Calculs algébriques et systèmes linéaires

Exercice 1 Calculer les sommes et produits suivants :

1. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2^{2k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$
2. a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^2(n+1-k)$ b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$ c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$

Exercice 2 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ et $u_n = \dfrac{6}{n} S_n$

1. (a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   (b) On admet qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = an^2 + bn + c, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   Á l'aide de la question précédente, déterminer a, b et c.
2. (a) Démontrer par récurrence que $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.
   (b) Montrer que le résultat de la question 1.(b) est bien vérifié.

Exercice 3

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
2. Calculer $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n}(2k)^3$ et $\displaystyle T_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)^3$

Exercice 4

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [\![0, n]\!]$ et $k \in [\![0, p]\!]$. Montrer que $\displaystyle\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.
2. Calculer $\displaystyle S_n = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Exercice 5 Écrire sous forme algébrique les nombres $a = (1-2\mathrm{i})^4$, $b = \dfrac{(2+\mathrm{i})^3}{1+\mathrm{i}}$ et $c = \displaystyle\sum_{k=-10}^{10} \mathrm{i}^k$.

Exercice 6 Soit la fonction $f : \left|\begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto (x+1)^n \end{array}\right.$

1. Développer $f(x)$. En dérivant l'égalité obtenue, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

2. Calculer les sommes $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 7 Soit un entier naturel $n \geq 3$ fixé. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-*ièmes* de l'unité et on pose $\omega = \varepsilon^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. (a) Donner, sans justifier, le nombre d'éléments de $\mathbb{U}_n$, et l'expression de ces éléments en fonction de ω.
   (b) Déterminer le module et un argument de $\omega - 1$.
   (c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\omega^p \in \mathbb{U}_n$, puis déterminer les valeurs de p telles que $\omega^p = 1$.
2. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$, en distinguant le cas où $\omega^p = 1$ du cas où $\omega^p \neq 1$.
   (b) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé, développer $(1+\omega^k)^n$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que $\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = 2n$.
3. (a) Calculer la somme triangulaire $\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} \omega^k$.
   (b) En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k = \frac{n}{\omega - 1}$. Écrire le résultat précédent sous forme trigonométrique.

Exercice 8 Calculer les sommes suivantes : 1. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i2^j$ 2. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min\{i, j\}$

3. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{i}{j+n}$ 4. $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$.

Exercice 9 Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes suivants : 1. $\begin{cases} 5x - 6y = m \\ 6x - 7y = m + 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} mx + y = 1 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

Exercice 10 Résoudre les systèmes suivants : 1. $\begin{cases} (1+\mathrm{i})x & + & (1-\mathrm{i})y & = & 4+2\mathrm{i} \\ \mathrm{i}x & + & (2\mathrm{i}+1)y & = & 3\mathrm{i}-1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (1-2\mathrm{i})x & + & 2y & = & 3-7\mathrm{i} \\ 3x & - & (1-\mathrm{i})y & = & 11+3\mathrm{i} \end{cases}$

Exercice 11 Discuter en fonction des valeurs des réels a, b, c, l'ensemble des solutions du système suivant : $\begin{cases} 2x - y + z = a \\ -x + 2y + 2z = b \\ 4x - 5y - 3z = c \end{cases}$