Correction du devoir maison n° 4

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2\ln x$.

1. On considère la fonction d définie sur $]0,+\infty[$ par $d(x)=x^2\ln x-x+1$.

   (a) d est dérivable sur $]0,+\infty[$ par opération sur les fonctions dérivables et

   $d'(x)=2x\ln x+x^2\times\dfrac{1}{x}-1=2x\ln x+x-1$

   De même d' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

   $d''(x)=2\ln x+2x\times\dfrac{1}{x}+1=2\ln x+3.$

   (b) $d''(x)>0\Leftrightarrow \ln x>-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x>\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$d''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$d'(x)$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{x\to 0} d'(x)=-1$

   $d'(1)=0$ et $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}<1$ donc, d'après le tableau de variation de d', $d'(x)\leq 0$ pour tout $x\in]0,1]$.

   Correction 2 sur $]0,1]$, $\ln x\leqslant 0$ et $x>0$ donc $2x\ln x\leqslant 0$ puis $2x\ln x+x\leqslant 1$ donc $d'(x)\leqslant 0$.

   (d)

x	0		1		$+\infty$
$d'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$d(x)$	‖ 1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$d(x)$	‖	$+$	0	$+$	

   $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x=0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{x\to 0} d(x)=1$

   $d(x)=x(x\ln x-1)+1$

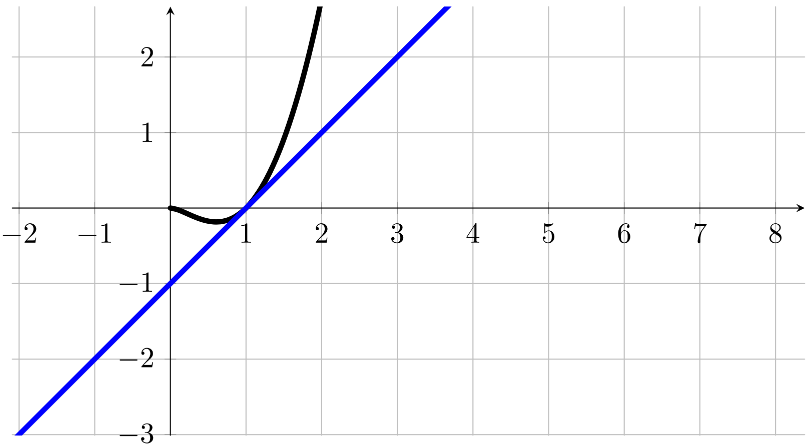
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x-1=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} d'(x)=+\infty$ par produit.

2. $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

   $f'(x) = 2x\ln x + x$ donc $f'(1) = 1$ et $f(1) = 0$ d'où

   $T : y = x - 1$

3. $f(x) - (x-1) = d(x)$ donc, d'après la question , la courbe de f est au dessus de la tangente T sur $]0, +\infty[$.

4. 

Exercice 2 On note f la fonction définie sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \mathrm{e}$.

2. $\dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \dfrac{x+1}{x} \times \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ pour tout $x \in]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$ par croissances comparées donc

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = 0$ par produit et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1$

   donc C_f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 1$

   Correction 2 $\dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \dfrac{1}{x}\ln(x(\dfrac{1}{x}+1)) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln(\dfrac{1}{x}+1)}{x}$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\dfrac{1}{x}+1) = 0$ donc

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = 0$ par somme et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1$

3. $1 - \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1-x}{x+1} = \dfrac{1}{x+1}$

   donc $\ln\left(1 - \dfrac{x}{x+1}\right) = -\ln(x+1), \forall x \in]-1\ ;\ +\infty[$

   on va donc montrer que $\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[, \quad -\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} \leqslant 0$

   On pose $g(x) = -\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$

g est définie et dérivable sur $-1\ ;\ +\infty[$ car $x+1>0$ sur cet intervalle.

$g'(x) = -\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{-x-1+1}{(x+1)^2} = \dfrac{-x}{(x+1)^2}$ est du signe de $-x$ sur $]-1\ ;\ +\infty[$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

D'après le tableau précédent, $g(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in]-1\ ;\ +\infty[$ i.e

$\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[, \quad -\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1} \leqslant 0$

4. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

   f est dérivable sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ car $1+x>0$ sur cet ensemble et le quotient $\dfrac{1}{x}$ a un dénominateur non nul sur cet ensemble.

   $f'(x) = \varphi'(x)f(x)$ où $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}\ln(1+x)$

   $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x) + \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{-(x+1)\ln(x+1)+x}{x^2(x+1)}$

   $\varphi'(x) = \dfrac{(x+1)\left(-\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}\right)}{x^2(x+1)} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

   $x^2>0$ et $f>0$ sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ donc f' est du signe de g sur cet ensemble, c'est à dire $f'(x) \leqslant 0$ sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

   $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = +\infty$ par produit donc $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$ par composition

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$\|$	$+\infty \searrow \mathrm{e}$	$\|$	$\mathrm{e} \searrow 1$	