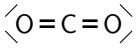
L'atome N possède 5 électrons de valence, 1 doublets non liant et 3 doublet liant : $CF = 5 - 1 \times 2 - 3 = 0$

- La molécule de méthanal H_2CO :

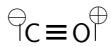


L'atome C possède 4 électrons de valence, 0 doublets non liant et 4 doublet liant : $CF = 4 - 0 \times 2 - 4 = 0$
L'atome O possède 6 électrons de valence, 2 doublets non liant et 2 doublet liant : $CF = 6 - 2 \times 2 - 2 = 0$

- Le dioxyde de carbone CO_2 :

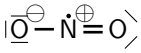


- Le monoxyde de carbone CO :



L'atome O possède 6 électrons de valence, 1 doublets non liant et 3 doublet liant : $CF = 6 - 1 \times 2 - 3 = 1$
L'atome C possède 4 électrons de valences, 1 doublets non liant et 3 doublet liant : $CF = 4 - 1 \times 2 - 3 = -1$
On a bien la somme des charges formelles qui est nulle car la molécule n'est pas chargée.

- Le dioxyde d'azote NO_2 :



L'atome O possède 6 électrons de valences, 3 doublets non liant et 1 doublet liant : $CF = 6 - 3 \times 2 - 1 = -1$
L'atome N possède 5 électrons de valences, 1 électron célibataire et 3 doublet liant : $CF = 4 - 1 \times 2 - 1 - 3 = -1$.
On a bien la somme des charges formelles qui est nulle car la molécule n'est pas chargée.

Definition : Radicaux

Si le nombre d'électrons de valence de la molécule est impair, alors il reste un électron célibataire à la fin. La molécule est alors extrêmement réactive car cet électron célibataire va chercher à être très réactif.

Definition : Lacune électronique

Lorsqu'un atome ne peut pas s'entourer d'un octet d'électrons, il est qualifié d'électrodéficient. Il est schématisé avec

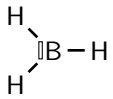
une lacune électronique symbolisée par un rectangle vide.

Definition : Hypervalence

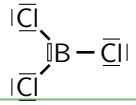
À partir de la troisième ligne incluse, certains atomes peuvent avoir une valence plus grande que 4. On dit que ces atomes sont hypervalent et on ne peut pas prédire ces molécules avec le modèle de Lewis.

Exemple :

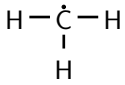
- Le trihydrurobore BH_3 :



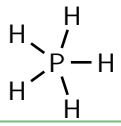
- Le trichlorure d'aluminium $AlCl_3$ (Z(Al)=13) :



- Le méthyle CH_3 est un composé radical :



- Le phosphorane PH_5 est un composé hypervalent :



3 Polarité des molécules

Definition : Liaison polaire et électronégativité

Lorsque deux atomes d'éléments chimiques différents sont en liaison covalente, les électrons de valences ne restent pas répartis équitablement entre les deux atomes. Ils sont plus attirés par l'un ou par l'autre des deux atomes, ce qui crée un déséquilibre des charges au niveau de chaque atome. On dit alors que la liaison est polarisée :

$$^{\delta-}\mathrm{A}-\mathrm{B}^{\delta+}$$

L'électronégativité χ d'un élément chimique A quantifie sa propension à s'approprier les électrons d'une liaison covalente qui le lie à B. Ici $\chi_A > \chi_B$ car le nuage électronique est plus proche de A que de B.

Definition : Moment dipolaire d'une liaison

On considère une liaison AB polarisée, on définit le vecteur moment dipolaire $\overrightarrow{\mu}$:

$$^{\delta-}\mathrm{A}-\mathrm{B}^{\delta+} \qquad \text{avec } \overrightarrow{\mu} = \delta e \times \overrightarrow{AB} \qquad \text{de norme } \|\overrightarrow{\mu}\| = \delta e d_{AB}$$

où $\overrightarrow{\mu}$ est orienté de la charge négative vers la charge positive (ici de A vers B) d_{AB} est la longueur de la liaison AB et δe la charge partielle en coulomb.

L'unité S.I. du moment dipolaire est le coulomb.mètre ($\mathrm{C \cdot m}$). Cependant, on utilise beaucoup le Debye (D) :

$$1\,\mathrm{D} = 3{,}33 \times 10^{-30}\,\mathrm{C \cdot m}$$

Propriété : Évolution dans le tableau

L'électronégativité χ augmente si l'on se déplace dans la classification périodique de la gauche vers la droite ou du bas vers le haut. L'élément le plus électronégatif est le fluor F.

Il existe plusieurs échelles pour évaluer l'électronégativité d'un atome. Ici quelques valeurs tabulée d'électronégativité avec l'échelle de PAULING.

	H	Li	Be	B	C	N	O	F	S	Cl
χ_p	2,20	0,98	1,57	2,04	2,55	3,04	3,44	3,98	2,58	3,16

Definition : Forme d'une molécule

Les doublets d'électrons se repoussent car sont chargés négativement : la géométrie la plus stable est celle où les doublets sont lles plus éloignés les un des autres.

Propriété : Méthode VSEPR

On considère un atome A central lié à n atomes X et porteur de p doublets non liants, on note : AX_nE_p

On applique alors :

- On calcule la somme de tous les doublets $n + p$, ce qui permet de savoir comment se répartissent les doublets autour de A ;

- On regarde alors la géométrie de l'ensemble des atomes qui formes la molécule.

Definition : Polarité d'une molécule

On dit qu'une molécule est polaire si le barycentre des charges positives de la molécule ne coïncide pas avec le barycentre des charges négatives.

Propriété : Calcul du moment dipolaire d'une molécule

En première approximation, le moment dipolaire d'une molécule est égal à la somme vectorielle des moments dipolaires des liaisons covalentes polarisées de la molécules.

Si son moment dipolaire est non nul alors la molécule est dite polaire, sinon elle est apolaire.

Definition : molécules apolaire

Une molécule apolaire peut être polarisée par l'extérieur de manière transitoire :

- Lorsque la molécule est en présence d'un ion ou d'une molécule polaire, alors elle possède un moment dipolaire induit.
- Lorsque sous l'effet de fluctuations elle possède un moment dipolaire qui est nul en moyenne tout en ayant un moment dipolaire instantané.

Ces deux effets sont plus important lorsque la molécule est dite polarisable. La polarisabilité d'une molécule est directement liée à sa taille.

Propriété : Polarisabilité

En présence d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ (créé par une molécule polaire avoisinante), une molécule possède alors un moment dipolaire induit supplémentaire

$$\overrightarrow{p}_{\text{ind}} = \alpha \overrightarrow{E} \quad \text{où } \alpha \text{ est la polarisabilité de la molécule}$$

La polarisabilité caractérise l'aptitude du nuage électronique d'un atome ou d'une molécule à se déformer sous l'effet d'un champ $\overrightarrow{E}$. α s'exprime en $\mathrm{C \cdot m^2 \cdot V^{-1}}$ et augmente avec la taille de l'atome ou de la molécule.

4 Forces intermoléculaires

Definition : Interactions de van der Waals

Les interactions de van der Waals sont les interactions électrostatiques attractives qui s'établissent entre les charges dipolaires de deux édifices chimiques. On distingue les interactions :

- de type Keesom : interaction entre deux dipôles permanents (entre deux molécules polaires) ;
- de type Debye : interaction entre un dipôle permanent et un dipôle induit (entre une molécule polaire et une molécule apolaire) ;
- de type London : interaction entre un dipôle instantané et le dipôle qu'il induit (entre deux molécules apolaires).

Propriété : Additivité des interactions

Pour une molécule apolaire, on peut lui attribuer un moment dipolaire instantané et un moment dipolaire induit si elle est en présence d'une molécule ionique ou polarisée. On retiendra que l'interaction entre deux molécules est la somme des interaction suivantes :

- deux molécules polaires : Keesom + Debye + London ;
- deux molécules apolaires : London ;
- une molécules apolaire et une molécule polaire : Debye + London.

Definition : Liaison hydrogène

La liaison hydrogène est l'interaction attractive qui s'établit entre un atome d'hydrogène lié à un atome très électronégatif A et un doublet non liant d'électrons porté par un atome électronégatif B.

$$\mathrm{A}-\overset{\delta+}{\mathrm{H}}\cdots|\mathrm{B}\overset{\delta-}{-}\mathrm{X}$$

A et B étant le plus souvent des atomes de fluor (F), d'oxygène (O) ou d'azote (N).

Remarque : Ordre de grandeur

- Liaison covalente : $E_{\text{cov}} = 200\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ à $800\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
- Interaction VdW : $E_{\text{VdW}} = 1\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ à $5\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
- Liaison hydrogène : $E_{\text{H}} = 10\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ à $40\,\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

Definition : Température de changement d'état

Lors d'un changement d'état, on change la distance moyenne entre les molécules leurs orientations. Pour chaque état de la matière on a donc des interactions intermoléculaires de différentes intensités :

État de la matière	Intensité des interactions
Solide	forte
Liquide	Intermédiaire
Gazeux	Faible

La température de changement d'état correspond à l'énergie d'agitation thermique nécessaire pour diminuer les interactions de van der Waals. On retiendra qu'entre deux composés, celui dont la température de changement d'état est la plus élevé est celui dont l'interaction intermoléculaire est la plus intense.

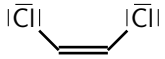
Propriété : Influence du moment dipolaire

L'existence de moment dipolaire permanent favorise la cohesion entre les molécules. Une molécule polaire aura une température de changement d'état supérieure par rapport à une molécule apolaire semblable.

Exemple :

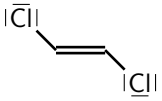
Les deux isomères de configuration du 1,2-dichloroéthène :

Z



$T_{\text{éb}}(Z) = 60\,°\text{C}$

E



$T_{\text{éb}}(E) = 48\,°\text{C}$

Propriété : Influence de la polarisabilité

Plus les atomes composant la molécule sont gros, plus la molécule est polarisable et plus les interactions de cohésion seront intense.

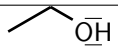
On observe donc une augmentation de la température de changement d'état avec la taille des molécules.

Remarque : Cas particulier :

Pour des molécules présentant des liaisons hydrogènes comme HF, H_2O, NH_3, on observe que la température de changement d'état est plus plus élevée car l'interaction intermoléculaire est plus intense.

Exemple :

Considérons les molécules de chloroéthane et d'éthanol :

	
$\mu = 2{,}06\,\text{D}$	$\mu = 1{,}71\,\text{D}$
$T_{\text{éb}} = 12\,°\text{C}$	$T_{\text{éb}} = 78\,°\text{C}$

Les interactions de van der Waals sont plus intenses pour le chloroéthane (moment dipolaire plus élevé et plus forte polarisabilité) mais les liaisons hydrogènes de l'éthanol sont plus intenses.

5 Les solvants moléculaires

Definition : Solvant

Une solution est un mélange homogène de deux substances au moins, obtenu par la dissolution de l'une dans l'autre.

La substance minoritaire est le soluté et la majoritaire le solvant.

Propriété : Permittivité électrique relative

La permittivité électrique caractérise l'intensité de l'interaction coulombienne entre deux ions de charges opposées $q_1 q_2 < 0$ soit $\overrightarrow{F}_{2\to 1} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}\overrightarrow{u}_{2\to 1}$ donc plus ϵ_r est grand, plus les ions seront dissocié car l'interaction coulombienne est moins forte.

Propriété : Le moment dipolaire

Une molécule de solvant de moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ va pouvoir polariser une liaison afin de faciliter la dissociation d'une espèce dans le solvant sous forme ionique.

$$\mathsf{A-B} + \overrightarrow{p} \longrightarrow \overset{\delta-}{\mathsf{A}}\mathsf{-}\overset{\delta+}{\mathsf{B}} \longrightarrow \overset{\delta+}{\mathsf{A}} + \overset{\delta-}{\mathsf{B}}$$

Propriété : Proticité du solvant

La proticité d'un solvant est la capacité d'un solvant à intervenir dans une liaison hydrogène. On dit alors que le solvant est protique.

Propriété : Solubilité

Un soluté A est soluble dans un solvant S si les interactions A-S sont aussi fortes que les interactions A-A ou S-S.

On en déduit la règle empirique qu'un composé est soluble dans un solvant si les deux molécules possèdent des propriétés similaires (moment dipolaire, proticité).

Propriété : Miscibilité de deux solvants

Deux solvants S et S' sont miscibles s'ils présentent des interactions similaires entre eux.

Chimie 2 : Transformation de la matière

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
4.1.1 Description d'un système et de son évolution vers un état final	
Système physico-chimique Espèces physico-chimiques.	Recenser les espèces physico-chimiques présentes dans un système.
Corps purs et mélanges : concentration en quantité de matière, fraction molaire, pression partielle. Composition d'un système physico-chimique	Décrire la composition d'un système à l'aide des grandeurs physiques pertinentes.
Variables intensives et extensives.	Identifier le caractère extensif ou intensif d'une variable.
Transformation chimique d'un système Modélisation d'une transformation par une ou plusieurs réactions chimiques. Équation de réaction ; constante thermodynamique d'équilibre.	Écrire l'équation de la réaction (ou des réactions) qui modélise(nt) une transformation chimique donnée. **Déterminer une constante d'équilibre.**
Évolution d'un système lors d'une transformation chimique modélisée par une seule réaction chimique : avancement, activité, quotient réactionnel, critère d'évolution.	Décrire qualitativement et quantitativement un système chimique dans l'état initial ou dans un état d'avancement quelconque. Exprimer l'activité d'une espèce chimique pure ou dans un mélange dans le cas de solutions aqueuses très diluées ou de mélanges de gaz parfaits avec référence à l'état standard. Exprimer le quotient réactionnel. Prévoir le sens de l'évolution spontanée d'un système chimique.
Composition chimique du système dans l'état final : état d'équilibre chimique, transformation totale.	Identifier un état d'équilibre chimique. Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique ou de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. Capacité numérique : déterminer, à l'aide d'un langage de programmation, l'état final d'un système, siège d'une transformation, modélisée par une réaction à partir des conditions initiales et valeur de la constante d'équilibre.

1 Description d'un système physico-chimique :

Definition : Vocabulaire à connaître

Corps pur : Les corps pur sont des système composé d'un seul type de particule. Toutes les particules sont identiques.

Mélange : Un mélange contient plusieurs espèces chimiques A_i. Pour le décrire, il faut indiquer sa composition en recensant les espèces présentes avec leurs états physique.

Solution aqueuse : Une solution est un mélange monophasique dans lequel $H_2O(l)$ est ultra-majoritaire. Cette espèce est appelée solvant. Les espèces minoritaires sont appelées solutés.

Definition : Variables d'états extensives/intensives

On appelle variables d'état les grandeurs macroscopiques permettant de définir l'état d'un système. Elles sont de deux types :

- Une variable extensive est une variable qui dépend de la taille du système.
- Une variable intensive est une variable qui ne dépend pas de la taille du système.

Méthode : Description d'une solution aqueuse

On peut décrire la composition chimique d'une solution, de volume V, composée de N solutés A_i à l'aide des variables suivantes :

- Variable extensive : la quantité de matière de chaque constituant : n_i ;
- Variable intensive : la concentration molaire de chaque constituant : $[\mathrm{A}_i] = \dfrac{n_i}{V}$;

Méthode : Description d'un mélange gazeux idéal

On peut décrire la composition chimique d'un mélange idéal de gaz, de volume V, de pression P composée de N solutés A_i à l'aide des variables suivantes :

- On considère le gaz comme parfait, soit n_{tot} la quantité de matière totale du gaz tous constituants confondus :

$$PV = n_{\text{tot}}RT \qquad \text{avec } R = 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

  et T la température du mélange en kelvin.
- Variable extensive : la quantité de matière de chaque constituant : n_i ;
- Variable intensive : la fraction molaire de chaque constituant : $x_i = \dfrac{n_i}{n_{\text{tot}}}$;
- Variable intensive : on définit la pression partielle du constituant A_i comme la pression du système de volume V à la température T si A_i était seul :

$$P(A_i) = \frac{n_i RT}{V}$$

Loi de Dalton

En combinant la définition de la pression partielle et la loi des gaz parfait appliquée au mélange total :

$$P(A_i) = \frac{n_i RT}{V} \qquad P = \frac{n_{\text{tot}}RT}{V} \Longleftarrow \frac{P(A_i)}{P} = \frac{n_i}{n_{\text{tot}}} = x_i$$

On peut alors calculer la pression partielle d'un constituant et la pression totale :

$$P_i = x_i P \qquad \text{avec } \sum_{i=1}^{k} P_i = P$$

2 Transformation chimique d'un système

Definition : Transformation chimique

Une transformation chimique est une transformation mettant en jeu une modification des espèces chimiques, de leur nature et de leur quantité de matière.

Propriété : Réaction chimique

Une réaction chimique est définie par une équation bilan et est caractérisée par une constante thermodynamique $K^\circ(T)$ appelée constante d'équilibre, dont la valeur dépend de la température T du système.

On modélise une réaction chimique faisant intervenir k constituants A_i par l'équation de la réaction :

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_i A_i = 0$$

où ν_i est le coefficient stœchiométrique algébrique de l'espèce A_i. On note :

- $\nu_i > 0$ si A_i est un produit ;
- $\nu_i < 0$ si A_i est un réactif.

Exemple :

$\text{CH}_{4(g)} + \text{H}_2\text{O}_{(g)} = \text{CO}_{(g)} + 3\,\text{H}_{2(g)}$

Definition : Avancement molaire

On définit alors l'avancement molaire ξ comme :

$$\xi(t) = \frac{n_i(t) - n_i(t=0)}{\nu_i}$$

Propriété : Tableau d'avancement

Un tableau d'avancement consiste à reporter les quantités de matière (en mol) à l'instant initial, et à un instant quelconque pendant la transformation :

	$CH_4(g)$	+	$H_2O(g)$	=	$CO(g)$	+	$3\,H_2(g)$
EI	n_1		n_2		n_3		n_4
EF	$n_1 - \xi_f$		$n_2 - \xi_f$		$n_3 + \xi_f$		$n_4 + \xi_f$

Avec ξ_f la valeur de l'avancement à la fin de la réaction qu'on appelle avancement final.

Remarque : Avancement volumiques

Lorsque le volume V du système est constant on peut exprimer le tableau d'avancement en fonction de l'avancement volumique $x = \dfrac{\xi}{V}$ en divisant toutes les cases du tableau par V. On obtient alors :

	$CH_4(g)$	+	$H_2O(g)$	=	$CO(g)$	+	$3\,H_2$gaz
EI	C_1		C_2		C_3		C_4
EF	$C_1 - x_f$		$C_2 - x_f$		$C_3 + x_f$		$C_4 + x_f$

Definition : Réaction totale

Une réaction est totale si elle se poursuit jusqu'à épuisement d'au moins un réactif. On dit alors que le ou les réactifs manquant sont **limitants**. L'avancement final est alors égal à l'avancement maximal de la réaction : $\xi_f = \xi_{max}$

Definition : Taux d'avancement

On définit la taux d'avancement comme la rapport entre l'avancement final de la réaction et son avancement maximal si la réaction était totale :

$$\tau = \frac{\xi_f}{\xi_{max}}$$

Definition : Quotient de réaction

On définit alors le quotient de réaction qui est une grandeur adimensionnelle instantanée définie par :

$$Q(t) = \prod_{i=1}^{k} a_i^{\nu_i}(t)$$

avec a_i l'activité chimique de l'espèce A_i qui dépend de la phase de l'espèce et de ses variables d'états.

Propriété : Activité chimique

corps pur		mélange		
phase condensée	phase gazeuse	solvant	soluté au sein d'une solution très diluée	gaz parfait au sein d'un mélange de gaz parfaits
$a_i = 1$	$a_i = \dfrac{P}{P^\circ}$	$a_i = 1$	$a_i = \dfrac{[A_i]}{c^\circ}$	$a_i = \dfrac{P_i}{P^\circ}$

avec $c^\circ = 1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ est la concentration de référence appelée concentration standard ; et $P^\circ = 1\,\text{bar}$ est la pression de référence appelée pression standard.

3 État final d'une transformation chimique

Definition : Équilibre thermodynamique

Un système fermé est à l'équilibre thermodynamique quand sa température T, sa pression P et sa composition chimique n'évoluent plus.

Loi de l'équilibre thermodynamique

À l'équilibre thermodynamique l'avancement de la réaction vaut ξ_{eq} et on a :

$$Q_{\text{req}} = \prod_{i=1}^{k} a_{\text{eq}}^{\nu_i}(A_i) = K^\circ(T)$$

où $K^\circ(T)$ est la constante d'équilibre thermodynamique de la réaction chimique étudiée.

Propriété : Constante d'équilibre

Une réaction chimique caractérisée par une constante d'équilibre K° est dite :

- favorisée dans le sens direct si $K^\circ > 1$;
- défavorisée dans le sens direct si $K^\circ < 1$ (favorisée dans le sens indirect).

À l'équilibre on peut écrire la constante d'équilibre K°_{direct} associée au sens direct d'équation de réaction :

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_i A_i = 0 \Longrightarrow K^\circ_{\text{direct}} = \prod_{i=1}^{k} a_{\text{eq}}^{\nu_i}(A_i)$$

À l'équilibre on peut écrire la constante d'équilibre $K^\circ_{\text{indirect}}$ associée au sens indirect d'équation de réaction :

$$\sum_{i=1}^{k} -\nu_i A_i = 0 \Longrightarrow K^\circ_{\text{indirect}} = \prod_{i=1}^{k} a_{\text{eq}}^{-\nu_i}(A_i) = \frac{1}{K^\circ_{\text{direct}}}$$

Propriété : Réaction très peu avancée

Dans le cas où $K \ll 1$ On parle de réaction très limitée ou très peu avancée. On peut effectuer les simplifications suivante sur le tableau d'avancement :

	$CH_4(g)$ +	$H_2O(g)$ =	$CO(g)$ +	$3\,H_2(g)$
EI	n_1	n_2	0	0
EF	$n_1 - \xi_{\text{eq}} \approx n_1$	$n_2 - \xi_{\text{eq}} \approx n_2$	ξ_{eq}	ξ_{eq}

Propriété : Réaction quantitative

Dans le cas o'u $K \gg 1$ On parle de réaction quantitative ou très avancée. On peut effectuer les simplifications suivante sur le tableau d'avancement :

	$CH_{4(g)}$ +	$H_2O_{(g)}$ =	CO_{gaz} +	$3\,H_{2\text{gaz}}$
EI	n_0	n_0	0	0
EF	$n_0 - \xi_{\text{eq}} \approx \epsilon$	$n_0 - \xi_{\text{eq}} \approx \epsilon$	$\xi_{\text{eq}} \approx n_0$	$\xi_{\text{eq}} \approx n_0$

Propriété : Réaction totale

Une réaction totale est une réaction où l'état d'équilibre thermodynamique n'est pas atteint.

Méthode : Déterminer la constante d'équilibre

- Faire une combinaison linéaire des différentes réactions dont la constante d'équilibre est connue pour obtenir la réaction cherchée.
- chaque fois que vous ajoutez deux réactions, vous multiplier les constantes d'équilibre.
- chaque fois que vous faire la soustraction de deux réactions vous diviser les constantes d'équilibre.
- Vous pouver alors exprimer la constante d'équilibre.

Exemple : $CO_2(g) + 4H_2(g) = CH_4(g) + 2H_2O(g)$

Supposons connues les constantes d'équilibre des réactions suivantes à la température T :

$CH_4(g) + H_2O(g) = CO(g) + 3H_2(g)$ $\qquad K_2$

$CO(g) + H_2O(g) = CO_2(g) + H_2(g)$ K_3
Alors $K_1 = 1/(K_2K_3)$

Méthode : Détermination du sens d'évolution spontanée

- Calculer le quotient de réaction à l'état initial $Q(t=0)$;
- Comparer $Q(t=0)$ avec K :
  - Si $K > Q(t=0)$ l'évolution se fait dans le sens direct ;
  - si $K = Q(t=0)$ le système est déjà à l'équilibre thermodynamique et n'évolue pas ;
  - si $K < Q(t=0)$ l'évolution se fait dans le sens indirect.

Méthode : Déterminer l'état final d'un système

- Écrire l'équation bilan de la réaction et la tableau d'avancement correspondant.
- Pour les systèmes en phase gazeuse, ajouter une colonne quantité totale de gaz à exprimer en fonction de ξ_{eq}.
- Exprimer le quotient Q_{eq} de la réaction à l'équilibre en fonction de ξ_{eq} ;
- Pour les systèmes en phase gazeuse, exprimer $P(A_i) = x_i P_{tot}$ en fonction de ξ_{eq}.
- Écrire la loi de l'équilibre $Q_{eq} = K^\circ$ et en déduire l'équation vérifiée par ξ_{eq}.
- Résoudre l'équation pour déterminer ξ_{eq} ;
- En déduire la composition du mélange dans l'état final.

Exemple : Sens d'évolution spontanée

Le chlorure de sulfuryle est une molécule qui permet de chlorer des composés organiques. On considère la réaction de dissociation du chlorure de sulfuryle dont l'équation est :

$$SO_2Cl_2(g) = SO_2(g) + Cl_2(g)$$

La constante d'équilibre thermodynamique vaut $K^\circ = 2,0$ à $T = 102\,°C$

Dans une enceinte initialement vide, à 102 °C, sous une pression constante $P_{tot} = P^\circ = 1{,}00$ bar, on introduit désormais 1,00 mol de chlorure de sulfuryle SO_2Cl_2, 5,00 mol de dichlore Cl_2 et 5,00 mol de dioxyde de soufre SO_2,. Déterminer la composition du système à l'état final.

Exprimons le quotient de réaction initial :

$$Q_{r,i} = \frac{P_i(SO_2)P_i(Cl_2)}{P_i(SO_2Cl_2)P^\circ} \qquad P_i(SO_2) = P_i(Cl_2) = \frac{5}{11}P_{tot} \qquad P_i(SO_2Cl_2) = \frac{1}{11}P_{tot}$$

On obtient alors : $Q_{r,i} = \dfrac{25}{11} > K^\circ$ la réaction se fait dans le sens indirect.

Déterminons l'état final, pour cela dressons le tableau d'avancement :

	$SO_2Cl_2(g)$	$=$ $SO_2(g)$	$+$ $Cl(g)$	Total
EI	n_1	n_2	n_2	$2n_2 + n_1$
EF	$n_1 + \xi_{eq}$	$n_2 - \xi_{eq}$	$n_2 - \xi_{eq}$	$2n_2 + n_1 - \xi_{eq}$

On exprime les activités des constituants à l'équilibre :

$$P_{eq}(Cl_2) = P_{eq}(SO_2) = \frac{n_2 - \xi_{eq}}{2n_2 + n_1 - \xi_{eq}}P_{tot} \qquad P_{eq}(SO_2Cl_2) = \frac{n_1 + \xi_{eq}}{2n_2 + n_1 - \xi_{eq}}$$

On applique alors la loi de l'équilibre :

$$Q_{r,eq} = K^\circ \Longrightarrow \frac{(n_2 - \xi_{eq})^2}{(n_1 + \xi_{eq})(2n_2 + n_1 - \xi_{eq})}\frac{P_{tot}}{P^\circ} = K^\circ$$

On peut faire apparaître le taux d'avancement car $\xi_{max} = n_2$ soit $\tau_{eq} = \dfrac{\xi_{eq}}{n_2}$:

$$\frac{(1-\tau_{eq})^2}{\left(\dfrac{n_1}{n_2} + \tau_{eq}\right)\left(2 + \dfrac{n_1}{n_2} - \tau_{eq}\right)} = K^\circ$$

Cette équation possède deux solutions : $\tau_{eq1} = 0{,}05 < 1$ et $\tau_{eq2} = 1{,}05 > 1$ on ne garde donc que la solution τ_{eq1}.

4 Capacité numérique

Definition : Méthode dichotomique

Le principe de l'algorithme dichotomique est de partir d'un intervalle $[a_0, b_0]$ où l'on sait qu'une fonction f donné s'annule (fonction monotone sur $[a_0, b_0]$ avec $f(a) \times f(b) < 0$). La méthode est décrite ci-dessous :

- On teste alors successivement $f(m)$ avec m le milieu de l'intervalle : $m = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.
- Si $f(m)$ est du même signe que $f(a)$ alors on réduit l'intervalle à $[a_1, b_0]$ avec $a_1 = m$.
- Sinon on réduit l'intervalle à $[a_0, b_1]$ avec $b_1 = m$.
- On arrête lorsque la taille de l'intervalle est à la bonne précision 2ϵ choisie.

Propriété : Fonction de recherche dichotomique

```
def Dichot(a,b,f,eps):
    g=a
    d=b
    m=(g+d)/2
    while (d-g)/2>eps:
        if f(g)*f(m)>0:
            g=m
        else:
            d=m
        m=(g+d)/2
    return m
```

Propriété : Capacité numérique 4

Déterminer, à l'aide de python, l'état final d'un système, siège d'une transformation, modélisée par une réaction à partir des conditions initiales et valeur de la constante d'équilibre.

Exemple : Formation de SO_3(g)

On considère la réaction : $2SO_2(g) + O_2(g) = 2SO_3(g)$ de constante d'équilibre en fonction de la température T : $K^\circ = e^{\frac{198000-188\times T}{RT}}$ dans les proportions stœchiométrique le quotient de réaction s'écrit : $Q_r = \dfrac{\xi^2(3-\xi)}{(1-\xi)^3}$

On définit alors les fonctions python :

```
def K(T):
    return np.exp((198000-188*T)/(8.31*T))
def Q(ksi):
    return (ksi**2)*(3-ksi)/((1-ksi)**3)
def f(ksi):
    return Q(ksi)-K(700)
Dichot(f,0.00001)
```

Exemple : Formation de NOBr(g)

On considère la réaction : $2NO(g) + Br_2(g) = 2NOBr(g)$ de constante d'équilibre : $K^\circ(330\,\mathrm{K}) = 13{,}2$ dans les proportions $n(NO) = n_1 = 4{,}81 \times 10^{-3}$ mol et $n(Br_2) = n_2 = 1{,}88 \times 10^{-3}$ mol : $Q_r = \dfrac{a\xi^2}{(n_1 - 2\xi)^2(n_2 - \xi)} = \dfrac{a\tau^2}{n_2(n_1/n_2 - 2\tau)^2(1-\tau)}$

On définit alors les fonctions python :

```
n1 = 4.81e-3
n2 = 1.88e-3
a = 0.289
K0 = 13.2
def f(x):
  return a*x**2/(n2*(n1/n2-2*x)**2 * (1-x))-K0
print(Dichot(f,0.00001))
```

Chimie 3 : Cinétique chimique

Notions et contenus	Capacités exigibles (en gras les capacités expérimentales)
4.1.2 Évolution temporelle d'un système chimique	
Cinétique en réacteur fermé de composition uniforme Vitesses de consommation d'un réactif et de formation d'un produit. Vitesse de réaction pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique supposée sans accumulation d'intermédiaires.	Relier la vitesse de réaction, dans les cas où elle est définie, à la vitesse de consommation d'un réactif ou de formation d'un produit.
Lois de vitesse : réactions sans ordre, réactions avec ordre simple (0, 1, 2), ordre global, ordre apparent. Temps de demi-vie d'un réactif, temps de demi- réaction.	Exprimer la loi de vitesse si la réaction chimique admet un ordre et déterminer la valeur de la constante cinétique à une température donnée. Déterminer la vitesse de réaction à différentes dates en utilisant une méthode numérique ou graphique. Déterminer un ordre de réaction à l'aide de la méthode différentielle ou à l'aide des temps de demi- réaction. Confirmer la valeur d'un ordre par la méthode intégrale, en se limitant strictement à une décomposition d'ordre 0, 1 ou 2 d'un unique réactif, ou se ramenant à un tel cas par dégénérescence de l'ordre ou conditions initiales stœchiométriques. **Établir une loi de vitesse à partir du suivi temporel d'une grandeur physique.**
Loi d'Arrhenius ; énergie d'activation.	Déterminer la valeur de l'énergie d'activation d'une réaction chimique à partir de valeurs de la constante cinétique à différentes températures. **Déterminer l'énergie d'activation d'une réaction chimique**.

Remarque : Contexte

Beaucoup de systèmes chimiques peuvent donner lieu à des études cinétiques, dans ce chapitre on se limitera aux systèmes fermés, homogènes, effectuant une transformation isotherme.

Dans le chapitre sur la transformation de la matière on a vu que la thermodynamique permettait de prédire l'état final d'un système. En revanche elle ne nous permet pas de décrire le temps d'évolution du système, ni le chemin par lequel cette transformation s'effectue.

En cinétique chimique on s'intéresse à des équations différentielles qui permettent de décrire l'évolution temporelle des variables d'état du système. Ces équations ont été établies empiriquement, c'est-à-dire à partir de résultats expérimentaux.

Durant ce chapitre on considèrera uniquement des réaction totale.

1 Vitesse de réaction

Remarque : Rappel sur les réactions

Pour une transformation chimique faisant intervenir N constituants A_i d'équation bilan de la forme : $\sum_{i=1}^{N} \nu_i A_i = 0$

où ν_i est le coefficient stœchiométrique algébrique de l'espèce A_i. On note :

- $\nu_i > 0$ si A_i est un produit ;
- $\nu_i < 0$ si A_i est un réactif.

On définit alors l'avancement ξ comme : $\xi(t) = \dfrac{n_i(t) - n_i(t=0)}{\nu_i}$

Definition : Vitesse de réaction

On définit la vitesse de la réaction : $r = \dfrac{1}{V}\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}$ si le volume est constant au cours de la réaction $r = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

avec $x = \dfrac{\xi}{V}$ l'avancement volumique de la réaction. L'unité de la vitesse est : $\mathrm{mol} \cdot \mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

Definition : Vitesse de consommation/d'apparition d'un réactif/produit

Considérons un système fermé dans lequel se produit une transformation chimique à volume constant, caractérisée par la réaction d'équation bilan :

$$\alpha \mathrm{A}_1 + \beta \mathrm{A}_2 \rightarrow \gamma \mathrm{A}_3 + \delta \mathrm{A}_4$$

A et B représentent les réactifs, et C et D sont les produits.

On définit la vitesse de disparition des réactifs :

$$v(A_1) = -\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{A}_1]}{\mathrm{d}t} \text{ et } v(A_2) = -\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{A}_2]}{\mathrm{d}t}$$

On définit la vitesse de formation des produits :

$$v(A_2) = \frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{A}_3]}{\mathrm{d}t} \text{ et } v(A_4) = \frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{A}_4]}{\mathrm{d}t}$$

Propriété : Relation vitesse de réaction

On peut alors exprimer la vitesse de réaction en fonction des vitesse de formation et de disparition :

$$r = \frac{1}{\nu_i}\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{A}_i]}{\mathrm{d}t}$$

où ν_i est le coefficient stœchiométrique algébrique de l'espèce A_i. On note :

- $\nu_i > 0$ si A_i est un produit ;
- $\nu_i < 0$ si A_i est un réactif.

2 Lois de vitesse

Definition : Loi de vitesse avec ordre de réaction

Soit une réaction d'équation de la forme :

$$\alpha \mathrm{A} + \beta \mathrm{B} \rightarrow \text{ Produits}$$

Les résultat expérimentaux montre que dans certains domaines de température et de pression, si la réaction admet un ordre, on peut relier la vitesse de réaction aux concentrations des réactifs de la forme :

$$r = k \times [\mathrm{A}]^{n_1} \times [\mathrm{B}]^{n_2}$$

On appelle k la constante de vitesse, ne dépendant que de la température.

On appelle n_1 et n_2 les ordres partiels par rapport aux réactifs A et B, et $n = n_1 + n_2$ l'ordre global de la réaction.

Remarque :

- Les ordres partiels ne sont à priori pas égaux aux coefficients stœchiométriques de l'équation. Il faut partir du principe qu'ils seront différents.
- toutes les réactions n'admettent pas forcément d'ordre. Certaines réactions possèdent des modélisations plus complexes n'intégrant pas le notion d'ordre de réaction.
- La dimension de la constante de vitesse dépend de l'ordre global de la réaction.

Propriété : Réaction sans ordre

Soit une réaction d'équation de la forme :

$$\alpha \mathrm{A} + \beta \mathrm{B} \rightarrow \text{ Produits}$$

Si la réaction n'admet pas d'ordre, on peut toujours exprimer à $t = 0$:

$$r(t=0) = k\,[\mathrm{A}]_0^{n_1} \times [\mathrm{B}]_0^{n_2}$$

où $r(t=0)$ est la vitesse de réaction initiale, $[\mathrm{A}]_0$ et $[\mathrm{B}]_0$ les concentrations initiales des réactifs.

On apelle alors n_1 et n_2 les ordres partiels initiaux et $n = n_1 + n_2$ l'ordre global initial de la réaction.

Propriété : Ordre global

Si pour une réaction de la forme :

$$\alpha \mathrm{A} + \beta \mathrm{B} \rightarrow \text{ Produits}$$

On a initiallement les réactifs en proportions stœchiométrique, on dresse alors un tableau d'avancement en fonction de l'avancement volumique :

	αA	+	βB	=	Produits
$t = 0\,\mathrm{s}$	$[\mathrm{A}]_0$		$[\mathrm{B}]_0$		
t quelconque	$[\mathrm{A}]_0 - \alpha x(t)$		$[\mathrm{B}]_0 - \beta x(t)$		

Avec $\dfrac{[\mathrm{A}]_0}{\alpha} = \dfrac{[\mathrm{B}]_0}{\beta}$. On a alors la relation :

$$[\mathrm{A}](t) = \frac{\alpha}{\beta}[\mathrm{B}](t)$$

On a alors l'expression de la vitesse de réaction :

$$r = k\left(\frac{\alpha}{\beta}[\mathrm{B}]\right)^{n_1}[\mathrm{B}]^{n_2} \Longrightarrow r = k'[\mathrm{B}]^{n_1+n_2}$$

Avec $k' = \dfrac{\alpha^{n_1}}{\beta^{n_1}}k$ On obtient alors l'équation différentielle d'ordre global $n = n_1 + n_2$:

$$r = -\frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}[\mathrm{B}]}{\mathrm{d}t} = k'[\mathrm{B}]^n$$

Exemple :

Soit la réaction $\mathrm{CH_3CO_2C_2H_{5(aq)}} + \mathrm{HO^-_{(aq)}} \rightarrow \mathrm{CH_3CO_2{}^-{}_{(aq)}} + \mathrm{C_2H_5OH_{(aq)}}$

On fait un tableau d'avancement avec à $t = 0$: $[\mathrm{CH_3CO_2C_2H_5}]_0 = \left[\mathrm{HO^-}\right]_0 = a$

	$\mathrm{CH_3CO_2C_2H_{5(aq)}}$ +	$\mathrm{HO^-_{(aq)}}$	$\rightarrow$ $\mathrm{CH_3CO_2{}^-{}_{(aq)}}$	+ $\mathrm{C_2H_5OH_{(aq)}}$
$t = 0\,\mathrm{s}$	a	a	0	0
t quelconque	$a - x(t)$	$a - x(t)$	$x(t)$	$x(t)$
$t \rightarrow +\infty$	0	0	a	a

On a alors : $r = k\,[\mathrm{CH_3CO_2C_2H_5}]^{n_1}\left[\mathrm{HO^-}\right]^{n_2} = k(a - x(t))^n$ avec $n = n_1 + n_2$ l'ordre global de la réaction.

Propriété : Dégénérescence de l'ordre

Si pour une réaction de la forme :

$$\alpha \mathrm{A} + \beta \mathrm{B} \rightarrow \text{ Produits}$$

On a initiallement un des réactif en large excès de manière à avoir $[\mathrm{B}] \gg [\mathrm{A}]$. On peut faire le tableau d'avancement de la réaction :

	αA	+	βB	=	Produits
$t = 0\,\mathrm{s}$	$[\mathrm{A}]_0$		$[\mathrm{B}]_0$		
t quelconque	$[\mathrm{A}]_0 - \alpha x(t)$		$[\mathrm{B}]_0 - \beta x(t) \approx [\mathrm{B}]_0$		

On a alors l'expression de la vitesse de réaction :

$$r = k\,[\mathrm{A}]^{n_1}[\mathrm{B}]^{n_2} \Longrightarrow r = k\,[\mathrm{A}]^{n_1}[\mathrm{B}]_0^{n_2}$$

On obtient alors l'équation différentielle d'ordre partiel n_1 :

$$r = -\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = k'[\mathrm{A}]^n$$

avec $k' = k\,[\mathrm{B}]_0^{n_2}$

Méthode : Méthode différentielle

On se place dans les conditions d'une expérience pour déterminer un ordre (soit dans des conditions stœchiométrique pour déterminer l'ordre global, soit dans le cas d'un réactif en excès pour déterminer l'ordre partiel). On a une équation de la forme :

$$r = \frac{1}{\nu_a}\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = k'[A]^n$$

On applique le logarithme à l'équation différentielle :

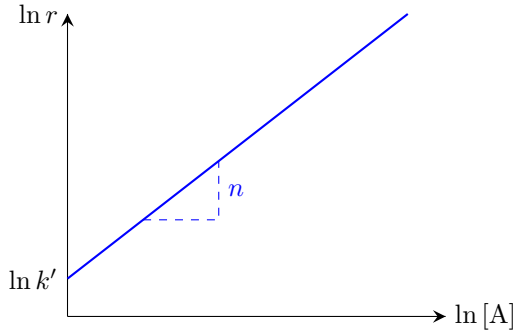
$$\ln r = \ln k' + n \ln [\mathrm{A}]$$

On calcule r en traçant la tangente en un point expérimental comme expliqué plus haut.

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de r_i et $[\mathrm{A}]_i$ effectuées de type $Y = aX + b$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
$\ln(r_1)$	$\ln([\mathrm{A}]_1)$
$\ln(r_2)$	$\ln([\mathrm{A}]_2)$
...	...
$\ln(r_N)$	$\ln([\mathrm{A}]_N)$

$a = n \qquad b = \ln(k')$



3 Mesures physiques

Propriété : suivi conductimétrique

Si la réaction étudiée met en jeu des ions en tant que réactifs ou produits tel que l'équation de la réaction peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i A_i^{z_i\pm} = 0$$

avec z_i le nombre de charges élémentaires, positives ou négatives, portées par l'ion $A_i^{z_i\pm}$. Alors la conductivité de la solution est :

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} z_i \left[\mathrm{A}_i{}^{\mathrm{z_i}\pm}\right] \lambda_i^\circ$$

avec λ_i° la conductivité molaire ionique limite de l'ion $A_i^{z_i\pm}$.

Exemple : Si on reprend l'équation : $\mathrm{CH_3CO_2C_2H_5}_{(aq)} + \mathrm{HO}^-_{(aq)} \rightarrow \mathrm{CH_3CO_2}^-{}_{(aq)} + \mathrm{C_2H_5OH}_{(aq)}$

Les ions HO^- sont introduit à l'aide de la dissolution de la soude $\mathrm{NaOH}_{(s)} \rightarrow \mathrm{HO}^-_{(aq)} + \mathrm{Na}^+_{(aq)}$. On a toujours à $t = 0$: $[\mathrm{CH_3CO_2C_2H_5}]_0 = \left[\mathrm{HO}^-\right]_0 = a$ et donc $\left[\mathrm{Na}^+\right]_0 = a$

On effectue un suivi conductimétrique et on a :

- à $t = 0$: $\sigma_0 = \lambda_{\mathrm{Na^+}} \left[\mathrm{Na}^+\right]_0 + \lambda_{\mathrm{HO^-}} \left[\mathrm{HO}^-\right]_0 = (\lambda_{\mathrm{Na^+}} + \lambda_{\mathrm{HO^-}})a$;
- à t quelconque : $\sigma(t) = \lambda_{\mathrm{Na^+}} \left[\mathrm{Na}^+\right] + \lambda_{\mathrm{HO^-}} \left[\mathrm{HO}^-\right] + \lambda_{\mathrm{CH_3CO_2^-}} \left[\mathrm{CH_3CO_2}^-\right] = \lambda_{\mathrm{Na^+}} a + \lambda_{\mathrm{HO^-}}(a - x(t)) + \lambda_{\mathrm{CH_3CO_2^-}} x(t)$;
- à $t \to +\infty$: $\sigma_\infty = \lambda_{\mathrm{Na^+}} \left[\mathrm{Na}^+\right]_\infty + \lambda_{\mathrm{CH_3CO_2^-}} \left[\mathrm{CH_3CO_2}^-\right]_\infty = (\lambda_{\mathrm{Na^+}} + \lambda_{\mathrm{CH_3CO_2^-}})a$.

On peut alors exprimer les concentrations :

$$\left[\mathrm{CH_3CO_2}^-\right] = [\mathrm{C_2H_5OH}] = x(t) = a\frac{\sigma_0 - \sigma(t)}{\sigma_0 - \sigma_\infty}$$
$$\left[\mathrm{HO}^-\right] = [\mathrm{CH_3CO_2C_2H_5}] = a - x(t) = a\frac{\sigma(t) - \sigma_0}{\sigma_0 - \sigma_\infty}$$

Il est très difficile de mesurer précisément σ_0, car à peine les réactifs mis en solution la réaction démarre. On l'obtient par extrapolation des mesures. On peut en revanche obtenir σ_∞ en mesurant sur un temps très long.

Propriété : Suivi

La spectrophotométrie d'absorption dans l'ultra-violet et le visible est une technique très employée en analyse physico-chimique.

Différentes situations permettent l'emploi de la spectrophotométrie en cinétique chimique :

- un réactif (ou un produit) présente un spectre d'absorption UV-visible alors que le produit (ou le réactif) n'absorbe pas.
- réactifs et produits présentent des maxima dans leurs spectres d'absorption ; dans ce cas il est nécessaire de connaître les coefficients d'absorptivité molaire des espèces en présence et de procéder à un étalonnage pour effectuer des mesures cinétiques.

L'absorbance de la lumière est alors calculée grâce à la loi de Beer-Lambert :

$$A = -\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \epsilon l C$$

avec :

- I_0 l'intensité lumineuse du faisceau incident ;
- I l'intensité lumineuse du faisceau transmis ;
- $\epsilon(\lambda)$ le coefficient d'absorptivité molaire à la la longueur d'onde λ ;
- C la concentration de l'espèce absorbante en solution ;
- l la longueur de la cuve.

Cette loi est linéaire pour des solutions diluées, si on a plusieurs espèces absorbante A_i on peut alors calculer :

$$A = l\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i\left[\mathrm{A}_i\right]$$

Remarque : Choix de la longueur d'onde

On choisit la longueur d'onde λ pour laquelle l'absorbance est maximum pour diminuer l'incertitude sur la mesure.

4 Méthode intégrale

Definition : Principe

Pour une réaction admettant un ordre du type :

$$\alpha A \rightarrow \text{Produits}$$

La vitesse de réaction s'écrit :

$$r = -\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\left[\mathrm{A}\right]}{\mathrm{d}t} = k\left[\mathrm{A}\right]^n$$

Pour chaque ordre, on pose $\left[\mathrm{A}\right](t=0) = \left[\mathrm{A}\right]_0$, et on utilise pour résoudre cette équation la méthode de séparation des variables.

Propriété : Ordre 0

L'équation différentielle devient alors :

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\left[\mathrm{A}\right]}{\mathrm{d}t} = k$$

On obtient alors : $\boxed{\left[\mathrm{A}\right](t) = \left[\mathrm{A}\right]_0 - \alpha k t}$

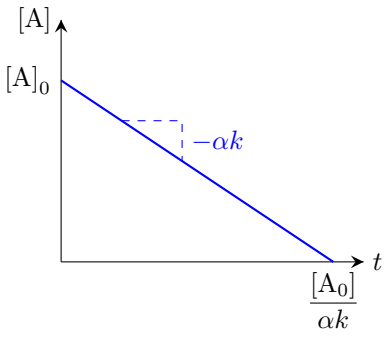
On en déduit immédiatement que :

$$\mathrm{d}\left[\mathrm{A}\right] = -\alpha k \mathrm{d}t \Longleftrightarrow \int_{\left[\mathrm{A}\right]_0}^{\left[\mathrm{A}\right](t)} \mathrm{d}\left[\mathrm{A}\right] = -ak\int_{t=0}^{t}\mathrm{d}t'$$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de t_i et $\left[\mathrm{A}\right]_i$ effectuées de type $Y = aX + b$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
t_1	$[\mathrm{A}]_1$
t_2	$[\mathrm{A}]_2$
...	...
t_N	$[\mathrm{A}]_N$

$a = -\alpha k \qquad b = [\mathrm{A}]_0$



Propriété : Ordre 1

L'équation différentielle devient alors : $-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\mathrm{d}\,[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = k\,[\mathrm{A}]$

On en déduit immédiatement que :

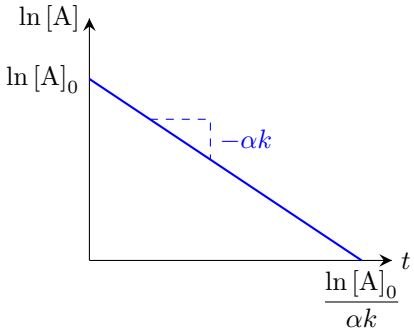
$$\frac{1}{[\mathrm{A}]}\mathrm{d}\,[\mathrm{A}] = -\alpha k \mathrm{d}t \Longleftrightarrow \int_{[\mathrm{A}]_0}^{[\mathrm{A}](t)} \frac{1}{[\mathrm{A}]}\mathrm{d}\,[\mathrm{A}] = -ak\int_{t=0}^{t}\mathrm{d}t' \Longrightarrow \ln\frac{[\mathrm{A}]}{[\mathrm{A}]_0} = -\alpha k t$$

On obtient alors : $\boxed{[\mathrm{A}]\,(t) = [\mathrm{A}]_0\, e^{-\alpha k t}}$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de t_i et $[\mathrm{A}]_i$ effectuées de type $Y = aX + b$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
t_1	$\ln([\mathrm{A}]_1)$
t_2	$\ln([\mathrm{A}]_2)$
...	...
t_N	$\ln([\mathrm{A}]_N)$

$a = -\alpha k \qquad b = \ln([\mathrm{A}]_0)$



Propriété : Ordre 2

L'équation différentielle devient alors :

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = k\,[\mathrm{A}]^2$$

On en déduit immédiatement que :

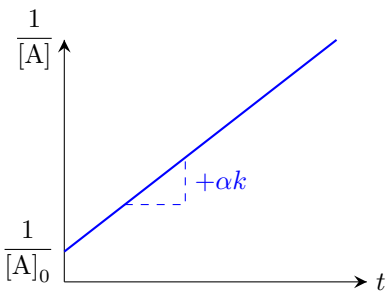
$$\frac{1}{[\mathrm{A}]^2}\mathrm{d}\,[\mathrm{A}] = -\alpha k \mathrm{d}t \Longleftrightarrow \int_{[\mathrm{A}]_0}^{[\mathrm{A}](t)} \frac{1}{[\mathrm{A}]^2}\mathrm{d}\,[\mathrm{A}] = -ak\int_{t=0}^{t}\mathrm{d}t' \Longrightarrow -\frac{1}{[\mathrm{A}]} + \frac{1}{[\mathrm{A}]_0} = -\alpha k t$$

On obtient alors : $\boxed{[\mathrm{A}]\,(t) = \dfrac{[\mathrm{A}]_0}{1 + \alpha\,[\mathrm{A}]_0\, kt}}$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de t_i et $[\mathrm{A}]_i$ effectuées de type $Y = aX + b$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
t_1	$\dfrac{1}{[\mathrm{A}]_1}$
t_2	$\dfrac{1}{[\mathrm{A}]_2}$
...	...
t_N	$\dfrac{1}{[\mathrm{A}]_N}$

$a = -\alpha k \qquad b = \dfrac{1}{[\mathrm{A}]_0}$



Definition : Temps de demi-réaction

On définit pour une réaction donnée le temps de demi-réaction comme le temps nécessaire pour consommer la moitié de la quantité de matière initiale du réactif limitant A. On peut alors définir le temps de demi-réaction $t_{\frac{1}{2}}$:

$$[\mathrm{A}]\left(t = t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{[\mathrm{A}]_0}{2}$$

Propriété : Expression de $t_{1/2}$

On peut alors exprimer pour chaque ordre le temps de demi-réaction en fonction de la concentration initiale $[\mathrm{A}]_0$. On peut alors effectuer plusieurs expériences à partir de plusieurs concentrations initiales différentes, en mesurant $t_{\frac{1}{2}}$ en fonction de $[\mathrm{A}]_0$ on peut alors déterminer l'ordre de la réaction.

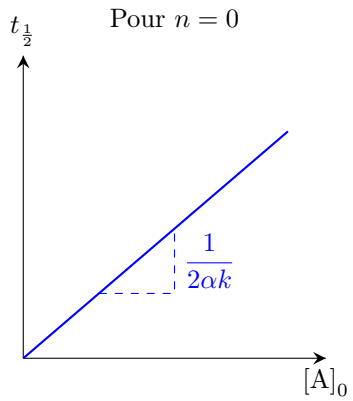
Pour l'ordre $n = 0$: On a

$$[\mathrm{A}]\left(t = t_{\frac{1}{2}}\right) = [\mathrm{A}]_0 - \alpha k t_{\frac{1}{2}} = \frac{[\mathrm{A}]_0}{2} \Longrightarrow \boxed{t_{\frac{1}{2}} = \frac{[\mathrm{A}]_0}{2\alpha k}}$$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de $t_{1/2,i}$ et $[\mathrm{A}]_{0,i}$ effectuées de type $Y = aX$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
$t_{1/2,1}$	$[\mathrm{A}]_{0,1}$
$t_{1/2,2}$	$[\mathrm{A}]_{0,2}$
...	...
$t_{1/2,N}$	$[\mathrm{A}]_{0,N}$

$$a = \frac{1}{2\alpha k} > 0$$



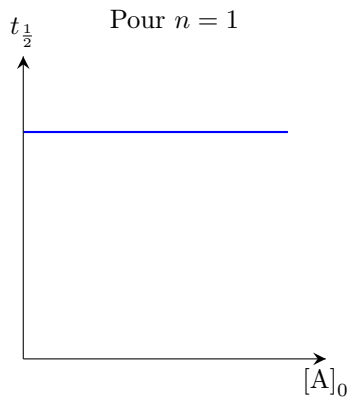
Pour l'ordre $n = 1$: On a

$$[\mathrm{A}]\left(t = t_{\frac{1}{2}}\right) = [\mathrm{A}]_0\, e^{-\alpha k t_{\frac{1}{2}}} = \frac{[\mathrm{A}]_0}{2} \Longrightarrow \boxed{t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\alpha k}}$$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de $t_{1/2,i}$ et $[\mathrm{A}]_{0,i}$ effectuées de type $Y = aX + b$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
$t_{1/2,1}$	$[\mathrm{A}]_{0,1}$
$t_{1/2,2}$	$[\mathrm{A}]_{0,2}$
...	...
$t_{1/2,N}$	$[\mathrm{A}]_{0,N}$

$$a = 0$$



Pour l'ordre $n = 2$: On a

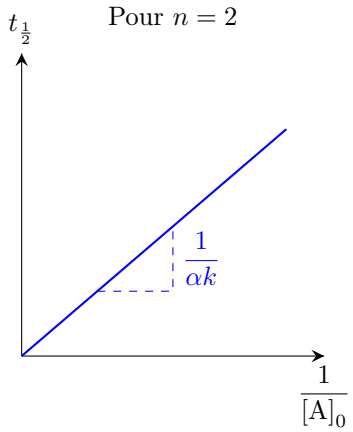
$$[\mathrm{A}]\left(t = t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{[\mathrm{A}]_0}{1 + \alpha\,[\mathrm{A}]_0\, k t_{\frac{1}{2}}} = \frac{[\mathrm{A}]_0}{2} \Longrightarrow \boxed{t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\alpha k\,[\mathrm{A}]_0}}$$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de $t_{1/2,i}$ et $[\mathrm{A}]_{0,i}$ effectuées de type $Y = aX$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
$t_{1/2,1}$	$\frac{1}{[\mathrm{A}]_{0,1}}$
$t_{1/2,2}$	$\frac{1}{[\mathrm{A}]_{0,2}}$
...	...
$t_{1/2,N}$	$\frac{1}{[\mathrm{A}]_{0,N}}$

$$a = \frac{1}{\alpha k} > 0$$

Pour $n = 2$



5 Influence de la température

Loi d'Arrhenius

On modélise la dépendance de k avec la température par la loi d'Arrhénius :

$$\boxed{k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}}$$

avec E_a l'énergie d'activation en $\mathrm{J \cdot mol^{-1}}$, R la constante des gaz parfaits, et T la température en K. Ici A est seulement un pré-facteur de la même unité que k.

Méthode : Mesure de E_a

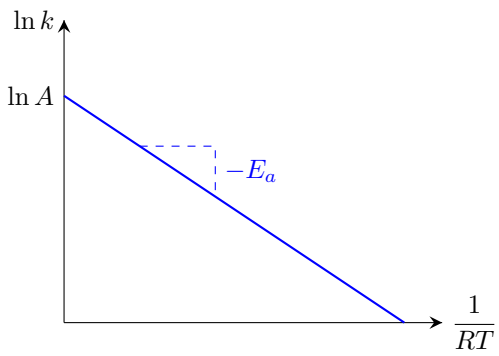
On peut mesurer l'énergie d'activation en faisant le suivi cinétique d'une réaction à différentes températures. Pour chaque suivi on effectue une mesure de $k(T)$ et on trace en suite :

$$\boxed{\ln(k) = \ln(A) - \frac{E_a}{RT}}$$

On cherche à effectuer une régression linéaire sur les N mesures de k_i et T_i effectuées de type $Y = aX + b$ sur le tableau de valeurs :

X_i	Y_i
$\frac{1}{T_1}$	$\ln(k_1)$
$\frac{1}{T_2}$	$\ln(k_2)$
...	...
$\frac{1}{T_N}$	$\ln(k_N)$

$$a = -\frac{E_a}{R} \qquad b = \ln(A)$$



Remarque : Échelle microscopique

À l'échelle microscopique, c'est la collision entre les molécules réactifs qui provoque la formation des molécules produits. La collision entre les molécules est directement reliée à l'agitation thermique des molécules et donc à la température T en K.