Correction du devoir maison n° 1

Exercice 1

1. $\alpha = \dfrac{115\pi}{6} = \dfrac{120\pi}{6} - \dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ donc $\boxed{\cos(\alpha) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(\alpha) = -\dfrac{1}{2}}$

   $\beta = -\dfrac{55\pi}{8} = -\dfrac{48\pi}{8} - \dfrac{7\pi}{8} = -\pi + \dfrac{\pi}{8}\ [2\pi]$ donc $\cos(\beta) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin(\beta) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

   $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > 0$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

   $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

   Finalement, $\boxed{\cos(\beta) = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin(\beta) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

   $\gamma = \dfrac{101\pi}{12} = \dfrac{96\pi}{12} + \dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$ donc $\cos(\gamma) = \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin(\gamma) = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

   Par la même démarche que celle pour trouver le cosinus et le sinus de $\dfrac{\pi}{8}$, on obtient

   $\boxed{\cos(\gamma) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} \text{ et } \sin(\gamma) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

2. a) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

   $\boxed{\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \text{ ou } x = -\dfrac{\pi}{6}\ [\pi]}$

   b) $\cos\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{x}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4}\right)$

   $\Leftrightarrow x + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} - -\dfrac{x}{4}\ [2\pi]$ ou $x - \dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} + -\dfrac{x}{4}\ [2\pi]$

   $\Leftrightarrow \dfrac{5}{4}x = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ou $\dfrac{3}{4}x = -\dfrac{5\pi}{4}\ [2\pi]$ $\boxed{\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{5}\ [\dfrac{8\pi}{5}] \text{ ou } x = -\dfrac{5\pi}{3}\ [\dfrac{8\pi}{5}]}$

3. a) $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) > \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} \in]\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ ;\ \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

   $\boxed{\Leftrightarrow x \in]\dfrac{\pi}{2} + 4k\pi\ ;\ \dfrac{3\pi}{2} + 4k\pi[, k \in \mathbb{Z}}$

   b) **Attention aux valeurs interdites !** Ici $2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$\tan(2x) \geq -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 2x \in [-\frac{\pi}{4} + k\pi \ ; \ \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\Leftrightarrow x \in [-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \ ; \ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}[, k \in \mathbb{Z}}$

Exercice 2

1. $$\begin{aligned} \cos(x) + \sin(2x) = 0 &\iff \cos(x) = -\sin(2x) \\ &\iff \cos(x) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + 2x\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \tfrac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi \text{ ou } x = -\tfrac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$
   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

2. $2\cos^2(x) + \cos(x) > 0 \iff \cos(x)(2\cos(x) + 1) > 0$

   On pose $X = \cos x$ et on doit étudier le signe du polynôme de degré 2 $X(2X+1)$ qui s'annule en 0 et en $-\frac{1}{2}$ et qui est donc positif sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, +\infty[$.

   Il reste donc à résoudre dans $\mathbb{R}$ $\cos(x) < -\frac{1}{2}$ ou $\cos(x) > 0$,

   $\cos(x) = 0 \iff x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$, et

   $\cos(x) = -\frac{1}{2} \iff x = -\frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$.

   À l'aide du cercle trigonométrique et de ce qui précède, on obtient l'ensemble des solutions :

   $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right[}$