Applications et bijections

Exercice 1 Soit E un ensemble, A et B des parties de E.

1. Montrer que $A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

2. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

   (a) $A \subset B$

   (b) $A \cap B = A$

   (c) $A \cup B = B$

Exercice 2 On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array} \right.$

1. (a) Déterminer l'ensemble des antécédents du couple $(5,6)$ par f.

   (b) L'application f est-elle injective ?

2. Montrer que l'image de f est $f(\mathbb{R}^2) = D$, où $D = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 :\ a^2 - 4b \geq 0\right\}$.

Exercice 3 Soit $f : E \to F$. Montrer que :

1. $\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad A \subset f^{-1}(f(A))$

2. $\forall (A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2, \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad$ et $\quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Exercice 4 Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-4y, 2x+3y) \end{array} \right.$ est bijective, puis expliciter sa réciproque f^{-1}.

Exercice 5 On considère l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+1}{z-2}$ et on note $\mathrm{A} = \mathbb{C} \setminus \{2\}$ et $\mathrm{B} = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

1. Montrer que l'application f réalise une bijection de A vers B et déterminer une expression simple de sa réciproque f^{-1}.
2. Déterminer l'image réciproque du cercle trigonométrique $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ et celle du disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leqslant 1\}$.
3. Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{U}$ tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.
4. Quel est l'ensemble de définition de l'application $f \circ f$? Est-elle également bijective, et si oui, vers quel ensemble ?

Exercice 6 Dans chaque cas, déterminer I et J tels que que f est bijective, puis expliciter sa réciproque f^{-1} :

$$\text{a) } f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & x^2+4x+1 \end{array} \right. \qquad \text{b) } f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \end{array} \right. .$$

Exercice 7 Soit la fonction $f : \left| \begin{array}{cc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)} \end{array} \right.$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle à déterminer.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} et une expression simple de sa dérivée.

Exercice 8

1. Calculer $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)\right)$, $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)\right)$ et $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)\right)$.
2. Dans chaque cas, préciser l'ensemble de définition, et déterminer une expression simple de f :

   $f(x) = \tan(\arctan(x))$ $\qquad f(x) = \cos(\arctan(x))$ $\qquad f(x) = \sin(\arctan(x))$

   $f(x) = \cos(\arcsin(x))$ $\qquad f(x) = \sin(\arccos(x))$ $\qquad f(x) = \tan(\arccos(x))$

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $2\arccos(x-1) \geq \pi$
2. $\arctan(x+1) + \arctan(x-1) = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 10 Soit la fonction $\varphi : t \mapsto \arcsin(\sin(2t))$.

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et π-périodique.
2. Montrer que $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\varphi(t) = 2t$, et que $\forall t \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\varphi(t) = \pi - 2t$.

Exercice 11 On considère les fonctions g et h définies par

$$g(x) = \arcsin(2x-1) \text{ et } h(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right).$$

1. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de g et calculer $g'(x)$.
2. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de h et calculer $h'(x)$.
3. En déduire une relation entre g et h.