Devoir maison n^o 6

A rendre le jeudi 9 novembre 2023

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

   (b) Étudier la parité de f.

2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0;1[$.

   (a) Étudier la fonction g et dresser son tableau de variations.

   (b) Étudier la position relative du graphe de g et de sa tangente au point d'abscisse 0.

3. Soit h la restriction de f à l'ensemble $]1\ ,\ +\infty[$.
   Étudier le fonction h puis établir le tableau de variation de la fonction f sur D_f.

Exercice 2 On considère les fonctions g et h définies par

$$g(x) = \arcsin(2x-1) \text{ et } h(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right).$$

1. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de g et calculer $g'(x)$.

2. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de h et calculer $h'(x)$.

3. En déduire une relation entre g et h.

Exercice 3 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ et $u_n = \dfrac{6}{n}S_n$

1. (a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

   (b) On admet qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = an^2 + bn + c, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

   Á l'aide de la question précédente, déterminer a, b et c.

2. (a) Démontrer par récurrence que $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

   (b) Montrer que le résultat de la question 1.(b) est bien vérifié.