Correction du Test n° 2

Sujet A

2. $z = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{\sqrt{2}-\mathrm{i}} = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{\sqrt{2}-\mathrm{i}}\,\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}} = \dfrac{\sqrt{2}+2+\mathrm{i}(1-2\sqrt{2})}{3}$

3. Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble E des points M d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ tels que $Z = z+\overline{z}^2$ soit réel.

$Z = z+\overline{z}^2 = x+iy+(x-iy)^2 = x^2+x-y^2+i(y-2xy) = x^2+x-y^2+iy(1-2x)$. Ainsi, Z est réel si et seulement si Im $(Z)=0 \iff y(1-2x)=0 \iff y=0$ ou $x=\dfrac{1}{2}$

Ainsi, l'ensemble E est la réunion des droites d'équation $y=0$ et $x=\dfrac{1}{2}$.

4. $z=(2+\mathrm{i})z-3 \Leftrightarrow z(1-2-\mathrm{i})=-3 \Leftrightarrow z=\dfrac{-3}{-1-\mathrm{i}}=\dfrac{3(1-\mathrm{i})}{2}$ donc f admet un unique point invariant d'affixe $\dfrac{3(1-\mathrm{i})}{2}$

Correction du Test n° 2

Sujet B

2. $z = \dfrac{2+\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}\sqrt{2}} = \dfrac{2+\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}\sqrt{2}}\,\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{2}}{-1-\mathrm{i}\sqrt{2}} = \dfrac{-2+\sqrt{2}+\mathrm{i}(-1-2\sqrt{2})}{3}$

3. Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble E des points M d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ tels que $Z=(z+\mathrm{i})(1+\overline{z})$ soit réel.

$Z=(z+\mathrm{i})(1+\overline{z}) = z+\mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i}+z\overline{z} = x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)+\mathrm{i}+x^2+y^2 = x^2+y^2+x+y+\mathrm{i}(1+y+x)$.

Ainsi, Z est réel si et seulement si $\Im m(Z)=0 \iff 1+x+y=0 \iff y=-x-1$.

L'ensemble E des points est donc la droite d'équation $y=-x-1$.

4.$z=(3-\mathrm{i})z+4 \Leftrightarrow z(1-3+\mathrm{i})=4 \Leftrightarrow z=\dfrac{4}{-2+\mathrm{i}}=\dfrac{-4(2+\mathrm{i})}{5}$ donc f admet un unique point invariant d'affixe $\dfrac{-4(2+\mathrm{i})}{5}$