Correction du devoir maison n° 3

Exercice 1

1. (a) $\sqrt{2x^2-x-1}=\sqrt{x^2-3x+2} \Longrightarrow 2x^2-x-1=x^2-3x+2 \Longrightarrow x^2+2x-3=0$.

   Cette dernière équation du second degré a pour discriminant $\Delta=16>0$ et pour solutions $x_1=-3$ et $x_2=1$.

   Réciproquement, -3 et 1 vérifient $\sqrt{2x^2-x-1}=\sqrt{x^2-3x+2}$:

   $\sqrt{2(-3)^2-(-3)-1}=\sqrt{20}=\sqrt{(-3)^2-3\times(-3)+2}$, et

   $\sqrt{2\times 1^2-1-1}=0=\sqrt{1^2-3\times 1+2}$.

   Finalement, par analyse-synthèse, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\{-3;1\}}$.

   $$\begin{aligned}(b)\sqrt{4x^2-4x+1}=1-2x &\iff 4x^2-4x+1=(1-2x)^2 \text{ et } 1-2x\geq 0\\ &\iff 4x^2-4x+1=4x^2-4x+1 \text{ et } x\leq\frac{1}{2}\\ &\iff x\leq\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

   Par équivalences successives, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]}$.

   On peut aussi résoudre cette équation en écrivant que
   $\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. $||x-1|-x|\leq 1 \iff -1\leq|x-1|-x\leq 1 \iff x-1\leq|x-1|\leq x+1$.

   • Si $x>1$: $|x-1|=x-1$ et on a :

   $||x-1|-x|\leq 1 \iff x-1\leq x-1\leq x+1$, ce qui est toujours vrai.

   • Si $x\leq 1$: $|x-1|=1-x$ et on a :

   $||x-1|-x|\leq 1 \iff x-1\leq 1-x\leq x+1 \iff -2\leq -2x\leq 0 \underset{-2<0}{\iff} 1\geq x\geq 0$.

   Par disjonction des cas, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\mathbb{R}_+}$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2\ln x$.

1. On considère la fonction d définie sur $]0,+\infty[$ par $d(x) = x^2 \ln x - x + 1$.

   (a) d est dérivable sur $]0,+\infty[$ par opération sur les fonctions dérivables et

   $d'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \dfrac{1}{x} - 1 = 2x \ln x + x - 1$

   De même d' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

   $d''(x) = 2 \ln x + 2x \times \dfrac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 3$.

   (b) $d''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$d''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$d'(x)$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

   (c) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{x \to 0} d'(x) = -1$

   $d'(1) = 0$ et $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} < 1$ donc, d'après le tableau de variation de d', $d'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$.

x	0		1		$+\infty$
$d'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$d(x)$	$\Vert$ 1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$d(x)$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

   (d)

   $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln x = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{x \to 0} d(x) = 1$

   $d(x) = x(x \ln x - 1) + 1$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} d'(x) = +\infty$ par produit.

2. $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

   $f'(x) = 2x \ln x + x$ donc $f'(1) = 1$ et $f(1) = 0$ d'où

   $T : y = x - 1$

3. $f(x) - (x-1) = d(x)$ donc, d'après la question , la courbe de f est au dessus de la tangente T sur $]0,+\infty[$.

4.