

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1

1. Montrer que pour tous réels positifs x et y , $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$,
avec égalité si et seulement si $x = y$.
2. Montrer que pour tous réels x et y strictement positifs, $\frac{\ln(x) + \ln(y)}{2} \leq \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$.
Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 2

1. Montrer que pour tous réels x et y :
$$\frac{|x| + |y|}{2} \leq \max\{|x|, |y|\} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \leq 2 \max\{|x|, |y|\}.$$
2. Dans un repère orthonormé du plan, représenter l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant :
a) $\max\{|x|, |y|\} \leq 1$ b) $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$ c) $|x| + |y| \leq 1$

Exercice 3

- Dans chaque cas étudier, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble A :
1. $A = \left\{ \frac{x^2}{1+x^2}, x \in \mathbb{R} \right\}$.
 2. $A = \left\{ \frac{\ln(n)}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$
 3. $A = \left\{ \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|, n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$

Exercice 4

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $[x+y] = [x] + [y]$ ou $[x+y] = [x] + [y] + 1$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \frac{[nx]}{n} \right\rfloor = [x]$.

Exercice 5

- Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{[x]}$.
1. Déterminer le domaine de définition de f et tracer l'allure de son graphe.
 2. Étudier les bornes inférieure et supérieure de f .

Exercice 6

- Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin(2x)$
1. Étudier la parité et la périodicité de la fonction f .
 2. À quel intervalle minimal peut-on réduire l'étude de la fonction f ?
 3. Étudier les variations de la fonction f sur cet intervalle.
 4. En déduire le maximum et le minimum de la fonction f sur \mathbb{R} .

Exercice 7

- Déterminer dans chaque cas si la fonction f est minorée, majorée, ou bornée sur l'intervalle I .
- a) $f(x) = 2 \cos^2 x + 3 \sin x + 2$ sur $I = \mathbb{R}$
 - b) $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$ sur $I =]-1, +\infty[$
 - c) $f(x) = \ln x + \frac{1}{1-x}$ sur $I =]0, 1[$
 - d) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $I =]0, +\infty[$

Exercice 8 Étudier la fonction $f : a) f : x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ b) $f : x \mapsto \frac{|x| - 1}{|x| + 1}$

Exercice 9 Étudier les fonctions suivantes

$$1. f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto (1 + \cos t) \sin t \end{cases} \qquad 2. g : x \mapsto x^{\sqrt{x}}$$

Exercice 10

1. Démontrer que $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Démontrer que $\ln(1 + x) \leq x$ pour tout $x \in]-1 ; +\infty[$.
3. Démontrer que $|\sin x| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que $\sin x \leq x \leq \tan x$
5. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $x^x(1 - x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$

Exercice 11 Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right|$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f . On le notera D_f .
 (b) Étudier la parité de f .
 (c) Démontrer que $\forall x \in D_f \setminus \{0\}, f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.
2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0; 1[$.
 (a) Étudier la fonction g et dresser son tableau de variations.
 (b) Étudier la position relative du graphe de g et de sa tangente au point d'abscisse 0.
 (c) Tracer l'allure du graphe de g dans un repère bien choisi.
3. (a) Dédire des questions 1. (c) et 2. (a) le tableau de variations de f sur $]1, +\infty[$.
 (b) Compléter alors le graphe de g pour obtenir l'allure du graphe de f .