Devoir maison n° 2

A rendre le jeudi 25 septembre 2025

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

Soit $z_0 \notin i\mathbb{R}$. On considère la suite de nombres complexes (z_n) de premier terme z_0 telle que $z_{n+1} = f(z_n)$, pour tout entier naturel n.

1. (a) Déterminer le ou les antécédents éventuels par f de 0 et de -1.
   (b) Déterminer le ou les antécédents éventuels par f de $1 + \mathrm{i}$.

2. (a) Montrer que, si $|z| = 1$ alors $f(z) = \mathrm{Re}(z)$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la transformation f ?

3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$.
   (a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et de y.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z pour lesquels $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
   (c) Interpréter géométriquement ce résultat.

4. (a) Montrer que la suite (z_n) est bien définie.
   (b) Montrer que, si $z_0 \neq -1$ alors $z_n \neq -1$ pour tout entier naturel n.

5. On suppose désormais $z_0 \neq -1$, et on pose $u_n = \dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}$ pour tout entier naturel n.
   (a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie.
   (b) Existe-t-il des valeurs de z_n pour lesquelles le module de u_n est égal à 1 ? Justifier votre réponse.
   (c) Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (d) Démontrer que $u_n = (u_0)^{2^n}$ pour tout entier naturel n.